ANNALEN
DER
PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

P. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. u. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

BAND 63.

DER GANZEN REIHE 368. BAND.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE, W. C. RÖNTGEN.
E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT DREI FIGURENTAFELN.

LEIPZIG, 1920.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

S B.S.
COLUMBIA LIBRARY

Anon Ed.
9.E.S.

Binding £25-

WITHDRAWN
COLLEGE

Inhalt.

Vierte Folge. Band 63.

Siebzehntes Heft.

		Seite
1.	Erwin Fues. Vergleich zwischen den Funkenspektren der Erdalkalien und den Bogenspektren der Alkalien	1
2.	Gustav Zecher. Untersuchungen am kontinuierlichen Röntgenspektrum der Glühkathodenröhre: Die Abhängigkeit der Grenzstrahlung vom Emissionsazimut und der Einfluß des Metalls der Antikathode. (Frankfurter Dissertation.) (Hierzu Tafel I.)	28
3.	W. Hahnemann und H. Hecht. Eine Theorie des Telephons	57
4.	J. Gróh und G. v. Hevesy. Die Selbstdiffusionsgeschwindigkeit des geschmolzenen Bleis	85

Ausgegeben am 16. September 1920.

Achtzehntes Heft.

1.	Ernst Reichenbächer. Über die Nichtintegrabilität der Streckenübertragung und die Weltfunktion in der Weylschen verallgemeinerten Relativitätstheorie	93
2.	Ernst Reichenbächer. Die Feldgleichungen der Gravitation und der Elektrizität innerhalb der Materie	115
3.	George Jaffé. Zur Theorie der Hochvakuumentladung	145
4.	J. E. Lilienfeld. Bemerkung zu Herrn G. Jaffés vorstehender Arbeit: „Zur Theorie der Hochvakuumentladung"	175
5.	E. Grüneisen und E. Giebe. Eine neue Bestimmung der absoluten elektrischen Widerstandseinheit. (Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt)	179

Ausgegeben am 28. September 1920.

Neunzehntes Heft.

1.	F. Paschen. Das Spektrum des Neon (Nachtrag)	201
2.	A. Sommerfeld. Allgemeine spektroskopische Gesetze, insbesondere ein magnetooptischer Zerlegungssatz	221
3.	Ferdinand Schmidt. Die Erdalkalisauerstoffphosphore	264
4.	Heinrich Wommelsdorf. Eine neue Polarisatorschaltung für Influenz- und Kondensatormaschinen	295

Ausgegeben am 7. Oktober 1920.

Zwanzigstes Heft.

Seite
1. E. Wiechert. Die Gravitation als elektrodynamische Erscheinung 301
2. Richard Gans. Das magnetische Molekularfeld 382

Ausgegeben am 19. Oktober 1920.

Einundzwanzigstes Heft.

1. Erwin Schrödinger. Grundlinien einer Theorie der Farbenmetrik im Tagessehen. (I. Mitteilung.) 397
2. Erwin Schrödinger. Grundlinien einer Theorie der Farbenmetrik im Tagessehen. (II. Mitteilung.) 427
3. Hans Küstner. Die Bewegungsgesetze der Elektrizitätsträger bei von Null verschiedenen Gasdrucken 457
4. Paul Günther. Untersuchungen über die spezifische Wärme bei tiefen Temperaturen 476

Ausgegeben am 3. November 1920.

Zweiundzwanzigstes Heft.

1. Erwin Schrödinger. Grundlinien einer Theorie der Farbenmetrik im Tagessehen. (III. Mitteilung.) 481
2. Reinhold Fürth. Zur Beweglichkeitsbestimmung aus der Brownschen Bewegung an einem Einzelteilchen. III . . . 521
3. Max Jakob. Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit des Wassers im Bereich von 0 bis 80° 537
4. H. Dember und M. Uibe. Über die spektrale Polarisation des diffusen Sonnenlichts in der Erdatmosphäre 571
5. Hilding Faxén. Der Gültigkeitsbereich der Stokes-Oseenschen Widerstandsformel. Erklärung einiger von J. Weyssenhoff gefundener Unstimmigkeiten 581

Ausgegeben am 16. November 1920.

Dreiundzwanzigstes Heft.

1. Wilhelm Müller. Messungen der Deformation des elektrostatischen Erdfeldes durch Luftfahrzeuge 585
2. Karl F. Lindman. Über eine durch ein isotropes System von spiralförmigen Resonatoren erzeugte Rotationspolarisation der elektromagnetischen Wellen 621
3. O. Schriever. Elektromagnetische Wellen an dielektrischen Drähten 645
4. L. Holborn. Über die Isothermen des Wasserstoffs 674

Ausgegeben am 1. Dezember 1920.

Vierundzwanzigstes Heft.

Seite

1. Fritz Weigert. Über die spezifische Wirkung der polarisierten Strahlung. (Hierzu Tafel II.) 681
2. E. Schweidler. Die Aufrechterhaltung der negativen Erdladung, das Grundproblem der luftelektrischen Forschung. (Bemerkungen zur gleichbetitelten Arbeit des Hrn. R. Seeliger) 726
3. Nikolaus Lyon u. Fritz Wolfram. Über die Temperaturabhängigkeit der elektrischen Doppelbrechung 739
4. L. Vegard. Die Rolle des Kristallwassers und die Struktur der Alaune. (Antwort an Hrn. Cl. Schaefer u. Frl. M. Schubert) 753
5. Ernst Rie. Verdampfung und Stabilisierung kleiner Quecksilberkugeln 759
6. F. Tuczek u. W. Heuck. Methoden zur Beobachtung des Effektes des elektrischen Feldes auf Spektrallinien 766

Ausgegeben am 10. Dezember 1920.

Fünfundzwanzigstes Heft.

1. F. Ehrenhaft u. D. K. Konstantinowsky. Radioaktivität und Elektrizität. (Hierzu Tafel III.) 773
2. Hans Hauschild. Beiträge zur Kenntnis der Oberflächenschichten auf Metallen 816
3. G. Borelius. Bestimmung des Thomsoneffektes aus dem thermischen Gleichgewicht an einem stromdurchflossenen Drahte 845
4. O. v. Auwers. Über Heuslersche Legierungen. II. Teil. Magnetische Messungen an Heuslerschen Aluminium-Manganbronzen mit hochprozentigem Eisengehalt 867
5. Paul Fröhlich. Neuere Beobachtungen über die Polarisation des bei der Totalreflexion gebrochenen Lichtes 900

Namenregister zum Jahrgang 1920 917

Ausgegeben am 28. Dezember 1920.

Nachweis zu den Figurentafeln.

Tafel I. G. Zecher.
„ II. F. Weigert.
„ III. F. Ehrenhaft
u. D. K. Konstantinowsky.

1920. № 17.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 63.

1. *Vergleich zwischen den Funkenspektren der Erdalkalien und den Bogenspektren der Alkalien;* von *Erwin Fues.*

§ 1. Einleitung.

Vor kurzem haben Sommerfeld und Kossel[1]) zwei allgemeine Gesetze aufgestellt, die für das Auftreten von Serien in den Spektren aller Elemente gelten sollen.

Das „Auswahlprinzip" gibt, unter der Annahme, daß den s-, p-, d-, b-Termen jeweils die ganz bestimmte azimutale Quantenzahl 1, 2, 3, 4 zukommt, einschränkende Regeln für ihre Kombination. Durch jene Zuordnung ist die Größe der Anfangsbahnfläche in den einzelnen Serien bestimmt und schon dadurch die Wahrscheinlichkeit ihrer Erregung abgestuft. Außerdem aber unterliegt die Kombination der Serienterme nunmehr dem Auswahlprinzip von Rubinowicz-Bohr, das unter gewöhnlichen Umständen nur Übergänge von ± 1 der azimutalen Quantenzahl zuläßt. Die Einbeziehung des s-Terms mit der azimutalen Quantenzahl 1 scheint seine Ganzzahligkeit zu fordern, die Ergebnisse des Nachstehenden stützen aber die alte Ansicht, daß die Laufzahlen des s-Terms ungerade Vielfache von $^1/_2$ sind.

Die Aussage des zweiten Gesetzes, des „Verschiebungssatzes" ist der eigentliche Gegenstand dieser Arbeit. Aus dem Bau unseres Atommodells schließt dieser Satz, daß ein Element mit seinem spektralen Verhalten in die vorangehende Spalte des periodischen Systems einrückt, wenn ihm durch Ionisation ein Elektron aus der äußeren Atomhülle entrissen, es also instand gesetzt wird, sein Funkenspektrum zu emittieren. In der Tat unterscheidet sich ein solches Atom von dem nächst

1) W. Kossel u. A. Sommerfeld, Auswahlprinzip und Verschiebungssatz bei Serienspektren, Verh. d. D. Phys. Ges. 21. S. 240. 1919.

niederer Ordnungszahl nur mehr dadurch, daß die positive Ladung des Kerns um eine Einheit größer ist; der Aufbau des ganzen Atoms, die Anordnung der Elektronen sind in beiden Fällen wesentlich dieselben. In ihrer Arbeit haben die Verfasser schon diejenigen Experimentaltatsachen angeführt, die zur Bestätigung des Verschiebungssatzes heute vorliegen. Über den qualitativen Vergleich hinaus kamen sie an zwei Punkten zu einer quantitativen Prüfung: Lorenser[1]) hat schon, rein empirisch, gezeigt, daß die Dublettserien der Erdalkalien sich nur dann angenähert durch die Rydberg-Ritzsche Serienformel darstellen lassen, wenn man in ihr die Konstante N verändert, und er hatte nahezu $4\,N$ für den besten Wert des Termzählers gefunden, ganz wie es im Sinn unseres Atommodells zu fordern ist. Fowler[2]) hat neuerdings das von Lorenser aufgestellte Seriensystem bei Magnesium erweitert und gezeigt, daß auch die neuen Linien durch Terme mit $4\,N$ im Zähler darzustellen sind.[3]) Weiter erwiesen sich die Dublettabstände der Erdalkalien und die Triplettabstände der Erden jedesmal ungefähr 4 mal so groß als die der vorhergehenden Elemente, was wiederum auf den Termzähler $4\,N$ zu schließen erlaubt. Für den eingehenderen Zahlenvergleich lag indessen nur ungenügender oder ungenügend bearbeiteter Beobachtungsstoff vor. In die Grundspektren der Alkalien kommt erst neuerdings einiges Licht, die Triplettsysteme der Erden sind nur in einzelnen Gliedern beobachtet. Die Dublettserien der Erdalkalien hat zwar Lorenser in je 4—5 Gliedern zusammengestellt, doch ist seine Seriendarstellung ganz ungenügend.

Die vorliegende Arbeit soll die letzte Lücke ausfüllen und den Vergleich durchführen. Ich habe angenommen, daß sich diese Serien durch die Ritzsche Formel oder ihre von Sommerfeld vorgezeichnete quantentheoretische Erweiterung darstellen lassen, wenn man ihren Thermen die theoretisch geforderten

---

1) E. Lorenser, Beiträge zur Kenntnis der Bogenspektren der Erdalkalien, Diss. Tübingen 1913.

2) A. Fowler, Proc. Roy. Soc. (A.) 90. S. 426. 1914.

3) Auch M. W. Hicks hat (Proc. Roy. Soc. 91. S. 452. 1915) eine Darstellung mit $4\,N$ gegeben, jedoch unter Benutzung einer theoretisch völlig unverständlichen Formel.

Zähler 4 N streng beilegt; so wie die Alkaliserien sich diesen Formeln mit dem Termzähler N fügen. Die Erwartung hat sich innerhalb der Beobachtungsgenauigkeit völlig bestätigt. Nunmehr konnten auch die von der Theorie geforderten Beziehungen zwischen den für jedes Element charakteristischen Konstanten, den Größen s, p, d, b der Alkaliserien einerseits, der Erdalkaliserien andererseits, nachgeprüft werden. Es mußte näherungsweise für sie ein Verdoppelungsgesetz gelten, das sich auch im großen ganzen durchaus bestätigt hat. Einige Abweichungen davon, das negative Vorzeichen bei einem Teil dieser Konstanten, ferner die starke Abweichung von der Ritzschen Formel führten aber dazu, beim Ansatz des Atomfeldes eine völlig allgemeine Reihenentwicklung anzunehmen, die es erlaubt, beliebige Rückwirkungen des Emissionselektrons auf die inneren Ringe mit in Rechnung zu ziehen. Es zeigte sich, daß durch sie sehr wohl jene Abweichungen zustande kommen können, daß aber trotzdem die Vorstellung ringförmiger Elektronenanordnung noch zu eng ist und nicht hinreicht zur Berechnung der Serienkonstanten.

Im ganzen dürfen die Ergebnisse dieser Arbeit als eine *Bestätigung des Verschiebungssatzes* angesehen werden.

Bei den Elementen Zn und Cd sind nur 2 Dubletts, die Grundglieder der Haupt- und zweiten Nebenserien beobachtet, bei Ra die entsprechenden beiden Paare, sowie ein Glied der ersten Nebenserie. Es war trotz der geringen Gliederzahl leicht zu zeigen, daß auch diesen Dubletts der Wert 4 N des Termzählers beigelegt werden muß, wenn man nicht zu völlig unverständlichen Abweichungen von der allgemeinen Serieneinordnung kommen will; daß außerdem auch der Vergleich von Zn mit Cu, Cd mit Ag, soweit man bis jetzt schließen kann, der Verdoppelungsregel nicht widerspricht.

Im Spektrum von Hg ist wie bei Au bis jetzt noch kein Dublettsystem aufgefunden. Doch nimmt Hg im spektralen Verhalten überhaupt eine Sonderstellung ein auch gegenüber den meist mit ihm zusammen genannten Metallen Zn und Cd, ähnlich Gold unter den Elementen der ersten Spalte. Es kommt darin eben der kompliziertere Bau der Atome zum Ausdruck, die am Schluß der großen Periode von 32 Elementen stehen, während die am Ende der 18er Perioden stehenden ent-

sprechenden Elemente einfachere Gesetzmäßigkeiten und völlig übereinstimmendes Verhalten zeigen.

Eine Zusammenstellung der berechneten Terme ergab für die Elemente der II. Spalte noch eine *überraschende Gesetzmäßigkeit.* Es gilt für sie die Beziehung $(1{,}5\ \mathfrak{S}) = 2 \cdot (1{,}5\ S)$ in so guter Annäherung, daß ein gesetzmäßiger Zusammenhang unverkennbar ist. ($\mathfrak{S}$ kennzeichnet den scharfen Term der Dublettlinien, S den entsprechenden Term der Einfachlinien.) Die Abweichung ist am stärksten bei den Elementen, die am Schluß der großen Perioden stehen. Es ist der Versuch gemacht worden, eine Deutung dieses wunderbaren Zusammenhangs zu geben, die, wenn sie sich bestätigt, in der Tat eine erste Verknüpfung von Funken- und Bogenspektrum desselben Elements ist.

Zur genauen Darstellung der untersuchten Serien erwies sich die Ritzsche Formel als ungenügend. Man entschließt sich allerdings nur ungern, eine weitere Konstante in die Serienformel einzuführen, es sei denn, daß die Erweiterung eine wesentliche Verbesserung im Gefolge hat. Im Fall der Erdalkalien gelang durch sie nicht bloß die Einbeziehung des ersten, vom Ritz-Typus stark abweichenden Glieds, sondern auch eine bessere Anpassung an den weiteren Verlauf. Zum Vergleich wurde die erweiterte Formel auch auf andere Serien, die bisher nur ungenügende Darstellung fanden, angewandt. In einigen Fällen mit demselben völlig befriedigenden Ergebnis, in einem andern Fall ohne den gewünschten Erfolg.

Das Beobachtungsmaterial für die Alkalien lag zusammengestellt vor in erster Linie in Kaysers Handbuch[1]), in dem die spektroskopischen Erfahrungen bis zu den Jahren 1910 bzw. 1912 gesammelt sind. Sodann in der zusammenfassenden Serienbearbeitung von Dunz[2]) 1911, der eine nach Genauigkeit und Einheitlichkeit der Messung damals bestmögliche Auswahl getroffen hat. Neuerdings hat Johanson[3]) zur

1) H. Kayser, Handbuch der Spektroskopie 5. 1910 u. 6. 1912.

2) B. Dunz, Bearbeitung unserer Kenntnisse von den Serien, Diss. Tübingen 1911.

3) A. M. Johanson, Eine neue Formel für Berechnung von Serien in Linienspektren, Arkiv för Matem., Astron. och Fysik 12. 1917 (Berlin, Friedländer und Sohn).

Prüfung einer neuen sehr leistungsfähigen Serienformel auch die späteren Messungen einbezogen. Für die Berechnung der ersten Stellen der Serienkonstanten $\mathfrak{S}\mathfrak{P}\mathfrak{D}\mathfrak{B}$ genügten die älteren Angaben.

Für die Dublettserien der Erdalkalien gilt bis heute die Zusammenstellung von Lorenser[1]), die zu ergänzen ist durch die Fowlerschen Mg-Messungen[2]) und neuen internationalen Messungen für Ca von Holtz.[3])

Im folgenden sind diese mit berücksichtigt; es findet sich eine neue Zusammenstellung aller bekannten Erdalkalidublettserien im letzten Paragraph dieser Arbeit.

Für die wenigen gemessenen Dubletts bei Ra, Zn, Cd sind die Wellenlängen in den Arbeiten von Runge[4]) und von Paschen[5]) angegeben.

Bei der Ansetzung der Rydbergschen Zahl N ist im folgenden natürlich streng am rein theoretischen Standpunkt festgehalten und der Wert $N_{\infty\,\text{intern}} = 109737{,}2$, der sich aus Paschens He-Messungen ergeben hat, zugrunde gelegt. Hieraus folgt durch Multiplikation mit $\frac{5895{,}932}{5896{,}150}$ (dem umgekehrten Verhältnis der Wellenlängen der gelben Natriumlinie in beiden Systemen).

$$N_{\infty\,\text{Rowl.}} = 109733{,}2$$

und für ein Element mit dem Atomgewicht A

$$N_A = N_\infty \left(1 - \frac{1}{A \cdot 1843{,}7}\right),$$

$$N_{A\,\text{Rowl.}} = 109733{,}2 - \frac{61}{A}.$$

§ 2. Graphische und numerische Methode der Serienberechnung.

Im folgenden sollen kurz die Wege beschrieben werden, die sich mir bei der Berechnung der Serienformeln als praktisch erwiesen haben, da seit langem hierüber in der Literatur

1) a. a. O.
2) Hier aus der Arbeit von Johanson entnommen.
3) O. Holtz, Ztschr. f. wiss. Photogr. 12. S. 112. 1913.
4) C. Runge, Ber. d. Berl. Akademie S. 418. 1904.
5) F. Paschen, Ann. d. Phys. 35. S. 865 u. 868. 1911.

nichts zu finden ist. Zur ersten Übersicht über Möglichkeit und Form der Darstellung (z. B. ob die Ritzsche Formel hinreicht oder nicht) führt am besten ein vorwiegend *graphischer Weg*, der übrigens auch schon hinreicht, die Konstanten der Serienformel in erster Annäherung zu bestimmen. Z. B. sind die in Tab. 1 angegebenen Werte der $\mathfrak{S}\mathfrak{P}\mathfrak{D}\mathfrak{B}$ der Alkalien direkt aus der Figur abgelesen. Mit Hilfe der so bestimmten Näherungswerte der Konstanten läßt sich ihre genaue Berechnung leicht vollends durchführen.

Wir setzen voraus, eine Reihe von beobachteten Wellenlängen λ_m ($m = 1, 2, 3 \ldots$) in Luft seien gegeben, deren Zusammengehörigkeit in eine Serie vermutet werde. Es soll geprüft werden, ob sie sich durch eine exakte oder erweiterte Ritzsche Serienformel darstellen lassen und die in dieser Formel auftretenden Konstanten sollen (zunächst näherungsweise) bestimmt werden. Für eine andere Serienformel wäre der Weg entsprechend abzuändern. Nachdem man sich vergewissert hat, daß alle Messungen auf dieselben Einheiten bezogen sind, reduziert man die Werte aufs Vakuum[1]) und bildet die Reihe der Schwingungszahlen $\nu_m = \frac{10^8}{(\lambda_{Vak})_m}$, die mit den ihrer Größe nach oftmals gar nicht oder nur ungefähr bekannten Fehlern $\pm \varepsilon_m = \frac{\Delta \lambda_m \cdot 10^8}{\lambda_m^2}$ behaftet sind.

So wird eine Aufeinanderfolge von Werten erhalten, die sich mit wachsender Gliednummer m einem bestimmten oberen Grenzwert, der „Seriengrenze" G, nähern. Diese Wertreihe soll dargestellt werden durch eine Serienformel

$$(1) \qquad \nu_m \pm \varepsilon_m = G - \frac{p^2 N}{\Phi_{(m)}^2},$$

(p bedeutet die Multiplizität der überschüssigen positiven Ladung des Atomrests, und ist im Fall der Bogenspektren = 1, im Fall der Funkenspektren = 2).

Im Anschluß an Ritz, bzw. in theoretisch begründeter

---

1) Reduktion der Maßsysteme aufeinander nach Kayers Kurve, s. Handbuch 6. S. 890; für $\lambda = 6000$—8000 s. Eder, Wien. Ber. 1914. S. 2292. Reduktion aufs Vakuum etwa nach Kaysers Tabelle, Handbuch 2. S. 513.

Weiterentwicklung seines Ansatzes versuchen wir hier speziell die Form

$$(1') \qquad \Phi_{(m)} = m + a + \alpha(G - \nu_m) + \alpha'(G - \nu_m)^2 + \dots$$

Die Konstanten G, a, α, α' sind frei wählbar und so zu bestimmen, daß (1) für jedes m erfüllt ist. (In manchen Fällen ist übrigens der Wert G durch beobachtete Kombinationen gebunden.)

Aus (1) folgt einerseits als Darstellung von Φ, bzw. $\varphi = \Phi - m$ *durch die Beobachtungsdaten* ν

$$(2) \qquad \Phi_{(m)} - m = \varphi_{(m)} = \sqrt{\frac{p^2 N}{G - (\nu_m \pm \varepsilon_m)}} - m,$$

aus (1') andererseits *als theoretische Darstellungsform*

$$(3) \qquad \Phi_{(m)} - m = \psi_{(m)} = a + \alpha(G - \nu_m) + \alpha'(G - \nu_m)^2 + \dots$$

und es muß bei richtiger Konstantenwahl für jedes m die Gleichung $\varphi = \psi$ erfüllt sein.

Wir betrachten zunächst die Funktion $\psi(m)$.

Ohne die Werte der Serienkonstanten noch zu wissen, erkennen wir leicht aus (3) den allgemeinen Charakter der Kurve $y = \psi(m)$. Die Werte $G - \nu_m$ nähern sich ja mit nachsenden m der Null, wir können die Kurve daher für große m durch ihre Asymptoto $y_1 = a$ ersetzen. Für kleine m kommt in erster Näherung $y_2 = \alpha(G - \nu_m) = \frac{c_1}{(m + a)^2}$, in zweiter Näherung $y_3 = \alpha'(G - \nu_m)^2 = \frac{c_2}{(m + a)^4}$ hinzu, woraus sich die Kurve $y = \psi$ als Superposition von irgend zwei Kurven y_2 und y_3 (Fig. 1 u. 2) und Anlagerung derselben an die horizontale Asymptote $y_1 = a$ ergibt.

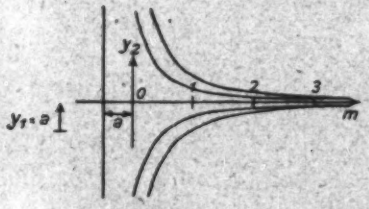


Fig. 1.

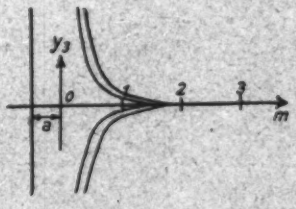


Fig. 2.

Bei der Gelegenheit zeigt sich, daß ein Fehler in der Wahl von G oder ein Beobachtungsfehler ε_m derselben Stelle

in den Zahlen ν_m den Werten von ψ, der für irgendwelche einmal gewählten a, α, α' aus (3) hervorgeht, nur in seinen Korrektionsgliedern y_2 und y_3 und in diesen wiederum nur für kleine m merklich beeinflußt. Mit anderen Worten: daß die a, α, α' von der Wahl von G in erster Annäherung unabhängig sind und daß sie schon durch die ersten Glieder der beobachteten Serie entscheidend bestimmt werden. Daraus folgt weiter, daß die Genauigkeit, mit der sie überhaupt bestimmt werden können, von der Meßgenauigkeit gerade der ersten Serienglieder abhängt und daß zu ihrer exakten Berechnung aus Formel (3) in vielen Fällen ein Näherungswert der Größe G genügt. Diese Bemerkungen gelten allerdings nicht im Fall schlechter Konvergenz der Reihe (3). Da nämlich $y_2, y_3 \cdots$ dann merklich von derselben Größenordnung sind, aber verschiedenes Vorzeichen haben können, so kann die durch sie hervorgerufene Korrektion auch gerade in den ersten Gliedern klein sein und doch später noch beträchtlich werden. Dieser Fall verlangt natürlich eine genaue Durchrechnung.

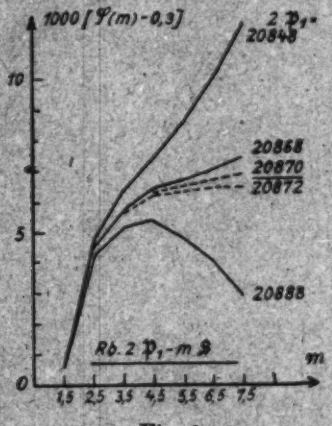


Fig. 3.

Wir gehen nun über zur Betrachtung der Kurven φ, wie sie sich aus der Beobachtungsreihe der ν für verschiedene Werte G ergeben, am besten an einem Beispiel. Fig. 3 zeigt den Verlauf von $\varphi_{(m)}$ für den Anfang der zweiten Nebenserie von Rubidium und für verschiedene Wahl der Seriengrenze G. Auf den ersten Blick ist zu sehen, daß der richtige Wert von G nahe bei der Zahl 20870, vermutlich etwas höher liegt, und es ist so schon ein erster Näherungswert der Seriengrenze gewonnen.

Ganz so glatt wie im Fall der Fig. 3 geht die Wahl im allgemeinen nicht. Einmal verzerren die Beobachtungsfehler den Verlauf der Kurve in vielen Fällen sehr beträchtlich, besonders bei höheren Gliedern m. Bei diesen entspricht gleichen Beobachtungsfehlern in λ auch eine Unsicherheit der gleichen Stelle in den verschiedenen ν, was aber bei dem mehr und

mehr abnehmenden $G - \nu$ immer stärker ins Gewicht fällt. Die Taylorsche Entwicklung der Funktion φ ergibt diesen Einfluß der Fehler sehr einfach, auch gestattet sie die Lage der Kurve für verschiedene Werte G hinzuzeichnen, wenn sie nur für *ein* ungefähr richtiges G berechnet ist. Über die tatsächliche Verzerrung durch die Meßfehler und das Wachstum des möglichen Fehlerbereichs mit steigendem m gibt Fig. 4 Aufschluß, in der die entsprechende Kurve für die Hauptserie von Natrium und den richtigen Wert der Seriengrenze eingezeichnet ist, umgeben von dem schraffierten Gebiet der möglichen Beobachtungsfehler. Wie man aus der Figur ersieht, läßt sich trotz starker Verzerrung ein asymptotischer Verlauf und die Lage der (eingezeichneten) Asymptote leicht erkennen.

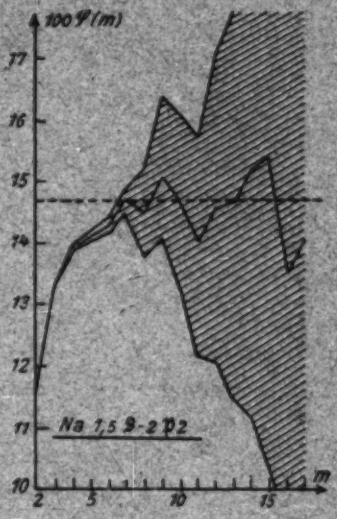


Fig. 4.

Stellt sich heraus, daß ein asymptotischer Verlauf bei keinem Wert der Grenze erreicht wird oder ist man gezwungen, einen bestimmten Wert derselben einzuhalten, für den die Kurve keine horizontale Asymptote hat, so ist zu schließen, daß es sich gar nicht um eine Serie vom Ritzschen Typus handelt. Ferner kommen auch in vielen beobachteten Serien Zacken vor, die durch Beobachtungsfehler nicht völlig erklärt werden können, die den asymptotischen Verlauf zwar an einer Stelle unterbrechen, ihn jedoch nicht im ganzen vernichten. Solche Stellen müssen einfach außer Betracht bleiben, solange das Verhalten der Kurve in ihnen nicht irgendwie theoretisch geklärt ist. Für beide Anomalien gibt Paschen[1]) neuerdings Beispiele aus dem Neonspektrum.

Nach dieser vorbereitenden Betrachtung läßt sich nun der Gang der Untersuchung in wenigen Schritten beschreiben, die dem in der Näherungsrechnung üblichen Verfahren entsprechen.

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. 60. S. 405. 1919.

1. Man zeichne für verschiedene Werte G den Verlauf der Kurven φ und wähle — wenn dies überhaupt möglich ist — einen solchen Näherungswert G_0, daß die Kurve für größere m um eine horizontale Asymptote schwankt. Kleine Änderungen von G vermögen nun die Lage der ersten Kurvenpunkte nicht mehr wesentlich zu beeinflussen. Man bestimmt also

2. aus diesen ersten Punkten die schon gut angenäherten Werte a, α, α' und zeichne aus ihnen die ideale Kurve ψ, die für die Kurve φ Schwerlinie im Sinn der Fehlerrechnung werden muß. Dies gibt

3. einen genaueren Wert G_1 der Grenze durch nochmalige Verschiebung der Zackenkurve φ so lange, bis sie gleichmäßig um die Kurve ψ schwankt. (Einfacher unterwirft man die Kurve ψ der entgegengesetzten Verschiebung, wobei ihre Gestalt natürlich verbogen wird.)

Bis zu dieser näherungsweisen Bestimmung der Serienkonstanten führt die anschauliche Betrachtung der vorhin beschriebenen Kurven. Sie reicht für manche Zwecke schon aus und ist in allen Fällen geeignet, die genaue Rechnung durch Einführung guter Näherungswerte zu erleichtern.

Das *rechnerische Verfahren* besteht in einer Kombination der beschriebenen Schritte. Man führt nämlich den Näherungswert G_1 der Seriengrenze durch

$$G = G_1 + \Delta G \tag{4}$$

in die Rechnung ein, wobei ΔG noch willkürlich bleibt. Man erhält damit für die drei ersten Beobachtungen, die ja im Allgemeinen für die Wahl von a, α, α' wesentlich maßgebend sind, einerseits aus (2)

$$\varphi(m, G) = \varphi(m, G_1) + \frac{\partial \varphi}{\partial G} \Delta G; \qquad m = 1, 2, 3 \tag{5}$$

andererseits aus (3)

$$\psi(m, G) = \psi(m, G_1) + [\alpha + 2\alpha'(G - \nu_m)]\, \Delta G. \qquad m = 1, 2, 3 \tag{6}$$

Die 3 Paare von Größen werden einander gleichgesetzt, dabei ist noch fast immer das Glied mit ΔG in (6) gegen das in (5) zu vernachlässigen, wovon man sich in der Zahlenrechnung leicht überzeugt. So bestimmen sich die 3 Konstanten a, α, α'

aus 3 Gleichungen, jedoch noch nicht als reine Zahlenwerte, sondern einstweilen noch in der Form

$$(7)\qquad \begin{cases} a = a_0 + c_1 \Delta G \\ \alpha = \alpha_0 + c_2 \Delta G \\ \alpha' = \alpha_0' + c_3 \Delta G. \end{cases}$$

Durch diese Bestimmung ist gewährleistet, daß die Kurve ψ unabhängig von der Wahl des ΔG jedenfalls durch die drei ersten Punkte der Kurve φ hindurchgeht, die Serienformel also die drei ersten Glieder genau darstellt. Nun hat man nur noch ΔG so zu wählen, daß für die übrigen Beobachtungen $m = 4, 5 \ldots$ die Summe der Wellenlängen — Fehlerquadrate ein Minimum wird. Dabei ist allerdings zu berücksichtigen, daß die Genauigkeit der einzelnen Messungen m eine verschiedene ist, sie daher mit Gewichten[1])

$$(8)\qquad p_m = \frac{1}{\Delta \lambda_m^2}$$

versehen werden müssen (wobei $\Delta \lambda_m$ wie früher der mögliche Beobachtungsfehler ist).

Man hat also mit $c_m = c_1 + c_2 (G - \nu_m) + c_3 (G - \nu_m)^2$

$$\partial \sum_4^m \left[\frac{\varphi(m G_1) - \psi(m G_1 a_0 \alpha_0 \alpha_0') + \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial G} \right)_m - c_m \right\} \Delta G}{\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \frac{\partial \nu}{\partial \lambda}} \right]^2 \cdot \frac{1}{\Delta \lambda_m^2} = 0$$

oder wegen $\frac{\partial \varphi}{\partial G} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$ und $\varepsilon = \frac{\partial \nu}{\partial \lambda} \Delta \lambda$ auch

$$(9)\qquad \partial \sum_m \left[\Delta G \left(1 - \frac{C m}{\frac{\partial \varphi}{\partial G}} \right) - \frac{\psi(m G_1) - \varphi(m G_1)}{\frac{\partial \varphi}{\partial G}} \right]^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon_m^2} = 0,$$

woraus ΔG vollends leicht zu bestimmen ist.

Durch rechtzeitige Elimination von a vereinfacht sich die praktische Zahlenrechnung.

Eine kleine Berechnung gibt leicht die Abweichungen der berechneten von den beobachteten λ-Werten, also die Genauigkeit der Serienformel.

Natürlich könnte man, anstatt die Kurve ψ streng durch die drei ersten Punkte von φ hindurch zu legen, auch die

1) Vgl. hierüber z. B. Encykl. d. math. Wiss. I. 2. S. 781.

$a\,\alpha\,\alpha'$ willkürlich lassen und sie samt G so bestimmen, daß die Summe der Fehlerquadrate aus *allen* Beobachtungen ein Minimum wird. Infolge der eigentümlichen Rolle, die die Konstanten $a\,\alpha\,\alpha'$ aber in den Formeln spielen, würden sich bei richtiger Gewichtsverteilung dadurch kaum merkliche Abweichungen ihrer Werte ergeben.

§ 8. Prüfung des Verschiebungssatzes an den Alkali- und Erdalkaliserien.

Wie eingangs erwähnt, genügt die Ritzsche Formel bei den Erdalkalien (und schweren Alkalien) nicht zur genauen Seriendarstellung. Es ist daher für die Zwecke dieser Arbeit eine Erweiterung derselben vorgenommen, die Sommerfeld in seinem Buch „Atombau und Spektrallinien“[1]) vorgeschlagen hat.

Um Rückwirkungen des äußeren Elektrons auf das System der inneren Ringe mit in Betracht zu ziehen (die jedoch so gekoppelt sein müssen, daß sich das Problem noch in den zwei Koordinaten $r\,\varphi$ des äußeren Elektrons beschreiben läßt, wobei außerdem φ zyklische Koordinate bleiben soll) ist das Potential des Atominnern auf jenes als eine ganz allgemeine Potenzreihe von $1/r$ angesetzt. Es ergibt sich, wenn p der Überschuß der Kernladungszahl über die der inneren Ringe bezeichnet (so daß im Fall des Bogenspektrums $p = 1$, des Funkenspektrums $p = 2$ zu setzen ist), ein Serienterm der Form:

$$(10) \qquad (m, a) = \frac{p^2 N}{(m + a + \alpha\,(m, a) + \alpha'\,(m, a)^2 + \ldots)^2}$$

Die Gleichung lehrt auf den ersten Blick, daß das Funkenspektrum auch in diesem Fall Termzähler $4N$ haben muß.

Ferner erleiden aber die Koeffizienten a, α, α' des Termnenners einzeln beim Übergang vom Bogen- zum Funkenspektrum charakteristische Veränderungen. Sie sind nämlich Potenzreihen der Größe p:

$$(11) \qquad \begin{cases} a = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots \\ \alpha = \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \ldots \\ \alpha' = \alpha_0' + \alpha_1' p + \alpha_2' p^2 + \ldots \end{cases}$$

1) Zusatz 10, Vieweg, Braunschweig 1919.

Sommerfeld führt a. a. O. die Größe p zwar nicht ein, doch bemerkt er, daß in seinen Ausdrücken für $\alpha\,\alpha'$, die in Potenzen von ϵ^2 ansteigen, beim Übergang vom Bogenspektrum eines Elements zum entsprechenden Funkenspektrum (des nächstfolgenden) überall $2\epsilon^2$ an die Stelle von ϵ^2 zu setzen sei.

Im einfachen Fall ohne Rückwirkung wird $a_0 = 0$. Unterscheidet man die Konstanten des Funkenspektrums durch einen Index * von denen des entsprechenden Bogenspektrums, so ergibt sich bei Vernachlässigung von $a_2 \ldots$ also *die einfache Verdoppelungsregel*:

$$a^* = 2a. \tag{12}$$

War schon in jenem einfachen Fall aber in dieser Regel nur eine genäherte Gesetzmäßigkeit zu sehen, so wird man vollends bei Mitberücksichtigung von Rückwirkungen ($D_1 \neq 0$, $D_3 \neq 0$) nicht erwarten, daß die Formel streng erfüllt ist. *Doch wird man weiterhin in ihr eine angenäherte Beziehung entsprechender Funken- und Bogenspektren sehen. Daß sie sich mit dieser Einschränkung auch in den tatsächlich beobachteten Spektren wieder findet, zeigt die nachstehende Tab. 1, welche die von mir aus den Dubletserien der Alkalien und Erdalkalien berechneten Werte* $\mathfrak{S}\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{B}$ *enthält.* (Im folgenden wird, wie üblich, durch verschiedene Buchstaben zwischen den Konstanten $S\,P\,D\,B$ des Einfachlinien-, $\mathfrak{S}\,\mathfrak{P}_i\,\mathfrak{D}_i\,\mathfrak{B}$ des Dublett- und $s\,p_i\,d_i\,b$ des Triplettsystems eines Elements unterschieden.)

Tabelle 1.

a, a^*	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{P}_1$	$\mathfrak{D}_1$	$\mathfrak{B}$
Na	+ 0,15	+ 0,15	− 0,017	+ 0,001[3])
Mg_+	+ 0,48	+ 0,305	− 0,045	+ 0,0006
K	+ 0,325	+ 0,29	− 0,28	− 0,01
Ca_+	+ 0,70	+ 0,5 ± 0,15	− 0,68	− 0,025
Rb	+ 0,31	+ 0,36	− 0,345	− 0,018
Sr_+	− 0,815	+ 0,61 ± 0,15	− 0,43	− 0,034
Cs	+ 0,45	+ 0,45	− 0,48	− 0,032
Ba_+	+ 0,93	+ 0,75 ± 0,15	− 0,35[1]) / − 0,38[2])	− 0,064
—	—	—	—	—
Ra_+	+ 1,06 ± 0,15	+ 0,96 ± 0,15	− 0,22 ± 0,15	—

1) Aus der Grenze der $\mathfrak{B}$-Serie.
2) Aus Randalls Werten.
3) Aus nur zwei Gliedern.

Wie man sieht, ist bei allen vergleichbaren Serien die Beziehung (12) in erster Annäherung erfüllt. Die Abweichungen lassen sich durchweg durch ein negatives a_0, das an der Verdoppelung nicht teilnimmt, erklären, z. B. im Fall der Terme von Rb-Sr durch $a_0 = -0{,}2$, von Cs-Ba durch $a_0 = -0{,}08$, wenn man a_2 vernachlässigt.

Die Werte $\mathfrak{S}$ *der Tabelle bedeuten die Grenzwerte von* $\sqrt{\frac{p^3 N}{(m\mathfrak{S})}} - m$ *für halbzahlige Laufzahlen* $m = 1{,}5;\ 2{,}5 \ldots$ *Für diese, nicht für* $m = 1,\ 2,\ 3 \ldots$ *ist das Gesetz näherungsweise erfüllt.*

Hierdurch wird also mit großer Wahrscheinlichkeit bestätigt, daß der seither nur konventionellen Halbzahligkeit des s-Terms eine bestimmte physikalische Bedeutung zukommt, die uns selbst freilich noch dunkel ist.

Die Konstanten $a\,\alpha\,\alpha'$ sind nun aber nicht nur von p, sondern weiter von der azimutalen Quantenzahl n der Bahn des Leuchtelektrons abhängig; z. B. gehen in erster Näherung a_0 mit $1/n$, a_1 mit $1/n^3$, a_2 mit $1/n^5$. Es gelingt nun aber nicht, die Abhängigkeit der $\mathfrak{S}\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{B}$ von den Quantenzahlen n im Sinn der Grundthese des Auswahlprinzips in den Zahlen der Tab. 1 wiederzufinden. Das zeigt, daß auch diese Vorstellung von inneren komplaneren Ringen, auf die Rückwirkungen ausgeübt werden, noch zu einfach ist und durch eine bessere ersetzt werden muß. Darauf weist unter anderem schon die einfache Tatsache hin, daß der zu verdoppelnde Anteil a_1 beim $\mathfrak{S}$- und $\mathfrak{P}$-Term positives, beim $\mathfrak{D}$- und $\mathfrak{B}$-Term dagegen negatives Vorzeichen haben muß (letzteres mit Ausnahme von Cs-Ba). Wenn nun aber auch den $a_0\,a_1\,a_2$ in Wirklichkeit andere Bedeutungen als die abgeleiteten, beizulegen sind, so bleibt doch offenbar das Verdoppelungsgesetz in allen Fällen in erster Annäherung gültig, und zwar unabhängig vom Vorzeichen von a.

Die nachstehende Tab. 2 gibt eine ähnliche Aufstellung für die Größen σ, σ^* und δ, δ^*. Für sie war auch schon bei der allereinfachsten Ringvorstellung keine reine Verdoppelung zu erwarten, weshalb hier auch keine Andeutung davon mehr vorhanden ist.

Tabelle 2.

$\alpha\,\alpha^*$	σ	δ_2[1])
Na	− 0,6	+ 0,6
Mg_+	− 0,26	+ 0,265
K	− 1,5	+ 9
Ca_+	− 0,61	+ 0,04
Rb	− 1,87	+ 4,9
Sr_+	− 1,26	− 1,1
Cs	− 2,18	− 1,16
Ba_+	− 1,14	− 2,13

Am wenigsten gut fügen sich allen Seriengesetzmäßigkeiten die $\mathfrak{D}$-Terme, so kommen in ihrer Spalte der Tab. 1 auch die größten Abweichungen vor. Auffallend ist die geringe Verschiedenheit der Größen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{P}$. In der Tat ist sie bei den Alkalien im Mittel verschwindend und bei den Erdalkalien auch wahrscheinlich sehr klein, da bei ihren $\mathfrak{P}$-Werten vermutlich noch positive Korrektionen anzubringen sind (vgl. unten).'

Hieraus und aus der Halbzahligkeit des s-Terms folgt, daß die Grundterme jedenfalls in allen Fällen weit entfernt sind, im Verhältnis 4:1 ($1/1^2$ zu $1/2^2$ wie bei Wasserstoff) zu stehen. Sie müssen verhältnismäßig benachbarten Bahnen entsprechen.

Im einzelnen sind zu Tab. 1 noch folgende Bemerkungen zu machen:

Bei Ca, Sr, Ba ist nur der Term $(2\,\mathfrak{P}_i)$ als Grenze der Nebenserien bekannt, weitere Glieder der Hauptserie dagegen noch nicht gefunden. Nun gibt aber $\sqrt{\frac{4N}{(2\,\mathfrak{P}_i)}} - 2$ keineswegs den Wert $\mathfrak{P}_i$, weil hier der Einfluß der Ritzglieder im Termnenner ja noch sehr groß ist; so ist analog dem Verlauf der anderen Serien eine mögliche Abweichung von $\pm$ 0,15 von jenem Wert in der Tabelle verzeichnet. Nach Analogie der Alkalien gilt wahrscheinlich das +-Zeichen für die anzubringende Korrektion.

1) Die Größe δ ist hier für die zweite (intensivere) Komponente des Dubletsystems berechnet, doch unterscheidet sich δ_1 auch bei den schweren Elementen nur wenig von den angegebenen Werten.

Zu den Zahlen von Magnesium ist zu sagen, daß hier zwar nur drei Glieder der zweiten und zwei Glieder der ersten Nebenserie gemessen sind, daß jedoch Fowler in der Serie mit dem Grundglied $\lambda = 4481$ zweifellos die Bergmannserie $3\,\mathfrak{D} - m\,\mathfrak{B}$, in den „$F$-$P$"-Serien die Kombinationsserien $2{,}5\,\mathfrak{S} - m\,\mathfrak{P}_i$; $3\,\mathfrak{P}_i - m\,\mathfrak{S}$; $3\,\mathfrak{P}_i - m\,\mathfrak{D}$; $4\,\mathfrak{D} - m\,\mathfrak{B}$; $4\,\mathfrak{B} - m\,\mathfrak{B}$ entdeckt hat. Unsere Verdoppelungsregel läßt auch eine oberflächliche Verschiedenheit der ersten Nebenserie bei Mg von denen der übrigen Erdalkalien klar übersehen, die Fowler zu einem Zweifel an seiner Deutung Anlaß gab: Bei Mg ist $2 + \mathfrak{P}$ noch $< 3 + \mathfrak{D}$, daher $(2\,\mathfrak{P}) - (3\,\mathfrak{D}) > 0$, wogegen schon bei Ca, noch mehr aber bei Sr und Ba $2 + \mathfrak{P} > 3 + \mathfrak{D}$ und daher die Termdifferenz $(2\,\mathfrak{P}) - (3\,\mathfrak{D})$ negativ.

Die Kenntnis der Fowlerschen Serien erlaubt uns, bei Mg mit größerer Sicherheit die Konstanten zu berechnen als bei Ca, Sr, Ba, besonders die Werte $\mathfrak{P}_i$ für die hier 3 Terme $(2\,\mathfrak{P}_i)$, $(3\,\mathfrak{P}_i)$ und $(4\,\mathfrak{P}_i)$ bekannt sind. Der Wert $\mathfrak{P}_1$, der sich so in Tabelle 1 ergibt, ist vom Standpunkt des Verdoppelungssatzes sehr befriedigend, worin man eine nachträgliche Bestätigung der Fowlerschen Deutung sehen kann.

Zu den Zahlen von Baryum ist überdies noch eine Bemerkung zu machen. Lorenser hat in seiner Darstellung als Grundglieder der 1. Nebenserie die Werte $\lambda = 10035{,}6 : 10652{,}4 : 12084{,}8$ angegeben mit dem Bemerken, daß für dieselben von Randall ursprünglich drei andere Werte gesetzt waren. In der Tat passen nun aber jene recht schlecht in die Seriendarstellung herein. Nicht nur bekommt die Kurve φ durch sie gleich zu Beginn einen völlig unerklärlichen Knick, sondern vor allem verlangt die Bergmannserie $3\,\mathfrak{D}_i - m\,\mathfrak{B}$ ganz andere Werte der Grenzen. Zudem sind die Werte noch recht zweifelhaft; Randall selbst bezeichnet sie so.[1]) Man wird also trotz der ziemlich genau passenden Schwingungsdifferenz jener Werte sich nach anderen umsehen, wie sie von den Grenzen der Bergmannserie her verlangt werden. (Auch die ursprünglichen Werte von Randall erfüllen dies nicht, haben zudem ungenaue Schwingungsdifferenz.) Da bietet sich aus der

1) H. M. Randall, Kenntnis ultraroter Linienspektren, Ann. d. Phys. 33. S. 745/46. 1910.

Fülle der Baryumlinien ein Paar intensiver Linien, das von verschiedenen Beobachtern[1]) verzeichnet ist:

λ Luft (Rowl.)	7485,41;	$\nu = 13355,7$;	Symbol $3\,\mathfrak{D}_2 - 2\,\mathfrak{P}_1$
	8564,03	11673,6	$3\,\mathfrak{D}_2 - 2\,\mathfrak{P}_2$

Der das „vollständige Dublett" ergänzende Satellit $3\,\mathfrak{D}_1 - 2\,\mathfrak{P}_1$ wäre bei dieser Wahl nicht beobachtet, wie übrigens auch bei Rubidium. Allerdings ist die Schwingungsdifferenz des Paares nicht ganz genau die der Bergmanngrenzen (1682 gegen 1691), doch spricht für seine Wahl jedenfalls, daß es gerade in den Bereich der möglichen Grenzen der Bergmannserie hereinpaßt und daß sich daraus $\mathfrak{P} = -0{,}06$ berechnet, wie es dem Verdoppelungsgesetz entspricht.

In den Zusammenhang dieses Paragraphen gehört noch die Darstellung der Dubletts von Ra, Zn, Cd durch Terme mit dem Zähler 4 N.

Runge[2]) hat bei Ra folgende Dubletts angegeben:

λ Luft	ν	Symbol
3814,58	26215,2	$1{,}5\,\mathfrak{S} - 2\,\mathfrak{P}_1$
4682,36	21356,8	$1{,}5\,\mathfrak{S} - 2\,\mathfrak{P}_2$
5813,85	17200,3	$2\,\mathfrak{P}_1 - 2{,}5\,\mathfrak{S}$
4533,33	22058,9	$2\,\mathfrak{P}_2 - 2{,}5\,\mathfrak{S}$
4436,49	22540,3	$2\,\mathfrak{P}_1 - 4\,\mathfrak{D}_2$
4340,83	23037,1	$2\,\mathfrak{P}_1 - 4\,\mathfrak{D}_1$
3649,75	27399,1	$2\,\mathfrak{P}_2 - 4\,\mathfrak{D}_2$

Die Einordnung in die Haupt- und Nebenserien ergibt sich aus dem Zeemaneffekt der betreffenden Linien, die Wahl der Gliednummer durch Vergleich mit den andern Erdalkalien. Sind die Symbole aber einmal so gewählt, dann verlangen sie notwendig Terme von der ungefähren Größe:

$1{,}5\,\mathfrak{S} = 80000$	$2\,\mathfrak{P}_1 = 53785$	$4\,\mathfrak{D}_1 = 30750$
$2{,}5\,\mathfrak{S} = 36585$	$2\,\mathfrak{P}_2 = 58645$	$4\,\mathfrak{D}_2 = 31250$

und diese wieder ergeben nur mit vervierfachter Rydbergscher Zahl brauchbare Werte der $\mathfrak{S}\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{D}$, die sogar, wie Tab. 1 zeigt, sich sehr gut an die Reihe der Serienkonstanten der Erdalkalien anfügen.

1) Vgl. H. Hermann, Messung der Wellenlängen roter Linien, Ann. d. Phys. **16**. S. 698/99; H. Lehmann, Ultrarote Spektren, Ann. d. Phys. 8. S. 650. 1904; J. M. Eder, Wien. Ber. S. 2300. 1914.

2) A. a. O.

Ähnlich steht es mit den Dubletts von Zn und Cd, die Paschen[1]), weil er mit dem Termzähler N anstatt $4N$ rechnete, noch angab als $0{,}5\,\mathfrak{S} - 1\,\mathfrak{P}_i$; bzw. $1\,\mathfrak{P}_i - 1{,}5\,\mathfrak{S}$. Er tat es allerdings mit Vorbehalt, da sich für diese ungewöhnliche Bezeichnung nur ein Beispiel — der Wasserstoffserien — anführen ließ, das inzwischen auch durch die Theorie hinfällig geworden ist. Glatt geht dagegen die Darstellung mit $4N$. Man erhält *für Zn* die ungefähren Termgrößen:

$$\begin{cases} 1{,}5\,\mathfrak{S} = 159000 & 2\,\mathfrak{P}_1 = 109650 \\ 2{,}5\,\mathfrak{S} = 70600 & 2\,\mathfrak{P}_2 = 110520 \end{cases}$$

$$\text{für Cd:} \begin{cases} 1{,}5\,\mathfrak{S} = 150500 & 2\,\mathfrak{P}_1 = 103880 \\ 2{,}5\,\mathfrak{S} = 67500 & 2\,\mathfrak{P}_2 = 105350, \end{cases}$$

woraus sich noch unter Zugrundelegung Ritzscher Serienformeln die Konstanten $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{P}$ wie folgt schätzen lassen:

Tabelle 3.

a, a^*	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{P}$
Cu	− 0,08	− 0,13 ± 0,15
Zn_+	− 0,15	+ 0,002 ± 0,15
Ag	− 0,026	− 0,11 ± 0,15
Cd_+	− 0,05	+ 0,06 ± 0,15

Die Verdoppelung der Größe $\mathfrak{S}$ ist dabei künstlich aber ohne allen Zwang durch Wahl der Terme herbeigeführt. Die Angaben der $\mathfrak{P}$ sind in allen Fällen wieder sehr unsicher, weil nur die Glieder $(2\,\mathfrak{P}_i)$ bekannt sind, doch stehen sie wenigstens nicht in Widerspruch mit unserer Regel.

Im ganzen genommen darf die Darstellung der Zn-, Cd- und Ra-Dubletts mit 4 N als gesichert gelten.

§ 4. Eine Beziehung zwischen dem Funkenspektrum der Erdalkalien und ihrem eigenen Bogenspektrum. Die Ionisierungsarbeiten zweiter Stufe.

Nachdem nunmehr für die Elemente der II. Spalte (soweit Messungen vorliegen), die Werte der Dublettserienterme aufgestellt sind, *lassen sich aus ihnen die Energien berechnen, die zur zweifachen Ionisierung der Elemente aufgewendet werden müssen.*

1) a. a. O.

Aus den Arbeiten von Wood, Mc Lennan, Davis und Goucher[1]) wissen wir bereits, daß im natürlichen „kalten" Zustand das Leuchtelektron der neutralen Elemente in der Bahn (1,5 S) umläuft, und daß der ihrem Term entsprechende Energiebetrag aufgewendet werden muß, um es dem Atomverband zu entreißen. Bezeichnet man mit W die Energie des neutralen, mit W^+, W^{++} die des einfach, bzw. zweifach ionisierten Atoms, wobei wir noch alle Energiedifferenzen auf $W^{++} = 0$ beziehen, so ist

$$W^+ - W = h \cdot c \; (1{,}5\; S). \tag{23}$$

Für die ionisierten Atome aber bezeichnet der entsprechende Dubletterm (1,5 $\mathfrak{S}$) die Grundbahn des zweiten, nunmehr einzigen äußeren Elektrons, und es ist ganz ähnlich

$$W^{++} - W^+ = - W^+ = h c \; (1{,}5\; \mathfrak{S}). \tag{24}$$

Hieraus berechnet sich die für zweifache Ionisierung aufzuwendende Gesamtenergie zu

$$- W = [(1{,}5\; S) + (1{,}5\; \mathfrak{S})] \cdot h c. \tag{25}$$

Die nachfolgende Tab. 4 gibt eine Zusammenstellung der betreffenden Schwingungszahlen:

Tabelle 4.

	Mg	Ca	Sr	Ba	Ra	Zn	Cd	Hg
1,5 S	61660	49300	45900	?	?	75760	72540	84180
1,5 $\mathfrak{S}$	121270	95700	88850	80650	80000	159000	151000	?
1,5 S + 1,5 $\mathfrak{S}$	182930	145000	134750	?	?	234760	223540	?
$\frac{1,5\; S}{1,5\; \mathfrak{S}}$	0,509	0,515	0,518	?	?	0,477	0,480	?

Die Tabelle enthält nun aber eine unerwartete, höchst einfache Gesetzmäßigkeit: es ist immer nahezu

$$(1{,}5\; S) = \tfrac{1}{2}\,(1{,}5\; \mathfrak{S}). \tag{26}$$

Um dem ionisierten Atom noch das zweite Elektron zu entreißen, muß also doppelt soviel Energie aufgewendet werden, als zur Ionisierung erster Stufe nötig war. Eine so auffallende

1) Vgl. den zusammenfassenden Bericht von Frank und Hertz über Messungen von Resonanz- und Ionisierungspotentialen. Phys. Ztschr. **20.** 1919. Heft 6.

Regel verlangt nach einer modellmäßigen Begründung, die im Nachfolgenden versucht werden soll.

Wie man bei Sommerfeld nachlesen kann[1]), ist für ein Atom, bei dem k Elektronen auf einem Ring oder im „Ellipsenverein" einen Kern der effektiven Kernladung Z_{effektiv} umlaufen, die Energiedifferenz gegenüber der völligen Zerreißung des Systems gegeben durch

$$W = -\,k\,Z_{\text{effektiv}}\,\frac{Nhc}{(n+n')^2}, \tag{27}$$

wenn wieder nn' die Quantenzahlen der Bahnen sind.

So ergibt sich z. B. unter Zugrundelegung des Bohrschen Modells für das neutrale Helium, bei dem 2 Elektronen in gleichem Abstand um einen Kern der Ladung 2 kreisen, wobei sie sich immer diametral gegenüber befinden, die Energie

$$W = -\,2\,(2-s_2)^2\,\frac{Nhc}{(n+n')^2},$$

oder da die „Abschirmungszahl" $s_2 = 0{,}25$ ist

$$W = -\,\frac{49}{8}\,\frac{Nhc}{(n+n')^2}.$$

Für das einfach ionisierte He_+ dagegen ergibt sich bekanntlich

$$W^+ = -\,4\,\frac{Nhc}{(n+n')^2}.$$

Die Differenz $W^+ - W = \frac{17}{8}\,\frac{Nhc}{(n+n')^2}$ liefert die zur Ionisierung erster Stufe erforderliche Energie. *Sie verhält sich zur Ionisierungsarbeit zweiter Stufe W^+ wie $17:32 = 0{,}531$, beträgt also nahezu die Hälfte von jener.*

Es liegt nun nahe, dieses Ergebnis auf die Elemente der II. Spalte zu übertragen, bei denen wir ja ohnehin vermuten, daß zwei ihrer Elektronen auf einem besonderen äußersten Ring angeordnet sind. *Wir hätten hiernach im unerregten Zustand der Atome 2 Elektronen in der Anordnung des Bohrschen neutralen Heliums anzunehmen, die gemeinsam die Grundbahn durchlaufen.* Wird eines von ihnen in höherquantige Bahnen gehoben und fällt dann in die Grundbahn zurück, so strahlt das Atom eine Schwingung der Hauptserie des Einfachliniensystems

1) Vgl. Atombau und Spektrallinien, Kap. 4, § 4. Für den gegenwärtigen Zweck ist die Zerlegung der Quantenzahl in n und n' natürlich unwesentlich.

aus oder das irgend einer anderen Kombination von 1,5 S entsprechende Licht. (Dabei ändert übrigens das zweite Elektron seine Lage auch beträchtlich, ein Fall deutlicher „Rückwirkung"!) Ist es aber dem Atomverband völlig entrissen, so beginnt das Spiel des zweiten Elektrons, dessen Zurückfallen in die Grundbahn jedesmal eine Linie der Dubletthauptserie hervorruft.

Es muß noch bemerkt werden, daß bei He statt des Bohrschen ebensogut ein Doppelsternmodell zugrunde gelegt werden kann, da nach Landé die Energien beider wahrscheinlich nur wenig verschieden sind. Ein gleiches würde wohl auch für die Erdalkalien gelten. Ein Unterschied besteht zwischen diesen und dem Helium aber insofern, als die spektroskopisch erschlossene, für gewöhnlich mit (1,5 S) bezeichnete Bahn bei Helium sicher nicht die Grundbahn ist, während dies für die Bahn (1,5 S) bei den Erdalkalien nach den Absorptions- und Anregungstatsachen sicher ist.

Ob ein ähnlicher, aber nicht so vollkommener Parallelismus zwischen den Termen $2p_2$ des *Triplett*systems und $2\mathfrak{P}_2$ des Dublettsystems

	Mg	Ca	Sr	Ba	Ra	Zn	Cd	Hg
$2p_2$	39790	34090	31420	29350	?	43260	41880	44770
$2\mathfrak{P}_2$	85500	70490	65140	60590	?	110420	106850	?

so gedeutet werden darf, daß dem Term $2p_2$ ein gemeinsames Umlaufen beider Elektronen in einer zweiquantigen Bahn entspricht, die Absorptions- und Resonanzlinie $1{,}5\,S - 2p_2$ also eine gleichzeitige Hebung oder ein gleichzeitiges Zurückfallen beider bedeutet, möge dahingestellt bleiben.

§ 5. Anhang. Über die Brauchbarkeit der erweiterten Ritzschen Formel zur praktischen Berechnung von Spektralserien. Zusammenstellung der Serienterme der Erdalkalien.

Es sei hier noch mitgeteilt, inwieweit die in Gleichung (10) enthaltene Serienformel, die nichts anderes ist als eine Erweiterung der von Ritz angegebenen, sich als praktisch brauchbar erwiesen hat zur Darstellung von Spektralserien.

Sie wurde angewendet auf die Dublettserien der Erdalkalien — deren Terme sind daher in den nachstehenden Tabellen

unsern heutigen Kenntnissen entsprechend vollständig zusammengestellt — sodann auf die zweiten Nebenserien einfacher Linien bei Zn, Cd, Hg, schließlich auf eine erste Nebenserie von Al — alles Serien, die einer genauen Darstellung durch Serienformeln mit Ausnahme der von Johanson gegebenen, sich seither nicht gefügt haben.

Die nachfolgenden Tabellen geben die Resultate dieser Berechnungen, dort sind jeweils die Abweichungen der beobachteten von den nach verschiedenen Formeln berechneten λ-Werten zum Vergleich zusammengestellt.[1]) (Die Berechnungen von Lorenser sind mit der Rydbergschen, von Johanson mit seiner eigenen, von Paschen mit der Ritzschen Serienformel ausgeführt.)

1. Dublettserien der Erdalkalien.

Bei **Mg** hat Fowler folgendes Seriensystem aufgestellt (internationale Wellenlängen in Luft).

	$m=$	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5
$2\mathfrak{P}_1 - m\mathfrak{S}$	$\lambda=$	2795,523	2936,496	1753,3[2])	—	—	—	—
$2\mathfrak{P}_2 - m\mathfrak{S}$		2802,698	2928,625	1750,6[2])	—	—	—	—
$3\mathfrak{P}_1 - m\mathfrak{S}$		—	—	—	4433,991	3553,51	3175,84	2971,1
$3\mathfrak{P}_2 - m\mathfrak{S}$		—	—	—	4427,995	3549,61	3172,79	2969,[illegible]
$4\mathfrak{P}_1 - m\mathfrak{S}$		—	3613,80	—	—	—	—	—
$4\mathfrak{P}_2 - m\mathfrak{S}$		—	3615,64	—	—	—	—	—

	$m=$	3	4	5	6	7	8
$2\mathfrak{P}_1 - m\mathfrak{D}$	$\lambda=$	2797,989	1737,5[2])	—	—	—	—
$2\mathfrak{P}_2 - m\mathfrak{D}$		2790,768	1734,7[2])	—	—	—	—
$3\mathfrak{P}_1 - m\mathfrak{D}$		—	7896,37	4390,585	3538,86	3168,98	2967,87
$3\mathfrak{P}_2 - m\mathfrak{D}$		—	7877,13	4384,643	3535,04	3165,94	2965,19
$4\mathfrak{P}_1 - m\mathfrak{D}$		3848,24	—	—	—	—	—
$4\mathfrak{P}_2 - m\mathfrak{D}$		3850,40	—	—	—	—	—

	$m=$	4	5	6	7	8
$3\mathfrak{D}_1 - m\mathfrak{B}$	$\lambda=$	4481,327	3104,805	2660,821		
$3\mathfrak{D}_2 - m\mathfrak{B}$		4481,129	3104,713	2660,755	2449,573	2329,58
$4\mathfrak{D} - m\mathfrak{B}$		—	—	6346,67	5264,14	4739,59
$4\mathfrak{B} - m\mathfrak{B}$		—	—	6545,80	5401,05	4851,10

	$m=$	9	10	11	12
$3\mathfrak{D}_1 - m\mathfrak{B}$					
$3\mathfrak{D}_2 - m\mathfrak{B}$	$\lambda=$	2253,87	2202,68	2166,28	—
$4\mathfrak{D} - m\mathfrak{B}$		4436,48	4242 47	4109,54	4013,80
$4\mathfrak{B} - m\mathfrak{B}$		4534,26	4331,98	4193,44	4093,90

1) $\Delta\lambda$ bedeutet immer $\lambda_{\text{beob.}} - \lambda_{\text{berechn.}}$

2) Alte Messungen von Lyman in Rowlands System.

Daraus ergeben sich, nach Reduktion aufs Vakuum, die nachfolgenden Terme, die innerhalb der angegebenen Genauigkeit durch die Formel (10) dargestellt werden mit

$$N_{\text{Mg intern}} = 109734{,}7:$$

m	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5
$m\,\mathfrak{S}$	121265,3	51459,6	28490,1	18065,1	12480,3	9136,5	6978,7

Es ergeben sich Abweichungen

$\Delta\lambda$	0	0	− 0,05	0	+0,007	+0,007	− 0,02

bei Berechnung

mit $\mathfrak{S} = +\,0{,}43396$; $\sigma = -\,0{,}26061\cdot10^{-6}$; $\sigma' = +\,0{,}0011805\cdot10^{-11}$

m	2	3	4
$m\,\mathfrak{P}_1$	85504,1	40614,6	23795,4
$m\,\mathfrak{P}_2$	85595,6	40645,3	23809,7
$\Delta\lambda$	0	0	0

mit $\mathfrak{P}_1 = +\,0{,}30487$ $\quad \pi_1 = -\,0{,}40182\cdot10^{-6}$ $\quad \pi_1' = -\,0{,}0646\cdot10^{-11}$

m	3	4	5	6	7	8
$m\,\mathfrak{D}_1$	49773,52	27953,9	17844,8	12364,9	9067,9	6930,2
$m\,\mathfrak{D}_2$	49774,48					
$\Delta\lambda$	0	0	0	−0,0003	−0,008	−0,03

mit $\mathfrak{D} = -\,0{,}04536$ $\quad \delta = +\,0{,}2650\cdot10^{-6}$ $\quad \delta' = +\,0{,}08208\cdot10^{-11}$

m	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$m\,\mathfrak{B}$	27468,8	17574,4	12200,3	8961,4	6860,6	5419,9	4389,5	3627,3	3047,9
$\Delta\lambda$	0	0	0	+0,0005	+0,008	−0,003	−0,005	−0,01	−0,007

mit $\mathfrak{B} = +\,0{,}00060$ $\quad \beta = -\,0{,}266\cdot10^{-6}$ $\quad \beta' = +\,0{,}549\cdot10^{-11}$

Bei den $\mathfrak{B}$-Termen beziehen sich die $\Delta\lambda$ nicht auf eine einzelne der drei beobachteten $\mathfrak{B}$-Serien, sondern auf die Differenz ihrer mittleren Termzahlen gegen die berechneten. In Wellenlängen sind sie umgerechnet für die Grenzen $4\,\mathfrak{D}$ oder $4\,\mathfrak{B}$, für $3\,\mathfrak{D}$ werden sie noch kleiner.

Die relativ großen Abweichungen von den Lymanschen Messungen ($3{,}5\,\mathfrak{S}$ und $4\,\mathfrak{D}$, letztere hier nicht benutzt) liegen durchaus innerhalb der Fehlergrenzen dieser alten Werte.

Bei den übrigen Erdalkalien kennen wir nur die beiden Nebenserien und die Bergmannserie, eine Seriendarstellung lohnt sich für die letzteren nicht. Die Wellenlängen sind hier in Rowlands System

Ca $N_{\text{Ca Rowl.}} = 109731{,}7.$ Grenzen: $\mathfrak{P}_1 = 70305{,}7$, $\mathfrak{P}_2 = 70528{,}7$

m	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
$\lambda(2\,\mathfrak{P}_1 - m\,\mathfrak{S})$	3933,63	3737,08	2208,95	1851,3	1698,9
$\lambda(2\,\mathfrak{P}_2 - m\,\mathfrak{S})$	3968,63	3706,18	2198,03	1843,8	1692,4
$m\,\mathfrak{S}$	95719,2	43554,2	25048,2	16291,2	11443,2
$\Delta\lambda_{\text{Lorenser}}$	−259	0	0	+0,2	−0,2
$\Delta\lambda_{\text{Johanson}}$	0	0	0	+0,14	+0,17
$\Delta\lambda_{\text{Fues}}$	0	0	0	+0,02	+0,013

mit $\mathfrak{S} = +\,0{,}70140$ $\quad \sigma = -\,0{,}60714\cdot10^{-6}$ $\quad \sigma' = -\,0{,}0207\cdot10^{-11}$

m	3	4	5	6	7
$\lambda(2\mathfrak{P}_1 - m\mathfrak{D}_2)$	8498,35	3181,4	—	—	—
$\lambda(2\mathfrak{P}_1 - m\mathfrak{D}_1)$	8542,47	3179,45	2113,01	1815,0	1680,5
$\lambda(2\mathfrak{P}_2 - m\mathfrak{D}_2)$	8662,50	3158,98	2103,47	1807,8	1674,1
$m\mathfrak{D}_1$	82008,7	38862,7	22994,5	15209,7	10799,7
$\Delta\lambda$ Lorenser	−2195	0	0	−0,08	−0,76
$\Delta\lambda$ Johanson	0	0	0	−0,38	−0,61
$\Delta\lambda$ Fues	0	0	0	−0,003	−0,02
mit	$\mathfrak{D}_1 = -0{,}62686$	$\delta_1 = +0{,}0459 \cdot 10^{-6}$		$\delta_1' = -0{,}9441 \cdot 10^{-11}$	
$m\mathfrak{D}_2$	82069,5	38891,9	23002,9	15212,7	10795,7
$\Delta\lambda$ Lorenser			wie bei $m\mathfrak{D}_1$		
$\Delta\lambda$ Johanson	0	0	0	−0,27	−0,47
$\Delta\lambda$ Fues	0	0	0	−0,01	−0,08
mit	$\mathfrak{D}_2 = -0{,}62755$	$\delta_2 = +0{,}0408 \cdot 10^{-6}$		$\delta_2' = -0{,}9389 \cdot 10^{-11}$	

m	4	5	6	7
$\lambda(3\mathfrak{D}_1 - m\mathfrak{B})$	1840,2	1555,1	1434,3	1370,6
$\lambda(3\mathfrak{D}_2 - m\mathfrak{B})$	1838,0	1553,5	1433,1	1369,1
$m\mathfrak{B}$	27666	17702	12290	9039

Sr $N_{\text{Sr Rowl.}} = 109732{,}5$.

Grenzen: $2\mathfrak{P}_1 = 64339$, $2\mathfrak{P}_2 = 65139$

m	1,5	2,5	3,5	4,5
$\lambda(2\mathfrak{P}_1 - m\mathfrak{S})$	4077,88	4305,60	2471,71	2053,3
$\lambda(2\mathfrak{P}_2 - m\mathfrak{S})$	4215,66	4161,95	2423,67	2020,5
$m\mathfrak{S}$	88854,7	41119,1	23892,8	15657,0
$\Delta\lambda$ Lorenser	−300	0	0	+0,93
$\Delta\lambda$ Johanson	0	0	0	+0,15
$\Delta\lambda$ Fues	0	0	0	+0,02
mit	$\mathfrak{S} = +0{,}81486$	$\sigma = -1{,}2585 \cdot 10^{-6}$		$\sigma' = +0{,}2482 \cdot 10^{-11}$

m	3	4	5	6	7
$\lambda(2\mathfrak{P}_1 - m\mathfrak{D}_2)$	10038,3	3475,01	2324,60	—	—
$\lambda(2\mathfrak{P}_1 - m\mathfrak{D}_1)$	10328,3	3464,58	2322,47	1995,7	1847,0
$\lambda(2\mathfrak{P}_2 - m\mathfrak{D}_2)$	10915,0	3880,89	2282,14	1965,2	1820,0
$m\mathfrak{D}_1$	74018,5	35483,6	21294,4	14247,0	10197,0
$\Delta\lambda$ Lo enser	−5945	0	0	+1,3	−0,06
$\Delta\lambda$ Fues	0	0	0	−0,01	−0,06
mit	$\mathfrak{D}_1 = -0{,}43277$	$\delta_1 = -1{,}0633 \cdot 10^{-6}$		$\delta_1' = -0{,}9718 \cdot 10^{-11}$	
$m\mathfrak{D}_2$	74298,2	35569,7	21333,8	14270,0	10194,0
$\Delta\lambda$ Fues	0	0	0	−0,003	−0,1
mit	$\mathfrak{D}_2 = -0{,}43664$	$\delta_2 = -1{,}0814 \cdot 10^{-6}$		$\delta_2' = -0{,}9475 \cdot 10^{-11}$	

m	4	5	6
$\lambda(3\mathfrak{D}_1 - m\mathfrak{B})$	2166,11	1778,8	1620,7
$\lambda(3\mathfrak{D}_2 - m\mathfrak{B})$	2152,82	1769,8	1613,3
$m\mathfrak{B}$	27865	17798	12315

Ba $N_{\text{Ba Rcwl.}} = 109732{,}7$. Grenzen: $2\mathfrak{P}_1 = 58703{,}6$, $2\mathfrak{P}_2 = 60394{,}6$

m	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
$\lambda(2\mathfrak{P}_1 - m\mathfrak{S})$	4554,21	4900,13	2771,51	2286,2	2082,8
$\lambda(2\mathfrak{P}_2 - m\mathfrak{S})$	4934,24	4525,19	2647,40	2201,07	—
$m\mathfrak{S}$	80655,4	38301,9	22632,1	14976,1	10706,3
$\Delta\lambda$ Lorenser	−254	0	0	+1,18	+0,72
$\Delta\lambda$ Fues	0	0	0	−0,02	+0,2

mit $\mathfrak{S} = +0{,}93010$ $\sigma = -1{,}14053$ $\sigma' = -0{,}04093$

m	3[1]	3[2]	4	5	6	7
$\lambda(2\mathfrak{P}_1 - m\mathfrak{D}_2)$	7485,41	10635,6	4166,24	2641,51	2235,5	—
$\lambda(2\mathfrak{P}_1 - m\mathfrak{D}_1)$	—	10052,4	4130,88	2634,91	2232,8	2055,0
$\lambda(2\mathfrak{P}_2 - m\mathfrak{D}_2)$	8564,03	12084,8	3891,97	2528,52	2154,02	1987,8
$m\mathfrak{D}_1$	71489,6	68088,7	34502,4	20762,8	13930,2	10056,9
$\Delta\lambda$ Lorenser	—	+820	0	0	0	+0,8
$\Delta\lambda$ Fues	0	(0)	0	0	−0,01[3]	+0,1[3] +0,2[4] +0,3[5]

mit $\mathfrak{D}_1 = \begin{matrix} -0{,}3573\,[1] \\ -0{,}33349\,[2] \end{matrix}$ $\delta_1 = \begin{matrix} -2{,}1065\,[1] \\ -3{,}9374\,[2] \end{matrix} \cdot 10^{-6}$ $\delta_1' = \begin{matrix} -0{,}2841\,[1] \\ +3{,}0321\,[2] \end{matrix} \cdot 10^{-11}$

$m\mathfrak{D}_2$	72066,6	68666,4	34707,8	20855,5	13984,3	10103,7
$\Delta\lambda$ Fues	0	(0)	0	0	+0,006[1]	+0,1[3] +0,3[4] +0,3[5]

mit $\mathfrak{D}_2 = \begin{matrix} -0{,}3670\,[1] \\ -0{,}34319\,[2] \end{matrix}$ $\delta_2 = \begin{matrix} -2{,}1302\,[1] \\ -3{,}9492\,[2] \end{matrix} \cdot 10^{-6}$ $\delta_2' = \begin{matrix} -0{,}2289\,[1] \\ +3{,}0252\,[2] \end{matrix} \cdot 10^{-11}$

m	4	5	6
$\lambda(3\mathfrak{D}_1 - m\mathfrak{B})$	2335,33	1869,2	1694,3
$\lambda(3\mathfrak{D}_2 - m\mathfrak{B})$	2304,32	1849,5	1677,9
$m\mathfrak{B}$	28682	17995	12469

2. Zweite Nebenserien der Einfachliniensysteme von Zn, Cd, Hg.[3]

Zn $N_{\text{Zn Rowl.}} = 109732{,}3$. Grenze: $2P = 29018{,}05$.

m	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
$\lambda(2P - mS)$	2138,67	11055,4	5182,175	4298,54	3966	3799
mS	75763,2	19976,7	9727,0	5762,4	3812,6	2703,6
$\Delta\lambda$ Paschen	−445	0	+0,075	0	+0,1	−0,6
$\Delta\lambda$ Johansen	0	0	+0,24	−0,12	+0,36	−0,02
$\Delta\lambda$ Fues	0	0	0	−0,01	+0,25	−0,4

mit $S = -0{,}130094$ $\sigma = -0{,}99390 \cdot 10^{-6}$ $\sigma' = -1{,}58767 \cdot 10^{-11}$

---

1) Das von mir S. 17 vorgeschlagene Paar.

2) Randalls Werte.

3) Vgl. die Arbeiten von F. Paschen, Ann. d. Phys. 30. S. 746. 1909 und 35. S. 860. 1911.

Cd $N_{\text{Cd Rowl.}} = 109732{,}7$. Grenze: $2P = 28843{,}71$.

m	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5
$\lambda(2P-mS)$	2288,10	10395,17	5154,85	4306,98	3981,92	3819	3723
mS	72534,9	19226,4	9449,8	5632,1	3737,3	2666,4	1990,8
$\Delta\lambda_{\text{Paschen}}$	−523	0	−0,8	0	−0,36	+0,4	−0,4
$\Delta\lambda_{\text{Johansen}}$	0	0	−0,01	+0,01	−0,15	+0,8	+0,2
$\Delta\lambda_{\text{Fues}}$	0	0	0	+0,02	−0,3	+0,4	−0,3

mit $S = -0{,}077419$ $\sigma = -1{,}41695 \cdot 10^{-6}$ $\sigma' = -1{,}70734 \cdot 10^{-11}$

Hg $N_{\text{Hg Rowl.}} = 109732{,}9$. Grenze: $2P = 30113{,}56$.

m	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
$\lambda(2P-mS)$	1849,0	10140,58	4916,19	4108,17	3801,78
mS	84178,0	20253,6	9776,2	5777,3	3816,2
$\Delta\lambda_{\text{Paschen}}$	−418	0	−0,89	0	0
$\Delta\lambda_{\text{Fues}}$	0	0	0	+0,01	−0,07

mit $S = -0{,}130794$ $\sigma = -1{,}84572 \cdot 10^{-6}$ $\sigma' = -1{,}01727 \cdot 10^{-11}$

3. Erste Nebenserien von Aluminium.

Al $2P_i - m\mathfrak{D}_k$. Die Fehler werden ungefähr von der Größe:

m	3	4	5	6	7	8	9
$\Delta\lambda_{\text{Johanson}}$	0	0	0	0	+0,1	+0,2	−0,1
$\Delta\lambda_{\text{Fues}}$	0	0	0	−2	−2,2	−2,1	−2

Das Ergebnis ist, daß im Fall der Erdalkalien und bei den Serien von Zn, Cd, Hg die von mir benutzte Formel durch die Einführung einer weiteren Konstanten den Anschluß nicht nur wesentlich verbessert, sondern innerhalb der Beobachtungsfehler zu einem völligen macht. Und daß sie in diesen Fällen auch der Johansonschen Formel (mit ebensoviel Konstanten) überlegen ist. Im Fall von Al indessen paßt die Johansonsche Formel wesentlich besser.

Johanson hat gezeigt, daß im Fall dieser Al-Serie gerade die Reihenentwicklung, die sich aus seiner Formel ergibt und die unserer Reihe (1′) (S. 7) analog ist, besonders schlecht konvergiert. Man kann dies meiner Meinung nach so auffassen, daß auch der Ansatz dieser Arbeit bei Hinzunahme eines weiteren Gliedes wohl eine befriedigende Übereinstimmung ergeben kann. In allen anderen Fällen aber, in denen die Reihe

besser konvergiert, darf nach den gemachten Erfahrungen erwartet werden, daß schon die hier vorgeschlagene theoretisch begründete Erweiterung der Ritzschen Formel eine wesentliche Verbesserung der Seriendarsteliung ergibt.

München, Institut für theoretische Physik.
Januar 1920.

(Eingegangen 5. Februar 1920.)

2. *Untersuchungen am kontinuierlichen Röntgenspektrum der Glühkathodenröhre: die Abhängigkeit der Grenzstrahlung vom Emissionsazimut und der Einfluß des Metalls der Antikathode;*

von Gustav Zecher.

(Frankfurter Dissertation.)

(Hierzu Tafel I.)

Inhaltsübersicht: 1. Einleitung. — 2. Die Glühkathodenröhre und ihr Betrieb. — 3. Die kurzwellige Grenze des kontinuierlichen Spektrums. — 4. Die Berechnung der Wellenlänge. — 5. Die Azimutversuche. — 6. Die Theorie der Bremsstrahlung und die Dissymmetrie der Härte. — 7. Der Dopplereffekt des kontinuierlichen Röntgenspektrums, die Existenz einer Bremsstrahlung. — 8. Untersuchungen über die Abhängigkeit der Grenzwelle des kontinuierlichen Spektrums vom Metall der Antikathode. — Zusammenfassung.

1. *Einleitung.* — Die spektrale Zerlegung der Röntgenstrahlung durch Interferenzreflexion an den Netzebenen eines Kristalles nach der von Bragg geschaffenen Methode entwirft ein Spektrum kontinuierlich verteilter Wellenzüge und gewisser in Serien auftretender Linien. Die Entstehung des Linienspektrums, der Linien der K-L-M-Serien, ist durch die Quantentheorie geklärt worden. Die Energie des primären Kathodenstrahlelektrons wird im Atomverband des Metalles der Antikathode absorbiert, und die Atomelektronen sind die Erzeuger der Linienstrahlung, der Eigenstrahlung des Antikathodenmaterials. Über die Entstehung des kontinuierlichen Spektrums sind die Ansichten noch geteilt. Die alte Wiechert-Stokessche Ätherstoßtheorie spricht diese Strahlung als Ätherimpulse an, Induktionsstöße, die bei der Bremsung des Kathodenstrahlelektrons an der Antikathode durch die Vernichtung seines elektromagnetischen Feldes hervorgerufen werden. Demzufolge nimmt man auch noch heute an, daß die kontinuierliche Strahlung ihren Ursprung in der Bremsung

des primären Kathodenstrahlelektrons hat (Bremsstrahlung). Die andere Auffassung[1]) geht dahin, daß auch hier Elektronen des Atomverbandes die Oszillatoren sind, die die kontinuierliche Strahlung erzeugen. In diesem Falle ist die Möglichkeit einer Abhängigkeit vom Metall der Antikathode ersichtlich; aber auch im ersten Falle ist es ebenso denkbar, daß die Beschaffenheit der Atome des Antikathodenmetalls einen Einfluß auf die Art des Bremsvorganges ausübt. Lilienfeld[2]) nimmt hingegen an, daß, wenigstens in der Lilienfeldröhre, die Bremsung des Kathodenstrahles in einer elektrischen Doppelschicht vor der Antikathode erfolgt. Er schloß daraus auf eine Unabhängigkeit der kontinuierlichen Strahlung vom Antikathodenmetall, wenn er auch in einer zweiten Arbeit[3]) zu dem Eingeständnis gelangte, daß unbekannte Einflüsse, etwa die Art des Unterbrechungsvorganges, mitspielen können und einen richtigen Schluß zurzeit noch nicht zulassen. Wenn er dann in einer neueren Veröffentlichung[4]) ohne weiteres bemerkt, „der kontinuierliche Hintergrund aber hängt *nicht nur vom Metall der Antikathode*, sondern in erster Linie von den Entladungsbedingungen (Spannung, Stromstärke usw.) ab", so ist das unverständlich und nur eine persönliche Ansicht ohne jeglichen Beweis. In bezug auf die Entstehung der kontinuierlichen Strahlung vertritt er in dieser letzten Arbeit die Ansicht, daß sie aus der Annahme eines Schwingungsvorganges der Elektronen der Doppelschicht zu erklären sei, einer Art Temperaturbewegung dieser Schichtelektronen, die durch den Aufprall der Kathodenstrahlen genährt wird. Er nennt diese Strahlung „Schichtstrahlung" gegenüber der alten „Bremsstrahlung" und stellt das Vorhandensein einer Bremsstrahlung überhaupt in Frage. „Die gegenwärtige Sachlage ist vielmehr die, daß der strenge Beweis für die Existenz einer Bremsstrahlung überhaupt erst erbracht werden müßte."

Eine notwendige Folge der Bremstheorie ist, wie zuerst W. Wien[5]) zeigte, eine unsymmetrische Verteilung der Inten-

1) D. L. Webster, Phys. Rev. 7. S. 599. 1916.
2) J. E. Lilienfeld, Physik. Zeitschr. 19. S. 263. 1918.
3) J. E. Lilienfeld, Physik. Zeitschr. 19. S. 514. 1918.
4) J. E. Lilienfeld, Fortschr. a. d. Geb. d. Röntgenstr. 26. S. 393. 1919.
5) W. Wien, Ann. d. Phys. 18. S. 999. 1905.

sität und Härte der Bremsstrahlung in bezug auf die Richtung, in der die Strahlung die Antikathode verläßt. In der Literatur wird der Winkel des austretenden Röntgenstrahls allgemein von der Richtung der über die Antikathode verlängerten Kathodenstrahlen aus gemessen und kurz Emissionsazimut genannt. Legt man durch den Brennfleck der Antikathode eine Normalebene zum Kathodenstrahl, so ist die Strahlung auf der Kathodenseite weicher und weniger intensiv als auf der Rückseite dieser Ebene. Die Strahlung ist unter kleinen Emissionsazimuten kurzwelliger als unter größeren Azimuten. Die vorliegende Untersuchung will sich mit der Frage der Härteverteilung befassen (vgl. Fig. 4).

Es liegt eine Reihe älterer Arbeiten[1]) vor, die mit Hilfe von Absorptionsmessungen die Bestätigung der Theorie zu erweisen suchen. Der erste experimentelle Befund stammt von Stark. Seine Resultate sind durch eine spätere Arbeit seines Schülers Kirschbaum berichtigt. Kirschbaum findet, daß das Verhältnis der Absorptionskoeffizienten für die Azimute 80° und 120° nur wenig unterhalb 1 bleibt. Er macht die eigentümliche Beobachtung, daß die Dissymmetrie bei geringen Spannungen, wenn auch nur gering, so doch vorhanden, bei Spannungen von 32000 Volt und höher aber nicht mehr nachweisbar und in Frage gestellt ist. Das ist aber in keiner Weise mit der Theorie in Einklang zu bringen. Sie verlangt im Gegenteil eine Zunahme der Dissymmetrie mit der Geschwindigkeit des Kathodenstrahls. Bei Kirschbaums Versuchen war in einer Horizontalebene durch den Kathodenstrahl eine Filmkassette um die Röntgenröhre gelegt. Der Film war in seinem oberen und unteren Drittel mit einer Aluminiumschicht von maximal 0,815 mm Dicke, in der Mitte nur von einer Papierschicht bedeckt. Es wurde die Schwärzungsdifferenz des inneren und äußeren Drittels gemessen und mit Hilfe einer wenig zusagenden Methode daraus auf die Absorptionskoeffizienten geschlossen. Die Schwärzungsdifferenzen werden wohl durch den Einfluß der Streustrahlung der Filmkassette verdeckt sein, und dadurch wird sich das Verhältnis der Absorptionskoeffizienten zu niedrig erwiesen haben. Von

1) J. Stark, Physik. Zeitschr. **10**. S. 580. 1909. — W. Friedrich, Ann. d. Phys. **39**. S. 394. 1912. — H. Kirschbaum, Ann. d. Phys. **46**. S. 85. 1915. — M. Lang, Ann. d. Phys. **53**. S. 279. 1917.

den mitgeteilten Versuchen spricht nur einer bei Kohleantikathode zugunsten der unsymmetrischen Härteverteilung. Die Versuche erscheinen dadurch wenig beweiskräftig.

Friedrich[1]) mißt bei 45000 Volt mit Hilfe einer elektrischen Methode die prozentuale Absorption in einem Glasplättchen von 0,666 mm Dicke und in einem Aluminiumplättchen von 0,0025 mm Dicke. Er findet die Absorption in Nähe der Kathode nur wenig größer als auf der Antikathodenseite. Die Strahlung ist unter kleinen Azimuten also ein wenig härter. Friedrich gibt kein Verhältnis der Absorptionskoeffizienten an, da seine Versuche nur qualitativen Charakter beanspruchen.

M. Lang[2]) findet, daß die Intensitätsquotienten $\frac{J\,90^0}{J\,110^0}$ bei wachsender Ausfilterung der Strahlung durch Aluminiumfilter von 1—6 mm Dicke zunehmen, d. h. also, daß die Strahlung unter 90° Azimut intensiver, daher weniger absorbierbar, kurzwelliger ist. Eine Isolierung der Endstrahlung durch weitgehende Filterung ist auch hier nicht durchgeführt. Die Versuche sollten ebenfalls nur orientierenden Charakter haben.

E. Wagner[3]) ist in seiner Präzisionsmessung des Planckschen Wirkungsquantums durch Bestimmung der Grenzwelle einer Röntgenröhre und der zugehörigen Spannung auf Grund der Einsteinschen Formel für die Grenzstrahlung

$$eV = h\nu = h \cdot \frac{c}{\lambda_G}$$

von neuem die Frage aufgedrängt worden, ob sich die Grenzwelle λ_G bei einer konstanten Spannung mit der Emissionsrichtung ändert. Das würde in verschiedenen Azimuten eine verschiedene Größe des Wirkungsquantums h ergeben oder eine Berichtigung oder Einschränkung der Einsteinschen Formel erfordern. Die bisher gemachten erwähnten Versuche sind seiner Ansicht nach nicht maßgebend. Die alte Absorptionsmethode ist ja nur in der Lage einen gewissen Wellenbereich auszufiltern und einen mittleren Absorptionsindex dieser *Endstrahlung* zu geben. Es ist sehr leicht möglich, daß

1) A. a. O. S. 416.
2) A. a. O. S. 343.
3) E. Wagner, Ann. d. Phys. 57. S. 468. 1918.

durch eine Unsymmetrie in der Intensitätsverteilung die beobachteten Effekte vorgetäuscht sind und die Grenzwelle sich unabhängig vom Azimut erweist. Wagner weist darauf hin, daß eine Entscheidung nur durch spektrale Zerlegung bei hohen Spannungen gebracht werden kann.

Die vorliegende Untersuchung hatte sich als Ziel gesetzt, eine Nachprüfung dieser Frage für Spannungen bis 80000 Volt durch Isolierung der *Grenzstrahlung* auf spektrographischem Wege vorzunehmen, und als zweites, einen Beitrag zur Frage ihrer Abhängigkeit vom Antikathodenmetall zu geben.

Ermöglicht wurden die Untersuchungen durch die überaus zuvorkommende Unterstützung der Veifa-Werke zu Frankfurt a. M., die zwei Coolidgeröhren mit Wolfram- und Molybdänantikathode, zwei Seemannsche Schneidenspektrographen sowie einen großen Teil der erforderlichen Apparatur zur Verfügung stellten.

2. *Die Glühkathodenröhre und ihr Betrieb.* — Die gasfreie Röntgenröhre zeichnet sich der gewöhnlichen gegenüber aus durch die Konstanz ihres Betriebes und durch die bequeme Regulierung von Härte und Intensität. Die Härte der Röhre ist bedingt durch die angelegte Spannung; die Intensität des Röhrenstromes läßt sich mit Hilfe des Heizstromes der Glühkathode beliebig variieren. Außer dem Fortfall der unsicheren Regeneriervorrichtung ist besonders bei einem Dauerbetrieb der Wegfall der lästigen Kühlung angenehm. Sie wird allein durch die Wärmeausstrahlung des massiven Antikathodenklotzes erzielt, wenn dieser dabei auch in Weißglut gerät.

Es standen zwei Röhren zur Verfügung. Röhre 1 war eine Coolidgeröhre der A.-E.-G. mit Molybdänantikathode. Als die Röhre von der Fabrik geliefert wurde, hatte sie bereits einen so dichten metallischen Beschlag des leicht zerstäubenden Molybdäns, daß die intensiv beleuchtete Antikathode unter kathodennahen Winkeln nicht mehr durch die Röhrenwand zu erkennen war. Es wurde befürchtet, daß durch den metallischen Beschlag leicht ein Durchschlag erfolgen könne; aber die Röhre hat einen Betrieb von über 110 Stunden mit 80000 Volt Spannung und 1,0 Milliamp. Röhrenstrom zur Zufriedenheit ausgehalten und arbeitet noch hervorragend ruhig und konstant. Während des Betriebs

wurde die Antikathode intensiv weißglühend. Bei längerer Bestrahlung wurde jedoch zur Schonung der Röhre öfters, meist nach einer halben Stunde, ausgeschaltet und Abkühlen der Röhre abgewartet.

Röhre 2 war eine für die Azimutversuche mit zurückgebogenem Anodenhals von der A.-E.-G. gebaute und ebenfalls von den Veifa-Werken zur Verfügung gestellte Wolframröhre. Sie ist nach einem 40stündigen Betrieb bei Versuchen mit 120000 Volt durchgeschlagen. Die erwünschten Azimutversuche mit sehr hohen Spannungen wurden dadurch unmöglich gemacht.

Versuchsanordnung.

Die Versuchsanordnung zeigt Fig. 1.

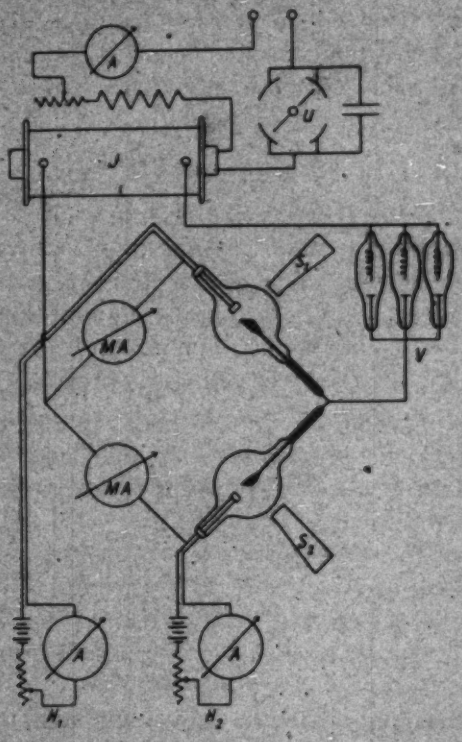
Die Spannung wurde erzeugt durch ein großes Induktorium, betrieben mit Gleichstrom und einem Gasunterbrecher der Veifa-Werke. Der Motor des Gasunterbrechers lief mit 240 Volt und gab bei voller Belastung eine Zahl von durchschnittlich 45—50 Unterbrechungen in der Sekunde. Eine Konstanz der Spannung war nicht wesentlich, da es sich bei den Versuchen nur um Vergleichsmessungen handelt. Regulierung auf konstante primäre Stromstärke durch einen Feinregulierwiderstand und auf konstanten Elektronenstrom in der Röhre durch Veränderung des Heizstromes der Glühkathode genügte vollauf. Die primäre Stromstärke betrug 5,4 Amp. Eine genaue Regulierung des Röhrenstromes war erforderlich, weil sich mit der Belastung des Induktors die der Röhre aufgezwungene Spannung wesentlich ändert.

Die Heizung der Glühkathoden geschah in Ermangelung von Heiztransformatoren durch Akkumulatoren, die auf einem Isoliertisch aufgestellt waren. Handlich und dauerhaft, für einen Dreistundenbetrieb mit 4 Amp. geeignet, sind die 6 Volt-Militärakkumulatoren. Die Regulierung des Heizstromes der auf Kathodenpotential stehenden Akkumulatoren geschah durch einen Widerstand, der durch einen isolierten Handgriff während des Betriebes betätigt werden konnte.

Um gleiche Röhrenströme bei den gleichen Spannungen zu erzeugen, sind in verschiedenen Röhren verschiedene Heizströme erforderlich. Sie schwankten zwischen 3,6 und 4,8 Amp. bei 1 Milliamp. Röhrenstrom, so daß es später bei dem gleich-

zeitigen Betrieb parallel geschalteter Röhren unumgänglich war, zwei Heizvorrichtungen zu verwenden, die übereinander auf denselben Isoliertisch gebaut, bequem regulierbar waren.

Zur Unterdrückung der Schließungsinduktion wurde eine Ventilröhre in den Sekundärkreis eingeschaltet. Sie hatte



A = Amperemeter; H = Heizapparatur; J = Induktor; MA = Milliamperemeter; S = Spektrograph; U = Gasunterbrecher; V = Ventilröhre.

Fig. 1.

unangenehm hohen Widerstand, war aber bei der starken Beanspruchung der Glühkathodenröhre zur Vermeidung eines verkehrten Impulses unerläßlich, obgleich bei zeitweiligem Betrieb der Röhre ohne jede Gleichrichtervorrichtung bei weißglühender Antikathode in einer Glimmlichtröhre keine Spur eines verkehrten Impulses zu erkennen war. Dauerbetrieb ohne Ventilröhre ist aber zu gewagt.

Die spektrale Zerlegung der Strahlung erfolgte durch zwei gleichgebaute Seemannsche Schneidenspektrographen[1]) mit Goldkante. Der Abstand der Schneide von der Antikathode betrug meist 19,5 cm, der Abstand des Apparates von der Röhre 4 cm. Bei größerer Annäherung war Funkenübergang zwischen Röhre und Spektrograph zu befürchten. Der Abstand Schneide—photographische Platte betrug 16 cm. Photographische Platte und die unter 0° einfallende Strahlung bildeten einen Winkel von 80°.

Die beiden verwandten Kristalle waren Steinsalzkristalle. Kristall 1 hatte eine Beschädigung erlitten. An der durch Schlag getroffenen Stelle war die Struktur stark verworfen, so daß sich auf den Spektrogrammen linienartige Schatten parallel zu den Linien abbildeten. Es ließen sich aber an dem unbeschädigten Ende einwandfreie Stellen finden, die die Linien der K-Serie hervorragend aufspalteten. Auf den Platten war auch die Absorptionsbandkante des Molybdäns deutlich zu erkennen.

Die verwandten Platten waren Röntgenspezialplatten 4,5 × 6 von Schleussner in Einzelpackung. Die Platten waren gut, nur genügte die Packung der Firma nicht. Es war erforderlich, die Umhüllung zu verkleben, da die Platten sonst Trübung erlitten.

Es wurden Aufnahmen mit feststehendem und mit gedrehtem Spektrographen gemacht. Das Drehen der Schneidenkamera erfolgte durch einen Dreharm, der auf einer exzentrischen motorangetriebenen Drehscheibe mit zwei Zapfen auflag. Unbequem war die Anordnung deswegen, weil sich eine Änderung des Drehbereiches nur zwischen Winkeln von 4° und 8° bewerkstelligen ließ.

Für eine gute Abbildung des Spektrums ist geringer Abstand der Schneide von der Kristallfläche erforderlich. Zugleich ändert sich aber dabei wesentlich die Intensität, und die Belichtungszeit wird unangenehm erhöht. Der Abstand betrug 0,2—0,5 mm. Ein gut durchgebildetes Spektrum mit über 8° gedrehtem Kristall wurde mit der Anordnung bei 80000 Volt Spannung in 15 Minuten erzielt. Erhöhte Spannung trägt wesentlich zur Verkürzung der Belichtungszeit

1) H. Seemann, Ann. d. Phys. 49. S. 470. 1916.

bei. Für die scharfe photographische Ausbildung der Grenze des Spektrums war im allgemeinen aber eine zwanzigfache Bestrahlungszeit nötig. Trotzdem wurde ein Verstärkerschirm nicht angewandt, auch keine Verstärkung der photographischen Platte vorgenommen.

3. *Die kurzwellige Grenze des kontinuierlichen Spektrums.* — Das kontinuierliche Röntgenspektrum endet nach kurzen Wellen zu in einer Grenze, die durch die der Röhre auferlegte Spannung bedingt ist. Die Beziehung der Frequenz dieser Grenze zur Spannung wird durch das Einsteinsche Gesetz gegeben:

$$eV = h\nu_0.$$

Die Einsteinsche Formel ist experimentell innerhalb geringer Fehlergrenzen bestätigt. Hull[1]) hat durch spektrometrische Messungen ihre Gültigkeit bis zu Spannungen von 110000 Volt bewiesen. A. Müller[2]) fand das gleiche Resultat auf spektrographischem Wege für niedere Spannung bis 28000 Volt. Neuerdings fanden Dessauer und Back[3]) eine Bestätigung bis 170000 Volt. Auch die von ihnen bei 245000 Volt gemessene, bis jetzt kürzeste bekannte Wellenlänge von 0,057 Å.-E. fügt sich annähernd dem obigen Gesetz. E. Wagner[4]) konnte auf Grund der Einsteinschen Formel bei niederen Spannungen und Akkumulatorenbetrieb eine Präzisionsmessung des Wirkungsquantums durchführen.

In der angeführten Untersuchung fanden Dessauer und Back, daß die auf photographischem Wege ermittelte Grenze sich mit der Intensität und Dauer der Bestrahlung nach kurzen Wellen verschiebt. Die kurzwellige Grenze des Spektrums zeigt keinen rapiden Abfall der Intensität wie etwa die Bandkanten des Silbers oder Broms der photographischen Platte. Die Grenze ist verwaschen, wie man aus Aufnahme 1 erkennen kann. Der Intensitätsabfall ist ein allmählicher. Der Anteil der Endstrahlung an der Gesamtstrahlung ist gering. Bei den Schwankungen der Entladungsspannungen zieht sich dieser allmähliche Abfall über einen erheblichen

1) A. W. Hull, Phys. Rev. 7. S. 156. 1916.
2) A. Müller, Physik. Zeitschr. 19. S. 489. 1918.
3) F. Dessauer u. E. Back, Verh. d. D. Physik. Ges. 21. S. 168. 1919.
4) E. Wagner, Ann. d. Phys. 57. S. 401. 1918.

Wellenbereich hin. So kommt es, daß bei bereits guter Sichtbarkeit der längeren Wellen die dem hochfrequenten Ende zugekommene Intensität noch nicht genügte, eine merkliche Anregung der Platte hervorzurufen. Zur Durchbildung der Grenze sind daher lange Expositionszeiten erforderlich. Eine eigene Versuchsreihe ergab folgende Abhängigkeit der Grenzwelle unter sonst gleichen Verhältnissen von der Belichtungszeit.

Tabelle 1.

Belichtungszeit	λ_0
6 Min./Grad	$0{,}287 \cdot 10^{-8}$ cm
12 „	$0{,}198 \cdot 10^{-8}$ „
20 „	$0{,}186 \cdot 10^{-8}$ „
40 „	$0{,}184 \cdot 10^{-8}$ „

Im vorliegenden Falle genügte bei einer Drehung des Spektrographen über einen Winkelgrad eine Bestrahlungsdauer von 40 Minuten. Eine allgemein erforderliche Expositionszeit läßt sich nicht angeben, da die diese bestimmenden Faktoren: Spannung der Röhre, Stromstärke, Abstand Antikathode-Schneide, Abstand Schneide-Kristall zu vielseitig sind. Sie muß für jeden einzelnen Fall ermittelt werden. Man kann sich aber im allgemeinen an das Schwärzungsbild der photographischen Platte halten und muß so lange bestrahlen, bis die Bande eine intensive Schwärzung zeigt.

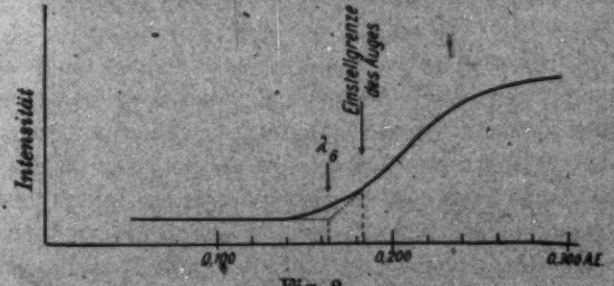


Fig. 2.

Aus dem Bilde der photographischen Platte mit Sicherheit auf die Lage der Grenzwelle zu schließen, ihre Frequenz absolut zu bestimmen, ist schwierig. Am zuverlässigsten halte ich aus nachfolgenden Gründen das allerdings mühsame Ausphotometrieren mit dem Mikrophotometer. Eine solche Auf-

nahme mit dem Hartmannschen Mikrophotometer (Ablesungen auf Zehntelmillimeter) zeigt Fig. 2, das Photogramm von Aufnahme 1.

Als Ordinaten sind die Schwärzungen in willkürlichen Einheiten, als Abszissen die Entfernungen auf der Platte eingetragen. Die Zahlen bedeuten die zugehörigen Wellenlänge in Å.-E. Die Ermittlung der Grenzwelle durch Fernrohrbeobachtung bei ganz geringer Vergrößerung bei Beleuchtung in diffusem durchscheinendem Lichte ergab den Wert 0,184 Å.-E. Man sieht, daß der Wert sicherlich zu hoch gegriffen ist. Die Einstellgrenze selbst eines geübten Auges ist noch zu langwellig. Das Auge ist nicht in der Lage, geringe Intensitätsunterschiede zu erfassen. Es stellt auf zu starke Kontraste ein. Die Kontraste verschwinden aber wieder bei der unmittelbaren Einstellung auf das Fadenkreuz. Man hilft sich am besten dadurch, daß man kurz, bevor das Ende in das Fadenkreuz gelangt, auf der Platte ein zufällig markantes Körnchen oder Stäubchen, das sich in gleicher Höhe mit der Grenze befindet, fixiert und dieses in das Fadenkreuz einstellt. Die Ausmessungen der Platte wurden in der eben angegebenen Weise an einem Kathetometer vollzogen, das Ablesen auf Fünfzigstelmillimeter gestattete, für die Messungen eine hinreichende Genauigkeit. Ich habe überdies sämtliche Platten noch einmal mit dem Hartmannschen Photometer auf folgende Methode durchgemessen, die auch keine absolut richtigen, aber relativ dieselben Werte ergab. Das Vergleichsfeld des Mikrophotometers wurde auf gleiche Helligkeit mit einer Stelle zwischen kurzwelliger Grenze und Durchstoßungspunkt eingestellt und dann die Platte unter dem Mikroskop vorbeigezogen, bis eine Schwärzungsänderung des Plattenfeldes erkennbar war. Diese Werte für die Grenzwelle sind zu klein. Man dürfte wohl dem wirklichen Werte am nächsten kommen, wenn man den nahezu geradlinigen Abfall der Intensitätskurve verlängert bis zum Schnitt mit einer Parallelen zur Wellenachse in Höhe der Minimalschwärzung und diesen Schnittpunkt als Grenzwelle anspricht, dasselbe Verfahren, das ja auch Wagner für seine „Isochromaten" bei der Präzisionsmessung von h anwendet. Der wirkliche Wert dürfte im vorliegenden Falle etwa 0,167 Å.-E. betragen, während die Einstellung des Auges 0,184 Å.-E. ergibt. Da man in verschiedenen Höhen der Platte

Messungen vornehmen muß, ist diese Meßart für relative Messungen zu umständlich, wenn kein selbstregistrierendes Mikrophotometer zur Verfügung steht.

Bei den vorliegenden Versuchen kam es auf Absolutwerte nicht an; es sollte nur das Verhältnis der Grenzwellen bei zwei verschiedenen Azimuten bestimmt werden. Es genügte, wenn in beiden Fällen nicht auf die absolute Grenzwelle, sondern auf genau gleiche Zustände in ihrer Nähe eingestellt wurde. Die definitiven Ausmessungen, mit dem Kathetometer vorgenommen, also Fernrohrbeobachtung, ergaben an verschiedenen Tagen eine mittlere Fehlergrenze unterhalb 1 Proz., meist zwischen 0,4 und 0,8 Proz., je nach der Güte der Platte.

Der allmähliche Übergang der Schwärzungskurve auf die Grundschwärzung der photographischen Platte rührt daher, daß die Wirkung der Strahlen nicht lokalisiert ist, sondern auch auf Nachbarbereiche übergreift. Bei Linienausmessungen ist eine derartige Verbreitung nicht so störend, weil man allgemein auf die Linienmitte einstellt; bei der Entwicklung der Grenze ist dadurch aber eine Begrenzung der Belichtungszeit nach obenhin erforderlich, da die Übergangsstelle sich sonst auf einen größeren Wellenbereich erstreckt.

4. *Die Berechnung der Wellenlänge.* — Eine genaue Bestimmung des Durchstoßungspunktes, des Nullpunktes der Wellenskala, zur Berechnung von Wellenlängen der analysierten Strahlung ist bei den Spektrographen mit einseitiger Reflexion bei streifendem Einfall nicht möglich. Die Dicke des Durchstoßungspunktes ist beträchtlich, und man ist bei längerer Bestrahlung gezwungen, ihn teilweise abzublenden. Bei der Messung von Linien und Bandkanten kann man sich auf das Spektrum der zweiten Ordnung beziehen und den Nullpunkt der Wellenskala daraus berechnen.[1]) Für die Grenzwelle fällt dieses Hilfsmittel fort, und man ist gezwungen, sich an bekannte gemessene Linien anzuschließen. Als Bezugslinien wurden die α_2- oder die β-Linie des Molybdäns und die Siegbahnschen Werte 0,714 und 0,633 Å.-E. zugrunde gelegt. Die zu messende Grenzwelle lag zwischen Winkeln von 1,5 und 2°. Mit hinreichender Genauigkeit könnte man in diesem Winkelbereich Proportionalität zwischen den Abmessungen

1) E. Wagner, Ann. d. Phys. 46. S. 884. 1915.

der Platte und den bezüglichen Wellenlängen annehmen, wenn auch die Bezugslinie in diesem Bereiche läge. α_2 wird aber bei $7^1/_2{}^0$ reflektiert, und das ergäbe bei der Berechnung Fehler von 1 Proz. Durch Einführung eines Korrektionsfaktors läßt sich, wie nachstehend gezeigt wird, der Fehler genügend beheben.

Eine absolute genaue Bestimmung einer Wellenlänge unter Benutzung einer Bezugslinie sei zuvor gegeben. Fig. 3 stellt den Strahlengang im Spektrographen dar.

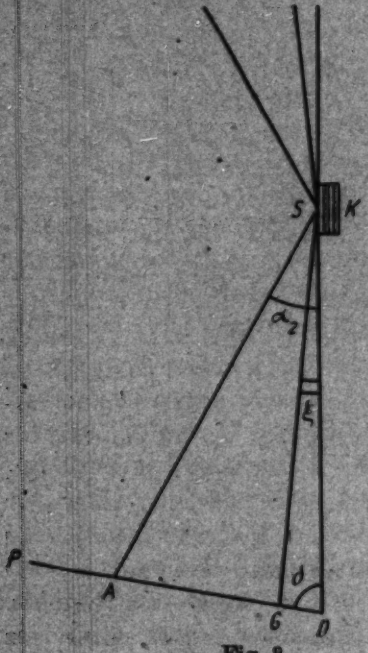


Fig. 3.

K der Kristall,
S die Schneide,
P die Platte,
D der Durchstoßungspunkt,
A der Auftreffpunkt der α_2-Linie,
G der Auftreffpunkt der Grenzstrahlung,
α_2 der Winkel zwischen Nullstrahl und α_2-Linie,
ξ der Winkel zwischen Nullstrahl und Grenzstrahl,
δ der Winkel zwischen photographischer Platte und Nullstrahl.

Nach der Braggschen Formel

$$\lambda = 2\,d\,.\,\sin\varphi$$

bedarf es zur Berechnung der Grenzwelle des Winkels ξ.

Aus den Dreiecken $A\,D\,S$ und $G\,D\,S$ berechnet sich:

$$\frac{A\,D}{S\,D} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin(\delta + \alpha_2)},$$

$$\frac{G\,D}{S\,D} = \frac{\sin\xi}{\sin(\delta + \xi)},$$

$$AD - GD = AG = SD \cdot \frac{\sin \alpha_2}{\sin(\delta + \alpha_2)} - SD \cdot \frac{\sin \xi}{\sin(\delta + \xi)},$$

$$\frac{AG}{SD} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin(\delta + \alpha_2)} - \frac{\sin \xi}{\sin(\delta + \xi)}.$$

Die Größen SD, δ sind Konstanten des Spektrographen, AG wird auf der Platte gemessen, es ist der Abstand der Grenze von der Bezugslinie. Die Rechnung ergibt:

$$\boxed{\frac{\sin \xi}{\sin(\delta + \xi)} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin(\delta + \alpha_2)} - \frac{AG}{SD} = A.}$$

Durch Auflösung der Gleichung

$$\frac{\sin \xi}{\sin(\delta + \xi)} = A$$

findet man

$$\sin \xi = A \sin \delta \cdot \cos \xi + A \cos \delta \cdot \sin \xi,$$

$$\sin \xi \left(\frac{1}{A} - \cos \delta\right) = \sin \delta \cdot \cos \xi,$$

$$\boxed{\operatorname{tang} \xi = \frac{\sin \delta}{\frac{1}{A} - \cos \delta}.}$$

Diese Methode führt rascher zum Ziel als das probeweise Einsetzen annähernd richtiger Werte von ξ in Gleichung A. Aus tang ξ berechnet man den sin ξ und damit die Wellenlänge. Die Rechnung ist reichlich unbequem und man verwendet zweckmäßig folgendes angenäherte Verfahren.

Aus den im vorigen abgeleiteten Gleichungen:

$$\frac{AD}{SD} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin(\delta + \alpha_2)},$$

$$\frac{GD}{SD} = \frac{\sin \xi}{\sin(\delta + \xi)}$$

ergibt sich

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \xi} = \frac{AD}{GD} \cdot \frac{\sin(\delta + \alpha_2)}{\sin(\delta + \xi)}.$$

Aus Braggs Formel folgt:

$$\frac{\lambda \alpha_2}{\lambda_G} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \xi},$$

wenn λ_G die Grenzwelle. Daraus

$$\lambda_G = \frac{GD}{AD} \cdot \frac{\sin(\delta + \xi)}{\sin(\delta + \alpha_2)} \cdot \lambda_{\alpha_2}.$$

Rechts alles Konstanten des Apparates bis auf ξ und GD. Es drückt sich also aus

$$\lambda_G = F \cdot GD \cdot f_\xi .$$

$$f_\xi = \frac{\sin(\delta + \xi)}{\sin(\delta + \alpha_2)}$$

ist ein Korrektionsfaktor, der in Wegfall gerät, wenn die Bezugslinie unmittelbar mit der gesuchten zusammenfällt. f_ξ ist bei fester Bezugslinie eine Funktion der gesuchten Wellenlänge. Weiß man aber, in welchem Wellenbereich ungefähr die gesuchte Welle fällt, so kann man einen mittleren Korrektionsfaktor mit hinreichender Genauigkeit verwenden. Die am häufigsten vorkommende Welle war 0,160 Å.-E. Legt man einen mittleren Korrektionsfaktor

$$f_{0,160} = \frac{\sin(\delta + \varphi_{0,160})}{\sin(\delta + \alpha_2)}$$

zugrunde, so berechnet sich damit eine Wellenlänge von 0,225 mit einem Fehler von 2 Prom., der auf das Resultat keinen Einfluß hat. Überdies lagen die gemessenen Wellenlängen näher an 0,160 Å.-E. heran. Die Berechnung von AD, die hier nötig wird, geschieht mit Hilfe des Siegbahnschen Wertes für α_2. Die endgültige Formel zur Berechnung vereinfacht sich also zu $\lambda_G = a(b - AG)$, wobei a und b einmal zu berechnende Konstanten des Spektralapparates, AG der gemessene Abstand der Grenze von der Bezugslinie ist.

5. *Die Azimutversuche.* — Während die Absorptionsmethode nicht in der Lage ist, die Isolierung der härtesten Strahlung einer Röntgenröhre einwandfrei vorzunehmen, gelingt die Aussonderung der Grenzstrahlung durch spektrale Zerlegung ohne weiteres. Es ist ferner ein Übelstand bei Absorptionsversuchen, daß die kontinuierliche Strahlung besonders bei höheren Spannungen von der Eigenstrahlung des Antikathodenmetalles bei weitem überdeckt wird und ein Erfassen der Endstrahlung unmöglich wird. Bei der spektralen Zerlegung ist eine derartige Beeinflussung nur in unmittelbarer spektraler Nähe der Eigenstrahlung denkbar. Geht man, wie es bei der verwandten Molybdänröhre bei gewöhnlichen Spannungen ein Leichtes war, weit über die Eigenstrahlung hinaus, so ist die Trennung der Grenzwelle und ihre Messung ohne jegliche Beeinflussung gesichert. Aus

diesen Gesichtspunkten heraus wurden die Azimutversuche bei ungefähr 80000 Volt Spannung mit der Molybdänröhre ausgeführt. Die kurzwellige Grenze lag dabei durchschnittlich bei 0,160 Å.-E., war also weit kurzwelliger als die K_α-Strahlung des Molybdäns mit 0,622 Å.-E.

Die orientierenden Versuche, die die Größenordnung des erwarteten Effektes ergeben sollten, wurden unter zwei verschiedenen Azimuten der Zeit nach hintereinander ausgeführt. Um von dem Einfluß der Verschiebung der kurzwelligen Grenze mit der Intensität der Bestrahlung frei zu sein, mußte so lange bestrahlt werden, bis die Platten eine intensive Schwärzung zeigten. Die Einstellung der Vergleichslinien im Mikroskop ist aber besser bei möglichst geringer Bestrahlung. Eine Bestrahlung des ganzen über 8° ausgedehnten Spektrums von zu langer Dauer war zudem eine unerwünschte Belastung der kostbaren Röhre. So wurden die Bezugslinien mit feststehendem Kristall etwa 5 Minuten lang exponiert, die kurzwellige Grenze des Spektrums aber mit kontinuierlich über einige Grad gedrehtem Spektrographen in 3—4 Stunden entworfen. Es zeigte sich, daß bei Wiederholung der Versuche trotz tunlichster Konstanthaltung des primären Stromes und absoluter Konstanz des Elektronenstromes in der Röhre diese nicht unter gleichmäßiger Spannung stand und die Sicherheit der Resultate dadurch bedeutend beeinflußt wurde. Tab. 2 enthält eine derartige Versuchsgruppe bei den Azimuten 53° und 212°.

Tabelle 2.

$\lambda\,53°$	$\lambda\,212°$	$\frac{\lambda\,53°}{\lambda\,212°}$
0,156	0,160	0,975
0,138	0,151	0,914
		Mittel 0,945

Die unter 53° austretende Strahlung erwies sich als kurzwelliger als die unter 212°.

Um die durch die Schwankungen der Spannung hervorgerufenen Fehler zu eliminieren, wurden die definitiven Versuche mit zwei gleichen Spektrographen ausgeführt, die unter

zwei festen Azimuten eingebaut, einen gleichzeitigen Betrieb ermöglichten.

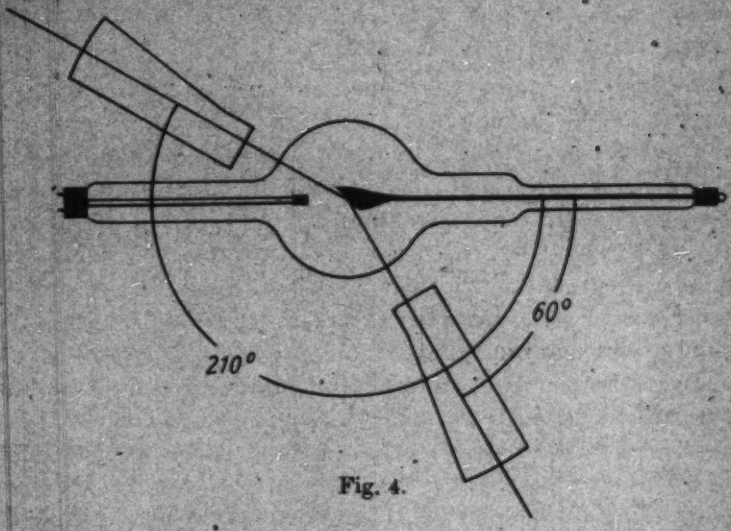


Fig. 4.

Die Eigenart der Röhre und ihre Gefährdung durch das Metall der Spektrographen ließen Messungen nur in Azimuten von maximal 90° wirksamer Azimutdifferenz zu. Spektrograph 1 stand in Anodennähe unter 60°, Spektrograph 2 jenseits der Kathode unter 210° Azimut.

Eine Gleichheit der Versuchsbedingungen und damit Unabhängigkeit von den Schwankungen der Röhrenspannung ist aber noch nicht durch den gleichzeitigen Betrieb beider Spektrographen gewährleistet. Es muß auch dafür gesorgt sein, daß die Röntgenstrahlung in beiden Spektrographen zu gleichen Zeiten unter gleichen Winkeln auf die Kristalle fällt. Eine gleichmäßige Drehung der beiden Spektrographen, die diese Bedingung erfüllt, ließ sich nicht durchführen. Es erwies sich bei der Güte der Kristalle auch nicht nötig, die Methode der kontinuierlichen Drehung zu verwenden, sondern es konnte, wie Vorversuche gezeigt hatten, bei stufenweiser Verschiebung der Spektrographen um Achtelgrade fortschreitend bestrahlt werden. Aufnahme 1 ist auf diese Weise entstanden. Der stetige Verlauf der Photometerkurve einer solchen Aufnahme Fig. 2 zeigt, daß keine Bedenken gegen diese Arbeitsmethode vorliegen.

Die Gleichheit der Bedingungen wurde nunmehr so erzielt: in beiden Apparaten wurde auf photographischem Wege die Winkelstellung ermittelt, bei der gerade Reflexion der α_2-Linie erfolgte. Von dieser Stellung ausgehend, wurde dann in beiden Apparaten an einer Winkeleinteilung um die gleichen Grade gedreht. Es wurden zuerst bei feststehendem Spektrographen die Vergleichslinien erzeugt und dann um die erwartete Lage der Grenzwelle herum stufenweise fortschreitend das Ende des kontinuierlichen Spektrums entworfen. Die Bestrahlungsdauer betrug für die Linien 3—5 Minuten, für das bestrahlte Ende meist 60 Minuten pro Grad, doch wurde sie auch auf 120 Min./Grad ausgedehnt. Der die kurzwellige Gsenze entwerfende Bestrahlungsfleck erstreckte sich meist über 2°, und zwar so, daß 1° diesseits und 1° jenseits der zu rwartenden Grenze zu liegen kam. Eine gute Abblendung des erurchstoßungspunktes war erforderlich. Sie wurde durch Dne kleine Vorsatzblende im Strahlengange vor dem Kristall erreicht.

Bei den Versuchen mußte auf eine sorgsame Einstellung des Brennfleckes geachtet werden. Durch Fernrohrjustierung wurde die Verlängerung der mittleren horizontalen Achse des Spektrographen in die Brennfleckmitte unter dem gewünschten Azimut eingestellt. Der Brennfleck bildet sich auf den Spektrogrammen in der Form des Bestrahlungsfleckes ab, der durch den begrenzten Bestrahlungsbereich entsteht. War der Bestrahlungsfleck in der Höhe verschoben, so fiel die für die Messung maßgebende, am intensivsten ausgebildete Stelle des Spektrogrammes in den Bereich der störenden Nebenspektren der Dodekaeder- (110) und Hexaeder- (210) Flächen, die ihrer größeren Gitterkonstante zufolge näher an den Durchstoßungspunkt heranrücken und sich der kurzwelligen Grenze vorlagern. Da die Röhre des sehr starken Bestäubens wegen oft gereinigt werden mußte, war leicht eine Verschiebung der Justierung möglich. Garantie dafür, daß während eines Versuches keine Änderung eingetreten war und die Gleichheit der Bedingungen gewahrt blieb, war vorhanden, wenn auf beiden Spektrogrammen der Bestrahlungsfleck kontinuierliche Schwärzung zeigte und seine langwellige Grenze gleichen Abstand von den Linien hatte. Erhöhte Sorgfalt wurde später auf die Entwicklung der Platten gelegt. Zusammengehörige Platten

wurden in demselben stets frischen Entwickler (Rodinal 1 : 20) und auch in demselben Fixierbade gleich lange behandelt.

Eine Reihe von Versuchspaaren A bis D ist in Tab. 3 zusammengestellt:

Tabelle 3.

Versuchspaar	λ 50°	λ 205°	$\frac{\lambda\ 50°}{\lambda\ 205°}$
A	0,144	0,157	0,917
B	0,139	0,160	0,869
C	0,154	0,157	0,981
D	0,178	0,158	1,127
		Mittel	0,92 ± 0,04

Es zeigt sich, daß die Strahlung der Röhre in Nähe der Antikathode härter ist als in Nähe der Kathode. Bei Versuchspaar D zeigte sich auf der einen Platte ein diskontinuierlicher Verlauf der Schwärzung, der auf eine Verschiebung der Justierung zurückgeführt werden muß. Das Versuchspaar ist daher von der Mittelbildung ausgeschaltet worden. Die Versuchsfehler betragen etwa 4 Proz. Da bei späteren Versuchen eine geringere Fehlergrenze erreicht wurde, wurden die Versuche noch einmal aufgegriffen. Bei der Versuchsserie T bis W (Tab. 4), die ich als die sorgfältigste als maßgebend hinstellen möchte, wurde die Fehlergrenze bis auf 2 Proz. beschränkt.

Tabelle 4.

Versuchspaar	λ 60°	λ 210°	$\frac{\lambda\ 60°}{\lambda\ 210°}$
T	0,154	0,180	0,856
U	0,162	0,180	0,900
V	0,165	0,188	0,878
W	0,154	0,165	0,927
	$\lambda_{30}/\lambda_{120} = 0{,}89$	Mittel	0,890 ± 0,015

Durch die Ergebnisse dieser Versuchsserie ist die Abhängigkeit der Grenzwelle von der Emissionsrichtung bewiesen. Das Resultat bestätigt qualitativ die Sommerfeldsche Theorie. Es ergibt sich das Verhältnis

$$\frac{\lambda\ 60}{\lambda\ 210} = 0{,}89 \pm 0{,}02.$$

Eine Diskussion wird nach Eingang auf die Theorie gegeben.

6. *Die Theorie der Bremsstrahlung und die Dissymmetrie der Härte.* — Die alte Wiechert-Stokessche Ätherstoßtheorie sieht die Entstehung der Röntgenstrahlung in einer plötzlichen Bremsung des Kathodenstrahlelektrons an der Antikathode. W. Wien[1]) und A. Sommerfeld[2]) haben aus dieser rein elektromagnetischen Theorie auf eine Dissymmetrie der Intensitäts- und Härteverteilung in verschiedenen Ausstrahlungsrichtungen geschlossen und ihren Betrag berechnet. Sommerfeld hat der Überlegung die Betrachtung zugrunde gelegt, daß sich der Bremsvorgang in einer endlichen kleinen Zeit, der Bremszeit τ, auf einem geradlinigen Bremsweg l von atomarer Größenordnung vollzieht. Er hat die Verzögerung geradlinig und gleichmäßig angenommen und gezeigt, daß bei den vorkommenden Geschwindigkeiten eine Änderung der elektromagnetischen Masse des Elektrons mit der Hemmung keine Rolle spielt. Trifft das Elektron mit einer Geschwindigkeit $v = \beta c$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet, in einem Punkt 0_1 auf der Antikathode auf und beginnt in diesem Zeitpunkt die Bremsung, so breitet sich in diesem Moment noch von dem Bremsvorgang unberührt das elektromagnetische Feld des bewegten Elektrons in den Raum aus. In einer Zeit t, auf die sich die weitere Betrachtung bezieht, liegt dieses noch ungestörte Feld außerhalb einer Kugel vom Radius $r_1 = c \cdot t$ um O_1 als Mittelpunkt. Nach Ablauf der Bremsung ist das Kathodenstrahlelektron in einem Punkt O_2 zur Ruhe gekommen. Es breitet sich nunmehr von ihm das Feld des ruhenden Elektrons aus, und es erreicht zur Zeit t eine Kugel mit dem Radius $r_2 = c\,(t - \tau)$. Zwischen diesen beiden exzentrisch gelegenen Kugeln liegt die Störung des Äthers, die wir als Röntgenstrahlung erkennen. Der radiale Abstand der beiden Kugeln, das ist die Wegstrecke λ_φ, um welche sich die Röntgenstrahlung in der Bremszeit in einer Richtung ausgedehnt hat, die Impulsbreite, ist als bestimmend für die Wellenlänge anzusehen. Aus der Exzentrizität der beiden die Strahlung einschließenden Kugeln ist auf die Dissymmetrie der Härte in verschiedenen Richtungen zu schließen.

---

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 18. S. 999. 1905.
2) A. Sommerfeld, Physik. Zeitschr. 10. S. 976. 1909.

Aus der Fig. 5 ist die Wellenlänge λ_φ unter beliebigem Emissionsazimut φ zu entnehmen. Die Projektion des Linienzuges PO_1O_2 auf PO_2 ergibt:

$$c \,.\, t \,.\, \cos \,.\, (\varphi_2 - \varphi_1) - l \,.\, \cos \,.\, \varphi_2 = c\,(t - \tau) + \lambda_\varphi \,.$$

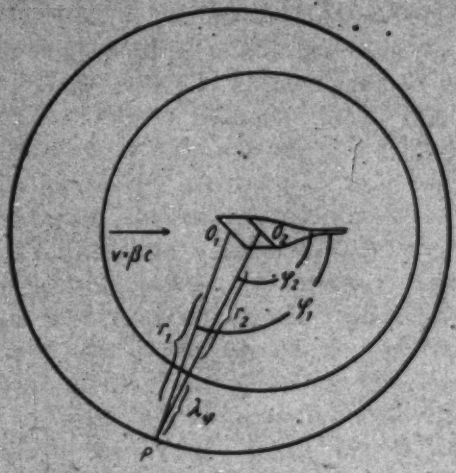


Fig. 5.

Unter Gleichsetzung von φ_1 und φ_2

$$\lambda_\varphi = c\tau - l \,.\, \cos\,\varphi \,.$$

Wendet man auf die gleichmäßig angenommene Bremsung die Fallgesetze an, so kann man den Bremsweg ersetzen durch

$$l = \frac{g}{2} t^2 = \frac{\beta c}{\tau} \frac{\tau^2}{2} = \frac{1}{2} \beta c \tau \,.$$

Es wird

$$\lambda_\varphi = c\tau \left(1 - \frac{\beta}{2} \cos \varphi\right) \,.$$

Für zwei verschiedene Ausstrahlrichtungen ergibt sich

$$\boxed{\frac{\lambda_{\varphi_1}}{\lambda_{\varphi_2}} = \frac{1 - \frac{\beta}{2} \cos \varphi_1}{1 - \frac{\beta}{2} \cos \varphi_2} \,.}$$

Um einen Vergleich dieser Theorie mit dem experimentellen Befund geben zu können, bedarf es der Berechnung von β,

dem Verhältnis von Kathodenstrahlgeschwindigkeit zur Lichtgeschwindigkeit. β wächst mit der Spannung der Röhre. Da diese aber nicht gemessen wurde, ist es mit der Grenzwellenlänge selbst in Beziehung zu bringen. Die Energie des Kathodenstrahls ist:

$$\frac{m}{2} v^2 = h\nu,$$

$$\beta^2 = \frac{2h\nu}{m \cdot c^2} = \frac{2h}{m \cdot c \cdot \lambda},$$

$$\beta^2 = \frac{2h}{e_{\text{el. stat.}}} \cdot \left(\frac{e}{m}\right)_{\text{el. mag.}} \cdot \frac{1}{\lambda}.$$

Unter Benutzung von

$$h = 6{,}52 \cdot 10^{-27} \text{ Erg} \times \text{sec},$$

$$e = 4{,}774 \cdot 10^{-10} \text{ el. stat. E.},$$

$$\frac{e}{m} = 1{,}7686 \cdot 10^{7} \text{ el. mag. E.}$$

$$\boxed{\beta^2 = \frac{0{,}0488}{\lambda \text{ in Å.-E.}}}$$

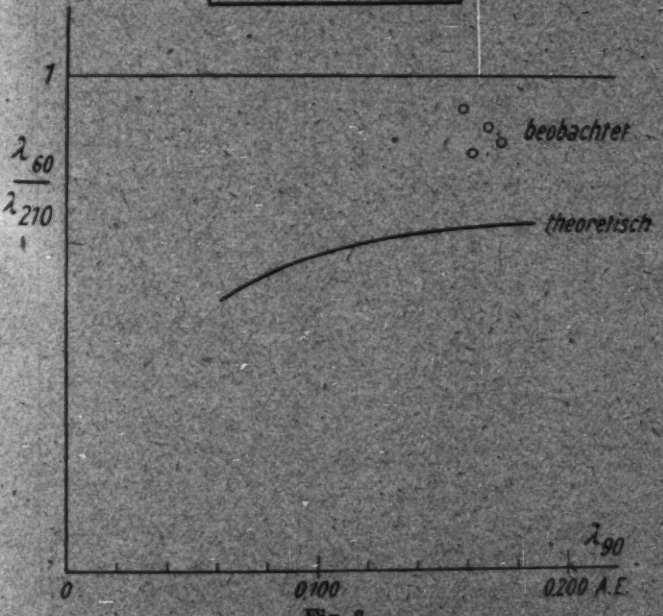


Fig. 6.

Bei den vorliegenden Versuchen war im Durchschnitt $\beta = 0{,}56$. Der Übersicht halber ist in Fig. 6 für verschiedene

Frequenzen — verschiedene β — das Verhältnis für die Azimute 60° und 210° eingetragen. Die ausgezogene Kurve zeigt den theoretischen Verlauf.

Die Parallele zur Abszisse im Abstand 1 würde Unabhängigkeit vom Emissionsazimut darstellen. Die Versuchsresultate liegen dazwischen. Sie stellen einwandfrei eine Abhängigkeit der Frequenz von der Ausstrahlungsrichtung im Sinne der Wien-Sommerfeldschen Theorie fest. Die Strahlung in der Nähe der Antikathode ist härter als in Kathodennähe. Der Betrag des Verhältnisses 0,89 erreicht allerdings nicht den von Theorie geforderten Wert 0,69.

7. *Der Dopplereffekt des kontinuierlichen Röntgenspektrums, die Existenz einer Bremsstrahlung.* — Die vorliegende Untersuchung hat den exakten Beweis der Abhängigkeit der kontinuierlichen Strahlung vom Emissionsazimut und damit wieder eine Bestätigung der alten Bremstheorie gegeben. Der Effekt der Verschiebung der kurzwelligen Grenze des kontinuierlichen Röntgenspektrums mit der Ausstrahlungsrichtung ist nichts anderes als ein „rein kinematisch bedingter Dopplereffekt" (Wagner). Der beobachtete Effekt ist aber nur möglich, wenn sich der Strahler während des Strahlungsvorganges in Richtung des Kathodenstrahls verschiebt. Ein Elektron der Doppelschicht, das nach Lilienfeld nur in einer Ebene parallel zum Antikathodenspiegel schwingen kann, kann an dem Effekt nicht beteiligt sein. Ein Elektron etwa der äußeren Ringe des Atomverbandes, das durch das Kathodenstrahlelektron in eine andere Bahn geworfen wird und nun die kontinuierliche Strahlung erzeugt (Webster), kann keine derartige Vorzugsrichtung erfahren. Der Strahler ist also das primäre Kathodenstrahlelektron selbst. Aber nicht alle Kathodenstrahlen werden in geradliniger Bahn gebremst. Eine Reihe Elektronen werden auf zickzackförmigen Bahnen durch die Atomgebilde hindurch und an solchen vorbei ihre Abbremsung erleiden. Die so abgelenkten Elektronen bringen nur eine abgeschwächte Dopplerwirkung hervor und der beobachtete Wert ist ein statistischer Mittelwert. Deshalb erreicht der Effekt nicht den von der Theorie geforderten Wert.

Ein Bild von dem Strahlungsvorgang kann man sich leicht durch Heranziehung des akustischen Vergleiches der pfeifenden fahrenden Lokomotive machen. Der Pfiff auf der

Lokomotive ist mit der eigentlichen Ausstrahlung des Elektrons zu vergleichen. Der Spektrograph unter kleinem Azimut (Beobachter vor der Lokomotive) nimmt nicht die eigentliche Ausstrahlung selbst wahr, sondern eine Verschiebung ihrer Frequenz durch die Bewegung des auf ihn zukommenden Kathodenstrahls. Der Spektrograph unter großem Azimut (Beobachter hinter der Lokomotive) bemerkt eine Verschiebung nach langen Wellen. Bei einer Beobachtung unter 90° fällt die Verschiebung weg, was man auch aus der Formel

$$\lambda_\varphi = c\tau\left(1 - \frac{\beta}{2}\cos\varphi\right) \quad \text{für } \varphi = 90°,$$

$$\lambda_{90} = c\tau$$

entnehmen kann.

In Wirklichkeit senden die Elektronen nicht wie bei der Lokomotive *eine* Welle aus, sondern eine ganze Reihe Wellen verschiedener Frequenz. Für jeden einzelnen dieser Töne gilt der Dopplereffekt; aber auch die Summe der Töne zeigt in der hochfrequenten Grenze eine Verschiebung — die beobachtete Verschiebung der kurzwelligen Grenze des kontinuierlichen Röntgenspektrums.

Über die Gültigkeit des Einsteinschen Gesetzes läßt sich nicht ohne weiteres ein Urteil fällen. Man ist geneigt, es auf den eigentlichen Strahlungsvorgang ($\varphi = 90°$) zu beziehen und die höhere Frequenz ($\varphi = 0°$) als eine scheinbare anzusprechen. Dann ist aber zur Erzeugung des Dopplereffekts noch eine gewisse Bewegungsgröße erforderlich, die auch aus der Energie des Kathodenstrahls entnommen werden muß. Eine experimentelle Prüfung dieser Frage ist bei der ungenauen Spannungsmessung bei hohen Potentialen nicht möglich.

8. *Untersuchungen über die Abhängigkeit der Grenzwelle des kontinuierlichen Spektrums vom Metall der Antikathode.* — Mit Hilfe des erwähnten Seemannschen Schneidenspektrographen wurden spektrographische Aufnahmen der Strahlung einer Molybdän- und einer Wolframglühkathodenröhre vorerst zeitlich nacheinander unter gleichen Bedingungen gemacht. Aufnahmen 2 und 3 sind zwei derartige Spektrogramme. Auf eine Verschiedenheit der Intensität oder Intensitätsverteilung kann aus ihnen nicht geschlossen werden. In bezug auf die Härte der Grenzstrahlung zeigte sich aber

qualitativ, daß die verwendete Molybdänröhre eine Strahlung höherer Frequenz ergab.

Daraufhin wurden genauere Versuche unternommen. Wie auch bei den Azimutversuchen, wurde die Gleichzeitigkeit des Betriebes angestrebt. Durch Parallelschaltung der Röhren wurden die gleichen Spannungsverhältnisse erzielt. Wegen der möglichen photographischen Verschiebung der Grenze mit der Intensität wurde aber auch in den beiden Röhren für die gleichen Röhrenstromstärken gesorgt. Das ließ sich nur ermöglichen durch getrennte Heizung der Glühkathoden, die zur Emission gleicher Elektronenzahl verschiedener Heizströme bedurften. Die beiden Röhren beeinflußten sich bei der Regulierung gegenseitig. Trotz der hohen Spannung von 60000 Volt befindet man sich infolge des Raumladungseffekts der Elektronenwolke der Glühkathode im Gebiete des ungesättigten Stromes. Die Schaltung der Röhren ist in Fig. 1 gegeben worden. Um etwaige Spannungsdifferenzen durch verschiedene Sprühverluste auszugleichen, wurden bei aufeinanderfolgenden Versuchspaaren die Röhren vertauscht, so daß sie an die verschiedenen Anordnungen und Spektrographen zu liegen kamen. Die Spektrographen standen unter Azimut 90°.

Die gleiche Bezugsnormale auf den Platten wurde folgendermaßen erzielt: es wurden in beiden Spektrographen mit Hilfe der Mo-Röhre nacheinander die Mo-Linien exponiert. Während die Mo-Röhre an dem einen Spektrographen verblieb, wurde die Wolframröhre in die Fernrohrjustierung des anderen eingesetzt und auf die vorbereiteten Platten nunmehr gleichzeitig die Grenze entworfen.

Versuche oberhalb der K-Strahlung des Wolframs sind in Tab. 5 zusammengestellt.

Tabelle 5.

Oberhalb K_W.

Versuchspaar	W	Mo	W/Mo
K	0,179	0,166	1,08
M	0,190	0,169	1,12
N	0,181	0,159	1,14
P	0,170	0,156	1,09
		Mittel:	1,1

Dem Molybdän kommt in diesen Versuchen eine kürzere Grenzwelle zu; aber es liegt nahe, den Unterschied einer Beeinflussung der Grenze der kontinuierlichen Strahlung des Wolframs durch seine Eigenstrahlung (0,203—0,177 Å.-E.) zurückzuführen. Es wurden deshalb Versuche unterhalb K_W ausgeführt. Wegen der Verminderung der Spannung mußte die Belichtungszeit bis auf $2^1/_2$ Std./Grad ausgedehnt werden. Die Resultate zeigt Tab. 6.

Tabelle 6.

Unterhalb K_W.

Versuchspaar	W	Mo	W/Mo
G	0,218	0,202	1,08
H	0,199	0,182	1,09
J	0,230	0,218	1,06
R	0,224	0,217	1,03

Auch bei den Versuchen unterhalb der Eigenstrahlung des Wolframs ergibt die Mo-Röhre eine härtere Strahlung. Durch das ständige Vertauschen der Röhren wurde eine exakte Gleichzeitigkeit in beiden Spektrographen erschwert und meist nicht erreicht. Versuchspaar *R*, bei dem diese Bedingung am besten erfüllt ist, halte ich für das zuverlässigste und den Wert des Verhältnisses der Grenzstrahlungen $\lambda_W/\lambda_{Mo} = 1{,}03$ für maßgebend.

Versuchspaar *R* wurde sehr sorgfältig sowohl mit dem Kathetometer als auch dem Photometer mehrfach ausgemessen (Tab. 7). An dem Resultat änderte sich nichts.

Tabelle 7.

Versuchspaar *R*	Fernrohrablesung	Photometereinstellung
W	0,224 ± 0,002	0,200 ± 0,002
Mo	0,217 ± 0,002	0,196 ± 0,004

Ergebnis. — Alle angestellten Versuche hatten qualitativ dasselbe Ergebnis. Bei gleicher Spannung gab die Molybdänröhre stets eine härtere Strahlung als die Wolframröhre.

Der Bremsweg im Molybdän ist also für den vorliegenden Fall kürzer anzunehmen als der Bremsweg im Wolfram. Nimmt man eine Beeinflussung der Grenze des kontinuierlichen Spektrums durch das Metall der Antikathode an, so würde man erwarten, daß das Metall mit höherer Atomzahl eine Strahlung höherer Frequenz ergäbe, eine Verschiebung, wie sie in der Eigenstrahlung statthat. Die Verschiebung ist im entgegengesetzten Sinne beobachtet ($Z_{Mo} = 42$, $Z_W = 74$). Auch eine Berücksichtigung der spez. Gewichte ($s_{Mo} = 8{,}6$, $s_W = 19{,}18$) oder der Atomvolumina ($V_{Mo} = 11{,}2$, $V_W = 9{,}6$), Molybdän und Wolfram stehen in derselben Reihe des periodischen Systems, vermag keinen Aufschluß zu geben. Es läßt sich der Verdacht nicht von der Hand weisen, daß Nebenerscheinungen, deren Einfluß noch nicht bekannt ist, auf das Resultat bestimmend eingewirkt haben.

Es wurde während des Betriebes beobachtet, daß die Molybdänantikathode merklich in hellere Weißglut geriet als die der gleichzeitig betriebenen Wolframröhre. Eine höhere Temperatur der Molybdänantikathode vermag aber die Richtung des Effekts nicht zu erklären.

Eine andere Frage ist die, ob die Elektronendichte des Kathodenstrahlenbündels im Brennfleck eine Rolle spielt. In der Tat waren die Brennflecke verschieden groß. Der Wolframklotz zeigte eine eingestochene Stelle von 0,8 cm Durchmesser (mit dem Kathetometer gemessen), der Molybdänklotz nur von 0,7 cm Durchmesser. Das ergibt eine größere Elektronendichte im Brennfleck der Molybdänröhre und könnte zugunsten einer härteren Molybdänstrahlung sprechen. Eine Entscheidung können nur Versuche an mehreren Röhren bringen, die aber zur Zeit der vorliegenden Arbeit nicht zur Verfügung standen.

Die Versuche können somit nicht beanspruchen, die Frage der Abhängigkeit der kontinuierlichen Strahlung vom Metall der Antikathode entschieden zu haben; sie wollen demgemäß auch nur einen experimentellen Beitrag zu dieser vielumstrittenen Frage geben.

Zusammenfassung.

1. Es wurde an einer Glühkathodenröhre mit Molybdänantikathode bei Spannungen von 80000 Volt, also weit ober

halb der K-Strahlung des Molybdäns und unbeeinflußt durch die Eigenstrahlung, die Grenzstrahlung des kontinuierlichen Röntgenspektrums auf spektrographischem Wege isoliert. Bei gleichzeitigem Betrieb zweier Spektrographen unter verschiedener Ausstrahlungsrichtung wurde eine Abhängigkeit der Grenzfrequenz von dem Azimut gegen den Kathodenstrahl gefunden. Es ergab sich das Verhältnis der Grenzwelle unter Winkeln von 60° und 210° zu $\lambda_{60}/\lambda_{210} = 0{,}89 \mp 0{,}02$, qualitativ im Sinne der Sommerfeldschen Theorie der Bremsstrahlung. Die Theorie (Idealfall geradliniger und gleichförmiger Bremsung) würde ein Verhältnis von 0,69 erfordern.

2. Die Verschiebung der kurzwelligen Grenze des kontinuierlichen Spektrums mit dem Emissionsazimut ist ein reiner Dopplereffekt. Sie bestätigt von neuem die alte elektromagnetische Bremstheorie und liefert den endgültigen Beweis der Existenz einer „Bremsstrahlung". Es muß angenommen werden, daß zum mindesten der größte Teil der kontinuierlichen Strahlung seinen Ursprung in der Bremsung des primären Kathodenstrahlelektrons hat und nicht erst nach Übernahme der Energie von einem Elektron der Doppelschicht oder des Atomverbandes ausgestrahlt wird.

3. An zwei parallel geschalteten Glühkathodenröhren mit Molybdän- und Wolframantikathoden wurde frei von einer Beeinflussung durch die Eigenstrahlung des Antikathodenmetalles die Grenzfrequenz unter gleichen Bedingungen bestimmt. Die verwandte Molybdänröhre gab bei gleicher Spannung eine härtere Strahlung als die Wolframröhre. Das Beobachtungsmaterial genügt noch nicht, um daraus die Frage der Abhängigkeit der kontinuierlichen Strahlung vom Antikathodenmetall zu entscheiden. Es liegt im Bereich der Möglichkeit, daß die Verschiedenheit durch unbekannte Faktoren der verwandten Röhren hervorgerufen worden ist.

Die vorliegende Arbeit wurde im Sommer 1919 im Physikalischen Institut der Universität Frankfurt a/M. ausgeführt. Es ist mir eine angenehme Pflicht, dem Direktor des Instituts, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. R. Wachsmuth, für Anregung und stets entgegengebrachtes Interesse meinen Dank auszusprechen.

Zu Dank verpflichtet bin ich ferner dem Direktor der Veifa-Werke zu Frankfurt a/M., Herrn Prof. Dr. F. Dessauer, und seinem Mitarbeiter, Herrn Dr. E. Back, die mir wertvolle Ratschläge aus dem Gebiete ihrer reichen Erfahrungen zur Verfügung stellten.

Zugleich spreche ich auch dem Assistenten des Physikalischen Instituts, Herrn Dr. W. Grotrian, für mannigfache Unterstützung mit Rat und Tat meinen Dank aus.

Frankfurt a/M., Physik. Institut der Universität,
8. Dezember 1919.

(Eingegangen 12. Jannar 1920.)

3. *Eine Theorie des Telephons; von W. Hahnemann und H. Hecht.*

Das Telephon ist ein Apparat, der elektrische Wechselstromenergie in mechanisch-akustische verwandelt. Eine Theorie des Telephons muß außer den rein elektromagnetischen und mechanisch-akustischen Vorgängen auch die Verknüpfung der beiden miteinander enthalten und als Hauptaufgabe betrachten, Auskunft darüber zu geben, mit welchem Grade von Vollkommenheit der eigentliche Zweck des Apparates, die Verwandlung der elektrischen Energie in akustische, erreicht wird. Die vollständigste Theorie des Telephons, die wir bis heute besitzen, ist wohl diejenige von Poincaré[1]); aber vergeblich wird man in ihr nach dem Ausdruck suchen, der ein Maß für diese Vollkommenheit ist, nach dem Wirkungsgrad.

Wir haben vor kurzem gezeigt[2]), daß man sich die elektromechanischen Vorgänge in einem Telephon durch solche rein elektrischer Art ersetzt denken kann und daß man hierdurch zu einer einfachen Darstellung der in Betracht kommenden Verhältnisse und Größen gelangt. Wir wollen im folgenden zunächst die Grundlagen der von uns angewandten Methode kurz wiederholen, anschließend eine Theorie des Telephons geben und experimentelle Messungen und Resultate mitteilen, die die theoretischen Ergebnisse stützen.

I. Die Ersatzkreismethode.

Diese Methode besteht darin, die mechanisch-akustischen Arbeitsvorgänge der schwingenden Telephonmembran gedanklich durch rein elektromagnetische Arbeitsvorgänge zu ersetzen und die Telephonmembran ruhen zu lassen.

Es soll — mit anderen Worten — eine rein elektrische Anordnung gefunden werden, die so beschaffen ist, daß es

1) L'Eclairage électrique **20.** 1907.

2) Physik. Zeitschr. **20.** S. 104. 1919; im folgenden mit a. a. O. bezeichnet.

einem Beobachter nicht möglich wäre, zu entscheiden, ob er das Telephon mit der schwingenden Membran oder den festen elektrischen Ersatzkreis vor sich hat. Dieser Beobachter soll mit allen möglichen Meßinstrumenten ausgerüstet sein, kann die Wechselstromquelle bezüglich Frequenz und Erregung nach Belieben variieren und alle erdenklichen Messungen an den Zuleitungen des Telephons vornehmen: der einzuführende Ersatzkreis soll dann so beschaffen sein, daß er keine Abweichung der Angaben der Meßinstrumente hervorruft und es dem Beobachter daher unmöglich macht, zu entscheiden, ob er die festgebremste Membran und den Ersatzkreis oder die frei schwingende Membran des mechanisch-akustisch arbeitenden Telephons vor sich hat. Wenn dies erreicht ist, wird für die Ableitung der Gesetze des Telephons der elektrische Arbeitsvorgang im elektrischen Ersatzkreis an Stelle des mechanisch-akustischen der schwingenden Telephonmembran gesetzt werden können.

Eine rein elektrische Anordnung, die die genannten Bedingungen erfüllt, besteht, wie a. a. O. näher ausgeführt, aus einer Wicklung, die den ruhenden Anker, hier die Telephonmembran, umschlingt und durch einen Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität geschlossen ist. In Fig. 1 ist das

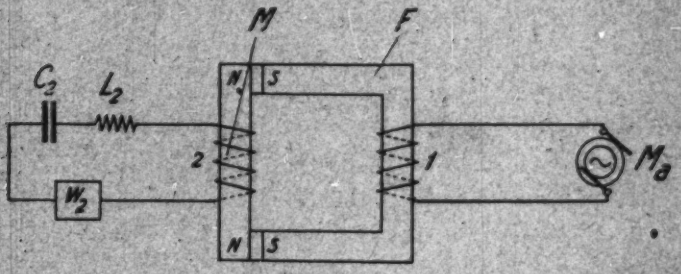


Fig. 1.

elektrische Abbild des Telephons dargestellt; es bedeutet M_d die erregende Wechselstromquelle, F den Magneten und M die Membran des Telephons, *1* die Hauptwicklung, *2* die gedanklich eingeführte Hilfswicklung, die der Einfachheit der Betrachtung zuliebe von gleicher Windungszahl wie *1* sein möge, w_2, L_2 und C_2 Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität, durch die die Hilfswicklung geschlossen ist. Diese Anordnung gibt vollkommen das Verhalten des mechanisch-

akustisch arbeitenden Telephons in Resonanz und bei Verstimmung wieder, insbesondere bedeuten w_2 den mechanisch-akustischen Arbeitswiderstand, L_2 die Elastizität und C_2 die Masse des Schwingungsgebildes, während der Strom i_2 im Spulenkreis *2* die mechanische Amplitude der Telephonmembran vertritt. Die Änderung des magnetischen Feldes infolge Membranbewegung ist gedanklich durch eine gleiche Änderung ersetzt, die durch eine entsprechende Anzahl von Amperewindungen hervorgerufen ist.

Aus der Darstellung der Fig. 1 erkennt man die Übereinstimmung mit einem gewöhnlichen Transformator; wir haben daher auch das Telephon den elektromechanischen Transformator genannt.

Denken wir uns die Spulen *1* und *2* zunächst ohne Widerstand und streuungslos miteinander gekoppelt, so stellt Fig. 2 das Diagramm für den Fall der mechanisch-akustischen Resonanz dar. OA und OB sind die der Spule des Telephons zugeführte Spannung e_1 und Stromstärke i_1, letztere um den Winkel φ_1 nacheilend. Die Spannung e_2 an der Spule *2* ist e_1 gleich und entgegengesetzt gerichtet und wird durch OC dargestellt. Selbstinduktion L_2 und Kapazität C_2 sind für die Frequenz der mechanisch-akustischen Resonanz aufeinander abgestimmt. Ihre Spannungen, die wir uns im Punkte O senkrecht auf OC nach links und rechts errichtet denken müssen, heben sich daher im Resonanzdiagramm auf, und der Spulenkreis *2* stellt eine rein Ohmsche Belastung dar: Strom i_2 und Spannung e_2 fallen der Richtung nach zusammen.

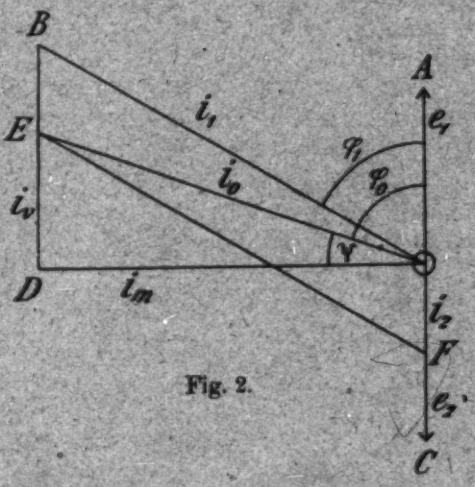


Fig. 2.

Unter dem mechanischen Wirkungsgrad des Telephons, im folgenden η genannt, verstehen wir das Verhältnis der in mechanische Form verwandelten Leistung zur aufgenommenen

elektrischen Leistung, letztere vermindert um die in dem Spulenkupfer verbrauchte Leistung. Die Leistung in mechanischer Form ist im Gegensatz zu den Eisen- und Kupferverlusten von der Amplitude der Telephonmembran abhängig und besteht, wie aus einer von uns vor kurzem veröffentlichten Arbeit[1]) über den mechanisch-akustischen Aufbau eines Telephons hervorgeht, im allgemeinen aus den drei Beträgen: mechanische Leistung innerhalb des Membranmaterials und an den Befestigungsstellen der Membran, Leistung hervorgerufen durch Gasreibung in dem vorderen und hinteren Luftraum und auf den Gehörgang übertragene Schalleistung. Wie man diese drei Beträge experimentell trennen kann, haben wir in dieser Arbeit gezeigt. Das Verhältnis der auf den Gehörgang übertragenen Schalleistung zur aufgenommenen elektrischen Leistung, letztere vermindert um die im Spulenkupfer verbrauchte Leistung, wollen wir den akustischen Wirkungsgrad des Telephons nennen und mit η_a bezeichnen. Wird die mechanische bzw. akustische Leistung nicht allein auf die Eisenverluste, sondern auf diese und die Spulenverluste bezogen, so wollen wir die entsprechenden Wirkungsgrade totaler mechanischer Wirkungsgrad, im folgenden mit η_t bezeichnet, und totaler akustischer Wirkungsgrad, im folgenden mit η_{at} bezeichnet, nennen.

Nach dieser Definition drückt sich der mechanische Wirkungsgrad η des Telephons durch die Größen unseres Ersatzkreises folgendermaßen aus:

$$\eta = \frac{e_2\, i_2^* \cos \varphi_2}{e_1\, i_1 \cos \varphi_1}\,.$$

Da nun, wie wir sahen, $e_2 = e_1$ und $\cos \varphi_2 = 1$ ist, so wird

$$i_2 = \eta\, i_1 \cos \varphi_1\,.$$

Wir errichten also in O auf OA eine Senkrechte, fällen vom Punkt B das Lot BD und teilen diese Strecke so, daß

$$BE : BD = \eta$$

wird. Da nun $BD = i_1 \cos \varphi_1$ ist, so ist $BE = i_2$. Die Strecke BE tragen wir von O aus in Richtung OC bis F ab; dann ist $OBEF$ das Stromparallelogramm mit $OE = i_0$ als Summenstrom von i_1 und i_2. Das Dreieck ODE ist das Verlustdreieck

1) Ann. d. Phys. **60**. S. 454. 1919.

und gleichzeitig Leerlaufdiagramm. $OE = i_0$ zerlegt sich in die beiden Komponenten $OD = i_m$ und $ED = i_v$, von denen

$$i_m = i_1 \sin \varphi_1 = i_0 \sin \varphi_0$$

den Magnetisierungsstrom darstellt und mit dem Kraftflusse gleichphasig ist, während

$$i_v = (1 - \eta)\, i_1 \cos \varphi_1$$

denjenigen Teil der Wattkomponente des Stromes i_1 darstellt, der die Eisenverluste des Tranformators deckt. Der Winkel

$$EOD = R - \varphi_0 = \psi$$

ist der Verlustwinkel des Transformators.

Der Strom i_2 vertritt in dem elektrischen Bilde die Stelle der mechanischen Amplitude; infolgedessen ist OD die Richtung der mechanischen Geschwindigkeit der Membran, da diese um 90° der Amplitude vorauseilt. OD ist, wie wir bereits sahen, gleichphasig mit dem Kraftflusse. Mit dem magnetischen Kraftflusse gleichphasig ist aber auch die mechanische Kraft, d. h. Kraft und Geschwindigkeit sind gleichphasig, wie es dem Falle der Resonanz zukommt.

Der dem Magnetisierungsstrom i_m entsprechende Hauptkraftfluß setzt sich aus zwei Teilfeldern zusammen: dem primären durch die erregende Maschine aufgedrückten Felde, entsprechend dem Strom i_1 und dem durch die Membranbewegung hervorgerufenen Gegenfelde, entsprechend dem Strom i_2. Im idealen Grenzfalle würde das letztere den Verhältnissen des normalen Transformators entsprechend gleich und entgegengesetzt gerichtet zum erregenden Felde sein, ganz ähnlich wie ein leerlaufender Elektromotor bzw. Turbine eine Gegenspannung bzw. -druck erzeugt, die der treibenden Spannung bzw. Druck gleich und entgegengesetzt gerichtet sind. Wir werden später zeigen, wie man dieses Gegenfeld berechnen kann.

Wir wollen nun diese Methode dazu benutzen, um das Telephon zu berechnen, insbesondere um einen Wert für seine Konstante abzuleiten, die, wie a. a. O. gezeigt ist,

$$K = \frac{\eta\, \mathfrak{d}}{1 - \eta},$$

ist, worin $\mathfrak{d}$ die mechanisch-akustische Dämpfung darstellt.

II. Berechnung des Telephons, insbesondere der Apparatkonstanten.

Wenn wir von der Resonanzkurve eines Telephons ausgehen und seinen Wirkungsgrad berechnen wollen, so empfiehlt es sich zunächst, den mechanischen Wirkungsgrad, im vorstehenden η genannt, zu berechnen, der sich nur auf die Eisenverluste und nicht auch auf die Spulenverluste bezieht. Das Telephon durchläuft, wie a. a. O. gezeigt, seine Resonanzkurve, wenn das magnetische Kraftfeld, d. h. die elektrische Spannung pro Periode an der ohmlosen Spule konstant ist. Man erhält daher mit steigender Frequenz stetig und gleichmäßig anwachsende Eisenverluste; die Spulenverluste dagegen sind eine unregelmäßige Funktion der Frequenz, da die Stromstärke i_1 gerade in der Nähe der Resonanz eine v-förmige Kurve beschreibt. Da aber die Existenz eines einfachen Gesetzes für die Verluste in ihrer Abhängigkeit von der Frequenz Bedingung für eine einfache Ableitung des Wirkungsgrades ist, so haben wir im folgenden den Weg eingeschlagen, zunächst nur die Eisenverluste zu berücksichtigen, um den mit η bezeichneten Wirkungsgrad zu berechnen, und später erst die Kupferverluste einzuführen, um den totalen mechanischen Wirkungsgrad η_t zu finden.

Nennen wir die mechanische Leistung des Telephons M und die Eisenverluste V, so ist gemäß der Definition des mechanischen Wirkungsgrades

$$\eta = \frac{M}{M+V} = \frac{1}{1+\frac{V}{M}}.$$

Wir haben nun M und V durch die Dimensionen und Konstanten des Apparates auszudrücken, um η berechnen zu können.

Die mechanische Leistung M ist mit der mechanischen Dämpfung $\mathfrak{d}$, der Schwingungsmasse m, der Maximalamplitude a_0 und der Resonanzfrequenz ω_R in 2π Sekunden durch die Beziehung

$$\mathfrak{d} = \frac{M\frac{2\pi}{\omega_R}}{m(\omega_R a_0)^2} \quad \text{oder} \quad M = \frac{m\mathfrak{d}}{2\pi}\omega_R^3 a_0^2$$

verbunden.

Zur Berechnung der Eisenverluste V beschränken wir uns auf schwache Wechselstromerregungen, sehen von den Wirkungen der Eisensättigung ab und ersetzen magnetische Felder durch entsprechende Amperewindungen und umgekehrt. Die Verluste V können wir durch den experimentell leicht meßbaren Verlustwiderstand und die Stromstärke ausdrücken. Der Verlustwiderstand, der die Eisenverluste bestimmt, ist im allgemeinen der Frequenz proportional und von der Erregung abhängig. Aus letzterem Grunde muß man Messungen, die man miteinander kombinieren will, immer bei der gleichen Erregung ausführen.

Wir denken uns die Bestimmung des Verlustwiderstandes mit festgebremster Membran, d. h. beim offenen Transformator ausgeführt, und es bezeichne i_0 den Effektivwert der Stromstärke, während der zugehörige Verlustwiderstand w_{e0} sei. Die Verluste selbst können wir dann schreiben

$$V = i_0^2 w_{e0}$$

oder, da

$$i_m = i_0 \sin \varphi_0$$

ist,

$$V = \frac{i_m^2}{\sin^2 \varphi_0} w_{e0}.$$

Wir denken uns zunächst, um die Rechnung einfach durchführen zu können, den Pfad der magnetischen Kraftlinien über Luftspalt und Membran von gleichbleibendem Querschnitt q. Da wir später finden werden, daß in der Wirkungsgradformel des Telephons der Querschnitt gar nicht auftritt, so bedeutet diese für die Vereinfachung des Rechnungsganges gemachte Annahme keine praktische Beschränkung. Dem Strom i_m entspricht, wie wir bereits sahen, das Hauptkraftfeld, dessen Maximalamplitude der Induktion wir B_H nennen wollen. Ist N die Windungszahl der Telephonspulen, μ die Permeabilität des Eisens für die betreffende Erregung und l_e bzw. $2\,l_l$ die Länge der magnetischen Kraftlinien im Eisen bzw. Luftspalt, so daß l_l den Abstand zwischen Magnet und Membran bedeutet, so ist

$$B_H = \frac{4\pi N \sqrt{2}\, i_m}{\frac{l_e}{\mu} + 2\,l}.$$

Dies in den Wert für V eingesetzt, finden wir

$$V = \frac{\left(\frac{l_e}{\mu} + 2\,l_l\right)^2 w_{e_0}}{2\,(4\pi)^2\,N^2 \sin^2 \varphi_0}\,B_H{}^2.$$

Statt des Hauptkraftfeldes B_H führen wird das durch die schwingende Telephonmembran hervorgerufene Gegenfeld ein, dessen Maximalamplitude wir B_2 nennen wollen. Es ist

$$B_H = \frac{i_m}{i_2}\,B_2$$

oder, wie wir dem Diagramm entnehmen,

$$B_H = \frac{1-\eta}{\eta}\,\mathrm{tg}\,\varphi_0\,B_2.$$

Wir erhalten demnach für die Verluste

$$V = \frac{\left(\frac{l_e}{\mu} + 2\,l_l\right)^2 w_{e_0}}{2\,(4\pi)^2\,N^2 \cos^2 \varphi_0} \cdot \left(\frac{1-\eta}{\eta}\right)^2 B_2{}^2.$$

Zur Berechnung des durch die Membranamplitude a_0 hervorgerufenen Gegenfeldes B_2 aus den magnetischen und geometrischen Abmessungen des Telephons denken wir uns die eigentliche Spule geöffnet und lassen die Membran eine mechanische Schwingung von der Form

$$a = a_0 \sin \omega\,t$$

ausführen, die wir uns irgendwie mechanisch oder akustisch erregt denken. Stellen wir uns vor, daß an Stelle des permanenten Magneten eine Spule von $N_g\,i_g$ Gleichstromamperewindungen die konstante Magnetisierung hervorruft, so ist die Induktion im Eisen und im Luftspalt als Funktion der Zeit oder der Membranamplitude a gegeben durch

$$B = \frac{4\pi\,N_g\,i_g}{\frac{l_e}{\mu} + 2\,(l_l - a)}.$$

Diesen Ausdruck können wir auch schreiben

$$B = \frac{4\pi\,N_g\,i_g}{\left(\frac{l_e}{\mu} + 2\,l_l\right)\left(1 - \frac{2\,a}{\frac{l_e}{\mu} + 2\,l_l}\right)}.$$

Wie bereits erwähnt, wollen wir uns auf geringe Erregungen beschränken. Lassen wir nur Membranamplituden zu, die im

Verhältnis zur Gesamtlänge der magnetischen Kraftlinien, bezogen auf Luft, klein sind, d. h. ist

$$\frac{2a_0}{\frac{l_e}{\mu}+2l_i} \ll 1,$$

so wird

$$B = \frac{4\pi N_g i_g}{\frac{l_e}{\mu}+2l_i}\left(1+\frac{2a}{\frac{l_e}{\mu}+2l_i}\right).$$

Wie man erkennt, setzt sich B aus zwei Beträgen zusammen: der konstanten, durch die $N_g i_g$ Gleichstromamperewindungen hervorgerufenen Induktion

$$B_L = \frac{4\pi N_g i_g}{\frac{l_e}{\mu}+2l_i}$$

und der infolge der Membranschwingung überlagerten Wechselinduktion

$$B_\sim = \frac{4\pi N_g i_g}{\left(\frac{l_e}{\mu}+2l_i\right)^2}\cdot 2a.$$

Die letztere können wir auch schreiben

$$B_\sim = \frac{2a}{\frac{l_e}{\mu}+2l_i} B_L,$$

oder in den Maximalwerten

$$B_2 = \frac{2a_0}{\frac{l_e}{\mu}+2l_i} B_L.$$

Dieses Gegenfeld entsteht durch die Membranbewegung oder Änderung des magnetischen Widerstandes bei Vorhandensein eines konstanten magnetischen Kraftflusses, ganz ähnlich wie die Wechselstromspannung in einem Mikrophon entsteht durch die Änderung des elektrischen Widerstandes bei Vorhandensein eines konstanten Gleichstromes. Eine Vergleichung mit der entsprechenden Formel für das Mikrophon wird diese Analogie vollständig bestätigen.

Diesen Wert von B_2 in den Ausdruck für V eingesetzt, ergibt

$$V = \frac{2 w_{e0} B_L^2}{(4\pi)^2 N^2 \cos^2\varphi_0}\cdot\left(\frac{1-\eta}{\eta}\right)^2 a_0^2.$$

Aus diesem Wert und dem früher für M abgeleiteten finden wir den Wirkungsgrad zu

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{w_{e0} B_L^2}{4\pi \omega_R^2 m b N^2 \cos^2 \varphi_0} \cdot \left(\frac{1-\eta}{\eta}\right)^2},$$

oder nach einfacher Rechnung die Beziehung

$$\frac{\eta b}{1-\eta} = \frac{w_{e0} B_L^2}{4\pi \omega_R^2 m N^2 \cos^2 \varphi_0}.$$

Dieser Ausdruck ist die von uns a. a. O. eingeführte Apparatkonstante

$$K = \frac{\eta b}{1-\eta},$$

von der wir auf Grund der Diagrammeigenschaften und der Resonanzkurve gezeigt haben, daß sie unveränderlich ist, ob der Apparat mit großer oder kleiner Dämpfung arbeitet. Wir haben dort gesehen, daß sich der Dämpfung entsprechend immer ein zugehöriger Wirkungsgrad einstellt und daß dieser Wirkungsgrad bei gleicher Dämpfung um so größer ist, je größer die Apparatkonstante ist. Durch unsere jetzige Rechnung haben wir nicht unmittelbar den Wirkungsgrad, sondern diese Apparatkonstante gefunden; um den ersteren berechnen zu können, ist daher in jedem Falle noch die Kenntnis der jeweiligen Dämpfung erforderlich.

Wir wollen hier noch eine andere Darstellungsweise erwähnen, die man dann zweckmäßigerweise anwenden wird, wenn man die Verluste direkt wattmetrisch aufnehmen kann, wie dies bei großen, nach dem Telephonprinzip gebauten Schallsendern möglich ist.

Statt durch Strom und Verlustwiderstand können wir die Eisenverluste auch durch die Induktion und Frequenz ausdrücken. In dieser Abhängigkeit gehorchen sie einem Gesetz, das im allgemeinen die Form hat:

$$\frac{V}{q l_e} = c_1 \omega B^{1,6} + c_2 \omega^2 B^2,$$

worin das erste Glied die Hysterese- und das zweite die Wirbelstromverluste, c_1 und c_2 die zugehörigen Verlustziffern und $q l_e$ das Eisenvolumen sind. Bei der von uns für große Schallsender gewählten Anordnung, der betreffenden Eisensorte und ihrer Unterteilung, der angewandten Periodenzahl

von 500—2000 pro Sekunde, der betreffenden Erregung und dergleichen haben wir gefunden, daß die experimentell ermittelten Verluste sich besser durch das einfachere Gesetz

$$V = c\,q\,l_e \frac{\omega_R}{2\pi} B_H^2$$

darstellen lassen, d. h. im wesentlichen Hystereseverluste sind, die statt des Steinmetzschen Koeffizienten 1,6 einen solchen von der Größe 2 besitzen, und deren Verlustziffer mit c bezeichnet ist.

Wir wenden nun die bereits abgeleitete Beziehung zwischen B_H und B_2 bzw. a_0 an, drücken den Winkel φ_0 durch

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\omega_R L_{R0} i_0^2}{V}$$

aus, worin L_{R0} die Selbstinduktion bei Resonanzfrequenz und festgebremster Membran ist und benutzen die Beziehungen

$$e_1 \sin \varphi_0 = i_0 \omega_R L_{R0}$$

und

$$e_1 \sqrt{2} = \omega_R N q B_H,$$

worin e_1 und i_0 die Effektivwerte von Strom und Spannung bedeuten, während B_H wieder wie früher der Maximalwert ist.

Nach einfacher Rechnung wird

$$V = \frac{\omega_R}{2\pi} \cdot \frac{q}{4 c l_e} \cdot \left(\frac{1-\eta}{\eta}\right)^2 B_L^2 a_0^2$$

und

$$\frac{\eta b}{1-\eta} = \frac{1}{4\omega_R^2} \cdot \frac{q B_L^2}{m c l_e}.$$

Auch diese Rechnung führt uns nicht unmittelbar auf den Wirkungsgrad, sondern wieder auf die Apparatkonstante. Die beiden Ableitungen unterscheiden sich, was zunächst überrascht, dadurch, daß im ersten Falle K umgekehrt proportional ω_R^3, im zweiten umgekehrt proportional ω_R^2 ist. Dieser Widerspruch löst sich aber sofort, wenn man berücksichtigt, daß, wie auch später die experimentell gefundenen Werte zeigen werden, w_{e0} in erster Annäherung der Frequenz proportional ist.

Wir können an Hand der gefundenen Beziehungen unsere Vorstellung über die Apparatkonstante erweitern und die Betrachtung auf alle die Fälle ausdehnen, in denen außer der

Änderung der Dämpfung auch eine solche in der Abstimmung, hervorgerufen durch Schwingungsmaße oder Elastizität, eintritt, d. h. wir können das mechanisch-akustische Schwingungsgebilde aus einem gegebenen Zustande auf einen beliebigen anderen umrechnen. Unsere Ableitungen haben gezeigt, daß hierbei der Ausdruck

$$\frac{\eta\, \mathfrak{d}\, \omega_R^2\, m}{1-\eta}$$

konstant bleibt. Führen wir durch die Beziehung

$$\omega_R^2\, m\, C = 1$$

statt Resonanzfrequenz und Schwingungsmaße die Elastizität C ein, und nennen wir diese neue Apparatkonstante K_ω, so ist

$$K_\omega = \frac{\eta\, \mathfrak{d}\, \omega_R^2\, m}{1-\eta} = \frac{\eta\, \mathfrak{d}}{(1-\eta)\, C}\,.$$

Diese Konstante K_ω ist für einen und denselben Apparat unveränderlich, ganz gleichgültig, ob man die Schwingungsmaße, Elastizität oder die mechanisch-akustische Dämpfung ändert. Bei Änderungen der Schwingungsmasse bleibt K_ω und, da sich die Resonanzfrequenz entsprechend verschiebt, bei konstanter Dämpfung auch der Wirkungsgrad konstant, während bei Änderungen der Elastizität die Konstanz von K_ω durch eine entsprechende Änderung des Wirkungsgrades erreicht wird.

Führen wir durch die Beziehung

$$\mathfrak{d} = \pi \frac{w_S}{\omega_R\, m}$$

den mechanisch-akustischen Bremswiderstand ein, so wird

$$K_\omega = \pi \frac{\eta\, w_S\, \omega_R}{1-\eta} = \pi \frac{\eta_S\, w}{(1-\eta)\sqrt{m\, C}}\,,$$

und man erkennt, wie bei konstantem Bremswiderstand und veränderlicher Schwingungsmaße bzw. Elastizität sich der Wirkungsgrad ändern muß, um die Konstanz von K_ω zu erreichen.

Beide Ausdrücke

$$\frac{\eta\, \mathfrak{d}\, \omega_R^2\, m}{1-\eta} = \frac{w_{e0}\, B_L^2}{4\pi\, \omega_R\, N^2 \cos^2 \varphi_0} = \frac{q\, B_L^2}{4\, c\, l_r}$$

sind von uns für große Schallgeber nach dem Telephonprinzip, die zur Schallerzeugung im Wasser für mehrere hundert Watt Schalleistung gebaut waren, im Gebiete von 500—2000 Perioden experimentell kontrolliert und mit genügender Genauigkeit bestätigt worden. Wie bereits erwähnt, eignet sich zur Berechnung von Telephonen der erste Ausdruck besser als der zweite, da man bei diesen mangels direkter wattmetrischer Methoden den Verlustwiderstand w_{e0} mißt. Der zweite Ausdruck, der die Verlustziffer c enthält, ist, wie bereits erwähnt, zweckmäßig bei großen Schallsendern nach dem Telephonprinzip anzuwenden. Bevor wir aber den ersten, w_{e0} enthaltenden Ausdruck zur Berechnung von Telephonen anwenden können, müssen wir noch einen Korrektionsfaktor anbringen, der sich auf die Streuung bezieht, die, wie später das Experiment zeigen wird, bei Telephonen keineswegs mehr vernachlässigt werden kann. Auch hierfür ist der erste Ausdruck geeigneter, da die Änderung des Winkels zwischen Spannung und Strom infolge der Streuung einfacher zu berechnen ist als der tatsächliche von Kraftlinien ausgefüllte Querschnitt q und die wahre Länge l_e der magnetischen Kraftlinien. Die Bestimmung des Phasenwinkels bei vorhandener Streuung können wir diagrammatisch und experimentell leicht ausführen, während die Aufgabe bei Anwendung des zweiten Ausdruckes auf eine Vorausberechnung des Wechselkraftfeldes hinauslaufen würde. Da in der ersten Formel der Querschnitt überhaupt nicht auftritt, behält sie, worauf bereits hingewiesen wurde, auch ihre Gültigkeit, wenn von unserer eingangs aufgestellten Forderung des konstanten Querschnittes abgegangen wird, was in Wirklichkeit wohl bei allen Telephonen der Fall sein wird.

III. Die Streuung und ihr Einfluß auf die Apparatkonstante.

Die Darstellung der Vorgänge im Telephon in rein elektrischer Form setzt uns ohne weiteres in den Stand, die Wirkung der Streuung zwischen Hauptspule und Membranbewegung zu berücksichtigen, da wir die bekannten Gesetze eines rein elektrischen Transformators[1]) hierauf anwenden können.

---

1) Vgl. u. a. Kapp, Transformatoren für Wechselstrom und Drehstrom. Berlin, Julius Springer, 1907.

Die Streuung entsteht dadurch, daß nicht alle Wechselkraftlinien, die mit der Hauptspule verkettet sind, auch die schwingende Membran durchsetzen, sondern daß ein Teil sich vorher schließt. Abgesehen von Resonanztelephonen geringer Dämpfung, die große mechanische Wirkungsgrade besitzen können, wird bei gewöhnlichen Telephonen i_2 immer viel kleiner als i_1, d. h. der Wirkungsgrad gering sein. Elektrisch gesprochen rührt dies daher, daß der Transformator sekundär zu wenig belastet, „zu offen" ist. Wir wollen annehmen, daß die Streuverhältnisse beim gering belasteten und offenen Transformator die gleichen sind und stellen das Leerlaufdiagramm für das Telephon mit Streuung auf.

Das Verlustdreieck OED und die zugehörigen beiden Spannungen $OA = e_1$ und $OC = e_2$ sind in Fig. 3 die gleichen wie in Fig. 2. Da i_2 zu Null angenommen, ist $OE = i_0$ jetzt der die Spule *1*, d. h. die Telephonspule durchfließende Strom, den wir bisher mit i_1 bezeichnet haben. Im Leerlaufdiagramm ist also $i_0 \equiv i_1$ und $\varphi_0 \equiv \varphi_1$. Die Streuung der Spule *1* macht sich in einem Kraftlinienfelde bemerkbar, das gleichphasig mit i_0 ist, und dessen zugehörige Spannung $OG = e_{s1}$ senkrecht zu i_0 steht. Wir haben diese Streuspannung zu $OA = e_1$ vektoriell zu addieren und erhalten in $OH = e_{m1}$ die Summe beider Spannungen, die ihre Entstehung den beiden magnetischen Kraftlinienfeldern verdanken, dem eigentlichen Transformatorfelde, das mit beiden Spulen verkettet ist, und dem Streufelde, das nur durch die Primärspule geht. Im Winkel $EOH = \varphi_{m1}$ erhalten wir den Phasenwinkel zwischen Spannung e_{m1} und Strom i_0.

Den Ohmschen Spannungsabfall am Widerstand w_Ω der Spule *1* berücksichtigen wir, indem wir in Richtung des Stromes i_0 eine Spannung

$$HK = i_0 w_\Omega = e_w$$

zu OH addieren und finden in $OK = e_{k1}$ die Klemmenspannung, die von der Maschine aufgebracht werden muß, um die Verhältnisse im Transformator aufrecht zu erhalten. Der Winkel $EOK = \varphi_{k1}$ ist der Phasenwinkel zwischen Klemmenspannung und Strom.

Aus dem Diagramm Fig. 3 folgt ohne weiteres die Beziehung

$$e_1 \cos \varphi_0 = e_{m1} \cos \varphi_{m1}$$

und, da φ_{m1} praktisch fast immer nahezu ein rechter Winkel ist, auch angenähert

$$e_{k1} \sin \varphi_{k1} = e_{m1}$$

und

$$e_1 + e_{s1} = e_{m1}.$$

Bei der experimentellen Bestimmung der Streuung am offenen Transformator messen wir primär die Spannung e_{k1} und sekundär die Spannung e_2. Aus den Watt- und wattlosen Widerständen, die bei der Aufnahme der Resonanzkurve außerhalb der Resonanz bei praktisch ruhender Membran, d. h. beim offenen Transformator gefunden werden, ergibt sich der Winkel φ_{k1} und daher aus e_{k1} auch die Größe e_{m1}. Nennen wir das Verhältnis $e_{s1} : e_{m1}$ den primären Streuungskoeffizienten s_1, so wird

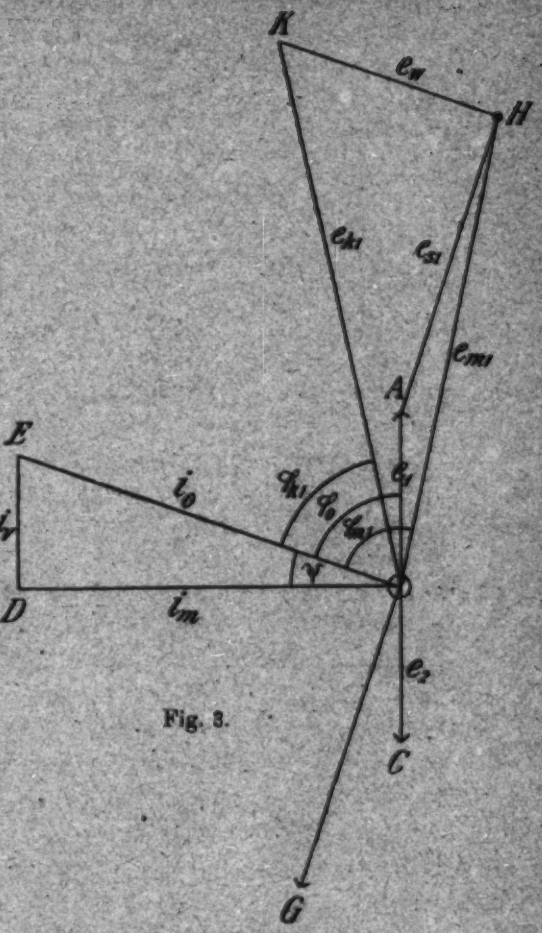


Fig. 3.

$$1 - s_1 = \frac{e_1}{e_{m1}}$$

und

$$\cos \varphi_0 = \frac{\cos \varphi_{m1}}{1 - s_1}.$$

Dies in den Ausdruck für K eingesetzt, erhalten wir

$$\frac{\eta\, b}{1 - \eta} = \frac{w_{e0} (1 - s_1)^2 B_L^2}{4\pi\, \omega_E^2\, m\, N^2 \cos^2 \varphi_{m1}}$$

Für den Winkel φ_{m1} können wir den Verlust- und wattlosen Widerstand w_{e0} und $\omega_E L'_{E0}$ bei Resonanzfrequenz und fest-

gebremster Membran[1]) einführen und erhalten in

$$\frac{\eta\,\mathfrak{d}}{1-\eta} = \frac{w_{e0}(1-s_1)^2 B_L^2}{4\pi\,\omega_R^3\, m\, N^2}\left[1+\left(\frac{\omega_R L'_{R0}}{w_{e0}}\right)^2\right]$$

eine Beziehung zwischen dem Wirkungsgrad eines Telephons und anderen der Messung direkt zugänglichen Größen, die eine Nachprüfung durch das Experiment gestattet.

IV. Experimentelle Kontrolle der Wirkungsgradformel.

Wir ziehen zur Diskussion die Messungen und Beobachtungen heran, deren Resultate wir in der bereits genannten Arbeit über den mechanisch-akustischen Aufbau eines Telephons veröffentlicht haben. In dieser Abhandlung ist eine vorwiegend experimentelle Untersuchung des Telephons durchgeführt und gezeigt worden, wie man aus dem mechanischen Wirkungsgrad den akustischen finden kann. Aus den dort veröffentlichten Angaben und Resonanzkurven kann man ohne weiteres die Werte von η, $\mathfrak{d}$, ω_R, m und N entnehmen, während aus dem Beobachtungsmaterial, das wegen Raumbeschränkung teilweise von uns nicht veröffentlicht wurde, die zugehörigen Werte von w_{e0} und L'_{R0} hervorgehen. Neu zu bestimmen waren die Induktion B_L im Luftspalt und die Streuung s_1.

a) Experimentelle Bestimmung der Größe B_L

Zu diesen Messungen und den späteren, die sich auf die Streuung beziehen, wurde dasselbe Telephon benutzt, das uns zu den Aufnahmen der Resonanzkurven in der soeben erwähnten Arbeit gedient hatte.

Zunächst wurde durch direkte optische Messung festgestellt, daß der Abstand zwischen Magnet und Membran, auf den das Telephon bei den früheren Messungen eingestellt worden war, etwa 0,1 mm[2]) betrug. Infolgedessen wurde die Membran, die bei den folgenden Messungen festgesetzt werden mußte, durch Zwischenlage von 0,1 mm starkem Papier in dieser Stellung zu den Magnetpolen fixiert.

---

1) Zum Unterschiede von der Selbstinduktion L_{R0} bei Resonanzfrequenz und festgebremster Membran und ohne Streuung ist diejenige bei Vorhandensein von Streuung L'_{R0} genannt.

2) Dies ist der durch empirisches Aufsuchen der günstigsten Lautwirkung eingestellte Abstand.

Um den Gleichstromflux auf dem Pfade von den durch die beiden Hauptspulen umschlossenen Magnetpolen über den Luftspalt hinweg und durch die Membran verfolgen zu können, wurden zwei kleine Meßspulen in folgender Weise angebracht. Die Kraftlinien im Luftspalt wurden gemessen, indem auf das Ende eines Magnetpoles über der einen Hauptspule eine flache Spule unmittelbar auf der Membran aufliegend und den Luftspalt umgebend, angeordnet wurde. Um den Kraftfluß durch die Membran zu bestimmen, wurde eine am Rande

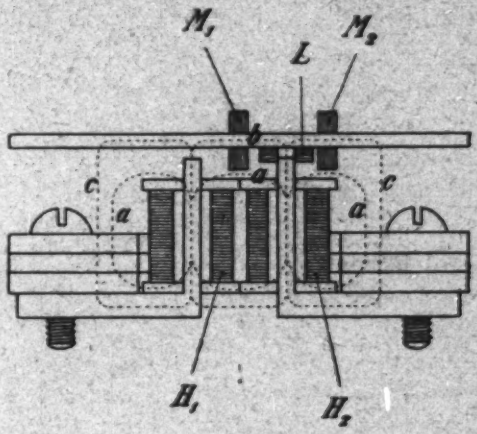


Fig. 4.

freie zweite Membran von etwas kleinerem Durchmesser, aber aus gleichem Material und von gleicher Stärke mit einer Hilfswicklung versehen, die symmetrisch zwischen beiden Magnetpolen lag und die Membran umschlang, so daß ihre Windungsfläche auf der Membranfläche senkrecht stand. Die Anordnung der Spulen ist aus Fig. 4 näher ersichtlich, die bis auf den Luftspalt und die Membrandicke etwa in natürlicher Größe gezeichnet ist. Es bedeuten H_1 und H_2 die beiden Hauptspulen, L die Luftspaltspule und M_1 die Membranspule. Auf die in der Figur gezeichnete zweite Membranspule M_2 werden wir später zu sprechen kommen.

Um den von den Hauptspulen umschlossenen Flux zu messen, war die Anordnung so getroffen, daß bei Anschluß dieser Spulen an ein ballistisches Galvanometer die Hauptspulen zusammen mit der Membran und den anderen geöffneten Meßspulen vom Magneten abgezogen werden konnten. Die

den Luftspalt durchsetzenden Kraftlinien wurden gemessen, indem die Spule L an das Galvanometer angeschlossen wurde und die Membran zusammen mit den Spulen L und M abgezogen wurde. Der Flux in der Membran schließlich wurde bestimmt, indem die Spule M_1 mit dem Galvanometer verbunden und die Membran mitsamt Spule M_1 plötzlich entfernt wurde. Nennen wir diese drei Kraftflüsse Φ_H, Φ_L und Φ_{M_1}, so ergab die Messung folgende Werte:

$$\Phi_H = 370 \text{ Kraftlinien},$$
$$\Phi_L = 310 \quad \text{„}$$
$$\Phi_{M_1} = 278 \quad \text{„}$$

Der Querschnitt für den Flux im Magnetkern und im Luftspalt ist $1{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}24$ cm², während der Querschnitt der Membran, soweit sie von der Spule M_1 umschlungen war, $3{,}0 \cdot 0{,}015 = 0{,}045$ cm² beträgt. Hieraus ergeben sich die Induktionen an den drei Stellen zu

$$B_H = 1540 \text{ Kraftlinien pro cm}^2,$$
$$B_L = 1290 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„}$$
$$B_{M_1} = 6180 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„}$$

b) Experimentelle Bestimmung der Größe s_1.

Aus den Messungen der Induktion, herrührend von der permanenten Magnetisierung, haben wir wohl den gesuchten Wert für die konstante Induktion B_L im Luftspalt ermittelt, nicht aber die Streuung zwischen Hauptspule und Membranbewegung. Man könnte zunächst allerdings der Meinung sein, daß man in dem Verhältnis

$$\frac{\Phi_H - \Phi_{M_1}}{\Phi_H} = \frac{370 - 278}{370} = 0{,}25$$

bereits den Streukoeffizienten gefunden hat, da ja die Spule M_1 scheinbar die von uns zur Aufstellung der Theorie gedanklich eingeführte und in Fig. 1 als Wicklung 2 dargestellte Spule ist, die den mechanisch-akustischen Vorgang der Membranbewegung ersetzt. Infolge der Wirkung der Wirbelströme bei wechselnden Feldern ist aber von vornherein anzunehmen, und das Experiment hat es vollkommen bestätigt, daß die Wechselkraftlinien ganz andere Bahnen einschlagen werden als die Kraftlinien der konstanten Induktion.

Um die Wechselkraftlinien und ihre Verteilung zu messen, wurden die Hauptspulen H_1 und H_2 mit Wechselstrom veränderlicher Periodenzahl (800—1500 Perioden pro Sekunde) erregt und die Spannung an der H-, L- und M_1-Spule gemessen. Als Voltmeter diente ein Gleichstromgalvanometer mit Gleichrichterzelle, eine Anordnung, die bei guter Konstanz noch so empfindlich war, daß bei einer Erregung, die etwa derjenigen bei Aufnahme der Resonanzkurven entsprach, die Vorschaltwiderstände groß genug gewählt werden konnten, um sekundär mit praktisch offenen Spulen messen zu können. Das Verhältnis der auf gleiche Windungszahlen bezogenen sekundären, offenen Spannung zur primären Klemmenspannung ist die Größe $e_1 : e_{k1}$. Aus den Messungen des Watt- und wattlosen Widerstandes gelegentlich der Aufnahme der Resonanzkurve an den Stellen außerhalb der jeweiligen Resonanz, d. h. bei ruhender Membran, haben wir für den Phasenwinkel zwischen Klemmenspannung und Strom die Werte $\sin \varphi_{k1} = 0{,}75$ für 800 Perioden und $\sin \varphi_{k1} = 0{,}81$ für 1500 Perioden, im Mittel also 0,78 gefunden. Aus $0{,}78\ e_{k1} = e_{m1}$ und den Spannungsmessungen erhalten wir das Verhältnis $e_1 : e_{m1}$ und hiermit das Verhältnis der Zahl der Wechselkraftlinien am Orte der betreffenden Meßspule zu derjenigen am Orte der Hauptspulen. Nennen wir die letztere Zahl 1, so ergab eine erste, orientierende Messung, daß die Luftspaltspule L von etwa 0,65, die Membranspule M_1 dagegen von nur etwa 0,22 Kraftlinien durchsetzt wurde. Die Differenz zwischen Hauptspule und Luftspaltspule von 35 Proz. ist leicht verständlich und rührt von Kraftlinien her, die gar nicht in den Luftspalt eindringen und sich vorher schließen (Kraftlinien a der Fig. 4). Es war aber zunächst nicht ersichtlich, wo die 48 Proz. betragende Differenz zwischen Luftspaltspule L und Membranspule M_1 verblieb. Da diese Kraftlinien, wie die Messungen mit der L-Spule zeigten, doch sicher ganz oder zum größten Teil in die Membran eintraten, konnten sie dieselbe nur auf dem Wege wieder verlassen, der in Fig. 4 mit c bezeichnet ist, nachdem durch einen Versuch festgestellt war, daß ein Austreten von Kraftlinien auf der dem Pole abgewandten Membranseite nicht stattfand. Im Gegensatz zu den konstanten Kraftlinien des permanenten Magneten besteht für die Wechselkraftlinien gar keine Ver-

anlassung, sich zum anderen Magnetpol zu schließen; von ihnen wird nur der Weg geringsten Widerstandes gesucht und für sie liegt der „andere Pol" an dem der Membran abgewandten Spulenende jeder der beiden Hauptspulen. Der Weg über die Membran durch den anderen Spulenkern und durch die Luft zum unteren Spulenende zurück (Kraftlinien *b* der Fig. 4) besitzt aber scheinbar einen größeren Widerstand als der Weg *c* „außenherum", auf dem sie mit großen Querschnitten einen guten widerstandsfreien Weg über Membran, Luft und das Magnetsystem des permanenten Magneten finden. Es wurde infolgedessen, um diese Kraftlinien messen zu können, eine zweite Membranspule M_2, wie aus Fig. 4 näher ersichtlich, in den Pfad dieser Kraftlinien gestellt, mit der, wenn die Anschauung richtig war, die verlorenen 48 Proz. wieder gefunden werden mußten.

In der Tab. 1 sind in der ersten Spalte die Periodenzahlen, in der zweiten die Kraftlinien der Spule L, in der dritten diejenigen der Spule M_1 und in der vierten diejenigen der Spule M_2 eingetragen, bezogen auf die Zahl der Kraftlinien in den Hauptspulen.

Tabelle I.

Periode	Φ_L	Φ_{M_1}	Φ_{M_2}
800	0,642	0,220	0,392
1000	0,657	0,227	0,406
1200	0,653	0,227	0,415
1500	0,653	0,220	0,415

Die Abhängigkeit von der Frequenz ist so gering, daß wir diese nicht berücksichtigen wollen. Die Mittelwerte dieser drei Kraftflüsse sind

$$\Phi_L = 0{,}65 \cdot \Phi_H,$$
$$\Phi_{M_1} = 0{,}22 \cdot \Phi_H,$$
$$\Phi_{M_2} = 0{,}41 \cdot \Phi_H.$$

Wie man erkennt, ist

$$\Phi_{M_1} + \Phi_{M_2} = 0{,}63\, \Phi_H$$

und bis auf 3 Proz. gleich dem in der Spule L gemessenen Flux. Die Widerstände auf den Bahnen *b* und *c* der Fig. 4 verhalten sich also etwa wie 2:1. Die Kraftlinien Φ_{M_1}, die

die Spule M_2 durchsetzen, tragen zur Membranschwingung nicht in dem Maße bei wie diejenigen, die auf ihrer Bahn die Spule M_1 schneiden. Der Kraftfluß Φ_{M_1} durchsetzt zweimal den Luftspalt an den Stellen größter Membranamplitude, während der Kraftfluß Φ_{M_2} nur einmal durch den Luftspalt in die schwingende Membran eintritt, während er dieselbe an Stellen mit wesentlich verringerter Amplitude verläßt. Werten wir diese Kraftlinien für die Membranbewegung nur mit der Hälfte der an Stellen größter Amplitude ein- und austretenden Kraftlinien, so erhalten wir für die Zahl der die Membranschwingung steuernden Kraftlinien

$$\Phi_M = 0{,}42\ \Phi_H.$$

Dies ist nun aber auch der Wert für den von uns zur Berechnung von η gesuchten Ausdruck $1 - s_1$, da wir die restlichen 58 Proz. Kraftlinien als Streuung, d. h. für die Membranschwingung als verloren zu betrachten haben.

c) Vergleich der Wirkungsgradformel mit dem Experiment.

In der Tab. II enthalten die einzelnen Spalten folgende Größen, die zum Teil unserer oben zitierten Arbeit, zum Teil dem dort nicht veröffentlichten Beobachtungsmaterial, zum Teil den eben mitgeteilten Neubestimmungen entnommen sind.

1. Der Zustand, in dem das Telephon untersucht worden ist.
2. Die Resonanzfrequenz n_R.
3. Der wattlose Widerstand $\omega_R L^*_{R0}$, der für die Resonanzfrequenz aus den Messungen außerhalb der Resonanz, wo die Membran praktisch nicht mehr schwingt, interpoliert ist. Wir mußten diesen Umweg gehen, da wir die Aufnahmen nicht mit festgebremster, sondern nur mit freier Membran gemacht hatten.
4. Der Verlustwiderstand w_{e0} für die Resonanzfrequenz, gewonnen aus den Werten außerhalb der Resonanz, wie der wattlose Widerstand unter 3. Wie aus Spalte 2 und 4 ersichtlich, ist das Verhältnis w_{e0}/n_R nahezu konstant und bestätigt das früher Gesagte. Der Mittelwert beträgt 0,68, der durchschnittliche Fehler 4 Proz., der maximale 8 Proz.
5. Die Schwingungsmasse m.

6. Der aus den vorstehenden Spalten und den Werten für

$$N = 3400,$$
$$1 - s_1 = 0{,}42$$

und

$$B_L = 1290$$

auf Grund der abgeleiteten Formel berechnete Wert von

$$K = \frac{\eta\, b}{1 - \eta}.$$

7. Die Dämpfung b, wie sie sich aus der Resonanzkurve ergibt.

8. Der aus den Werten von 6 und 7 berechnete Wirkungsgrad $\eta_{ber.}$

9. Der Wirkungsgrad $\eta_{beob.}$, wie er sich aus den Resonanzkurven ergibt.

10. Der Wert

$$\frac{\eta_{ber.} - \eta_{beob.}}{\eta_{ber.}}.$$

11. Die Konstante K_ω, wie sie sich auf Grund der theoretischen Ableitung, in der sie zu

$$K_\omega = \frac{w_{e0}(1 - s_1)^2 B_L^2}{4\pi\, \omega_R N^2} \left[1 + \left(\frac{\omega_R L'_{R0}}{w_{e0}}\right)^2\right]$$

berechnet ist, aus unseren Messungen bei festgebremster Membran, d. h. aus der Verlustkurve, ergibt.

12. Die Konstante K_ω, wie sie sich direkt aus den Messungen bei freier Membran, d. h. aus der Resonanzkurve, zu

$$K_\omega = \frac{\eta\, b\, \omega_R^2 m}{1 - \eta}$$

ergibt.

Wie man aus der Spalte 10 der Tabelle erkennt, ist zwischen dem nach unserer Formel berechneten Wirkungsgrad und dem sich direkt aus der Resonanzkurve ergebenden Werte eine Übereinstimmung bis auf 28 Proz. im Mittel vorhanden, wobei wie etwa 1 : 10 verschiedenen Werte des Wirkungsgrades vorkommen. Die Fehler sind teils positiv, teils negativ, zeigen also, daß die theoretische Ableitung das Experiment gut darstellt. Allerdings weisen die Abweichungen für das offene, am Ohr liegende und geschlossene Telephon einen Gang, abhängig von der Periodenzahl, auf. Unsere Messungen

Tabelle II.

1		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Zustand und Lage des Telephons		n_R	$\omega_R L'_{R0}$	$w_{e\,e}$	m	$\frac{\eta\,b}{1-\eta}$	b	$\eta_{ber.}$	$\eta_{beob.}$	$\frac{\eta_{ber.}-\eta_{beob.}}{\eta_{ber.}}$	$K_\omega \cdot 10^{-6}$ ber.	$K_\omega \cdot 10^{-6}$ beob.
Im Vakuum		755	1710	475	0,66	0,19	0,12	0,62	0,73	− 0,18	2,9	4,9
Ohne Hörmuschel . . .		920	1910	600	0,66	0,11	0,31	0,26	0,24	+ 0,08	2,4	2,2
Abstand zwischen Membran und Hörmuschel 2 mm	Schallöffnung offen	870	1920	570	0,74	0,12	0,29	0,29	0,26	+ 0,10	2,7	2,3
	„ am Ohr	1070	2290	760	0,70	0,075	0,47	0,14	0,20	− 0,43	2,4	3,7
	„ geschlossen	1230	2550	870	0,66	0,056	0,31	0,15	0,21	− 0,40	2,2	3,3
1 mm	Schallöffnung offen	865	1950	580	0,74	0,12	0,38	0,29	0,18	+ 0,38	2,7	1,8
	„ am Ohr	1130	2410	820	0,70	0,065	0,64	0,093	0,11	− 0,19	2,3	2,8
	„ geschlossen	1380	2870	960	0,66	0,045	0,40	0,10	0,14	− 0,40	2,2	3,3
0,5 mm	Schallöffnung offen	855	1910	575	0,74	0,12	0,55	0,18	0,17	+ 0,06	2,6	2,4
	„ am Ohr	1060	2240	730	0,70	0,073	0,82	0,082	0,10	− 0,22	2,3	2,6
	„ geschlossen	1500	2900	1040	0,66	0,034	0,76	0,043	0,07	− 0,62	2,0	3,4

der Resonanzkurven, der Streuung, der Induktion usw. erstreckten sich über einen sehr langen Zeitraum und können dadurch zu größeren Differenzen Veranlassung gegeben haben. Bei neueren Untersuchungen müßte man auf gleichen Abstand zwischen Membran und Magnet bei Aufnahme der Resonanzkurven, bei den Messungen bei festgesetzter Membran, die hier, wie bereits erwähnt, ganz unterlassen sind, und bei Bestimmung der Luftspaltinduktion mehr achten, als wir es getan haben, und vielleicht auch die Streuung beim belasteten Transformator messen und auf gleichbleibende Erregung bei allen Aufnahmen achten. Es ist wohl anzunehmen, daß bei Berücksichtigung aller dieser Umstände die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment eine bessere sein würde.

Ähnliches wie für den Wirkungsgrad gilt auch für die Konstante K_ω, deren nach der Theorie berechneten Werte in Spalte 11 und direkt beobachteten in Spalte 12 stehen.

In Anbetracht dessen, daß Änderungen der Resonanzfrequenz wie 1 : 2, der Dämpfung wie 1 : 7 und des Wirkungsgrades wie 1 : 10 vorkommen, ist die Übereinstimmung der Einzelwerte untereinander als eine gute zu bezeichnen. Die berechneten Werte ergeben einen Mittelwert von $2{,}4 \cdot 10^6\,\mathrm{g\,sec^{-2}}$ mit einem mittleren Fehler von 8 Proz., die beobachteten einen Mittelwert von $3{,}3 \cdot 10^6\,\mathrm{g\,sec^{-2}}$ mit einem Fehler von 28 Proz. Die Abweichung des Rechnungsmittels vom Beobachtungsmittel beträgt 37 Proz. des ersteren.

Auch bei dieser Konstanten ist der gleiche systematische Gang wie beim Wirkungsgrad zu erkennen, und es sind wohl die gleichen Gründe, die hierfür und für die Abweichungen zwischen Theorie und Experiment in Frage kommen. Neue, auf Grund der jetzigen Erkenntnis vorgenommene Messungen würden wahrscheinlich auch hier zu einer besseren Übereinstimmung führen.

Wir beabsichtigen, diese experimentellen Untersuchungen in nächster Zeit nicht weiterzuführen und würden uns daher freuen, hierdurch Anregung zu einer sorgfältigeren Nachprüfung und Ergänzung von anderer Seite gegeben zu haben. Andererseits glauben wir, daß zur Bestätigung der von uns aufgestellten Theorie des Telephons bereits die von uns mitgeteilten Zahlen genügen.

V. Totaler mechanischer und totaler akustischer Wirkungsgrad.

Um die Rechnungen einfacher zu gestalten, hatten wir angenommen, daß die Verluste nur aus Eisenverlusten bestehen, und hatten die Ohmschen Verluste im Kupfer der Spulen bisher vernachlässigt. Um den totalen Wirkungsgrad zu erhalten, müssen wir jetzt auch diese berücksichtigen.

Ist die Membran festgebremst, so wird die Spule vom Strom i_0 durchflossen, und den Verlustwiderstand, der die Eisenverluste bestimmt, hatten wir w_{e0} genannt. Lassen wir die Membran frei schwingen und das Telephon mechanisch-akustische Arbeit leisten, so wird bei gleicher Erregung, d. h. bei gleichem Felde, jetzt die Spule vom Strom i_1 durchflossen. Der zugehörige Eisenverlustwiderstand sei w_e, der mechanisch-akustische Bremswiderstand w_s. Die von uns früher eingeführten Größen M und V drücken sich durch die zugehörigen Widerstände und Ströme in folgender Weise aus:

$$M = i_1^2 \, w_s$$
$$V = i_1^2 \, w_e = i_0^2 \, w_{e0}$$

und daher der mechanische Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{w_s}{w_s + w_e} .$$

Nach der bereits eingangs gegebenen Definition ist der auf die Gesamtverluste bezogene totale mechanische Wirkungsgrad

$$\eta_t = \frac{w_s}{w_s + w_e + w_\Omega} ,$$

wenn wir den Ohmschen Widerstand der Spulen mit w_Ω bezeichnen. Hieraus folgt

$$\eta_t = \eta \, \frac{\dfrac{w_e}{1-\eta}}{w_\Omega + \dfrac{w_e}{1-\eta}} .$$

Führen wir durch die Gleichung

$$w_e = \left(\frac{i_0}{i_1}\right)^2 w_{e0} = \frac{\sin^2 \varphi_1}{\sin^2 \varphi_0} \, w_{e0}$$

statt des Widerstandes w_e' den Widerstand w_{e0} ein, und ersetzen den Winkel φ_1 vermöge der a. a. O. abgeleiteten Beziehung

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_0} = 1 - \eta$$

durch den Winkel φ_0, so erhalten wir

$$\eta_t = \eta \cdot \frac{\frac{w_{e_0}}{\sin^2 \varphi_0} \cdot \frac{(1-\eta)\operatorname{tg}^2 \varphi_0}{1+(1-\eta)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_0}}{w_\Omega + \frac{w_{e_0}}{\sin^2 \varphi_0} \cdot \frac{(1-\eta)\operatorname{tg}^2 \varphi_0}{1+(1-\eta)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_0}}.$$

Hierin gilt für den Winkel φ_0 die bereits abgeleitete Beziehung

$$\cos \varphi_0 = \frac{\cos \varphi_{m\,l}}{1-s_l},$$

und damit ist η_t durch η und durch andere Größen ausgedrückt, die bereits zur Berechnung von η gedient haben.

Ist η nahezu gleich Null und $\sin \varphi_0$ und $\operatorname{tg} \varphi_0$ nahezu gleich Eins, so wird

$$\eta_t = \eta \frac{w_{e_0}}{w_\Omega + w_{e_0}}.$$

Der Widerstand der Telephonspulen w_Ω, der mit Gleichstrom zu 960 Ohm bestimmt war, wurde nach Entfernung der Spulen aus dem Eisen in einem Resonanzkreise für 1000—1100 Perioden zu 1000 Ohm gemessen. Für das am Ohr liegende Telephon gehen bei 2, 1 und 0,5 mm Abstand zwischen Membran und Hörmuschel die berechneten mechanischen Wirkungsgrade von 0,14, 0,093 bzw. 0,082 bei Anwendung der exakten Formel in die totalen mechanischen Wirkungsgrade 0,059, 0,041 bzw. 0,034 über, während die nur wenig verschiedenen Werte 0,060, 0,042 bzw. 0,034 erhalten werden, wenn man die einfachere Formel anwendet.

Aus dem Verhältnis

$$\frac{w_\Omega + w_{e_0}}{w_\Omega},$$

das im Mittel für das am Ohr liegende Telephon etwa gleich

$$\frac{1000+800}{1000} = 1{,}8$$

ist, erkennt man auch, warum die Versuche von K. W. Wagner[1]) zur Verbesserung des Telephons von keinem großen

1) Elektrotechn. Zeitschr. 32. S. 80ff. 1911. Wagner gibt an, daß das verbesserte Telephon nur noch etwa 55 Proz. der Energie braucht, um ebenso lautstark zu sein als das unveränderte Telephon.

Erfolge begleitet sein konnten, wenn wir voraussetzen, daß sein Telephon dem von uns untersuchten entspricht. Durch weitgehende Unterteilung der Polschuhe und Verwendung von legiertem Eisen für diese und für die Membran erreichte er gerade eine Verbesserung um den eben genannten Betrag, der beobachtet sein müßte, wenn es ihm gelungen wäre, die Eisenverluste zu Null zu machen. Da dies nun aber wohl nicht der Fall sein kann, muß man annehmen, daß durch die Herabsetzung der Wirbelströme gleichzeitig eine Verbesserung der Streuung eingetreten ist, eine Erscheinung, auf die auch schon Wagner hindeutet.

Den totalen akustischen Wirkungsgrad η_{at}, d. h. das Verhältnis der auf den Gehörgang übertragenen Leistung zu der gesamt aufgenommenen elektrischen, erhält man durch Multiplikation der eben berechneten Wirkungsgrade mit dem Verhältnis der durch den Gehörgang hervorgerufenen Dämpfungserhöhung zu der Gesamtdämpfung. Wie dies Verhältnis experimentell ermittelt werden kann, ist in unserer bereits zitierten Arbeit über den mechanisch-akustischen Aufbau eines Telephons auseinandergesetzt. Wir haben dort für dieses Verhältnis bei dem untersuchten Telephon für die drei Abstände die Werte 0,36, 0,39 und 0,21 gefunden. Hiermit berechnen sich die totalen akustischen Wirkungsgrade dieses Telephons bei 2, 1 und $^1/_2$ mm Abstand zu $\eta_{at} = 0{,}021$, 0,016 und 0,007. Diese Wirkungsgrade gelten für die betreffenden Resonanzstellen und werden mit zunehmender Verstimmung wesentlich kleiner. Wegen der Berechnung des Wirkungsgrades außerhalb der Resonanz verweisen wir gleichfalls auf unsere frühere Veröffentlichung und wollen hier nur das Resultat kurz anführen, das man im Gebiete der Sprechfrequenzen, die zwischen 500 und 1000 Perioden angenommen sind, mit totalen akustischen Wirkungsgraden von etwa 1—10 Prom. zu rechnen hat.

Zusammenfassung.

Im vorstehenden ist eine Theorie des Telephons auf Grund der von uns bereits früher veröffentlichten Ersatzkreismethode gegeben, die darin besteht, mechanisch-akustische Arbeitsvorgänge durch solche elektrischer Art zu ersetzen. Insbesondere

ist gezeigt worden, wie man aus den Dimensionen des Telephons das durch die Membranbewegung hervorgerufene Gegenfeld und die Apparatkonstante, die den Wirkungsgrad und die Dämpfung enthält, berechnen kann. Es ist eine experimentelle Bestimmung der permanenten Luftspaltinduktion und des Streukoeffizienten für das Wechselfeld ausgeführt und auf Grund dieser und anderer Messungen, die in einer früheren Arbeit bereits teilweise mitgeteilt sind, eine Berechnung des Wirkungsgrades vorgenommen, die zu einer guten Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung führt.

Kiel, im Januar 1920.

(Eingegangen 26. Januar 1920.)

4. *Die Selbstdiffusionsgeschwindigkeit des geschmolzenen Bleis;* *von J. Gróh und G. v. Hevesy.*

Der Begriff der Selbstdiffusion entstammt James Clark Maxwell.[1]) Er ergibt sich unmittelbar, sobald man die Diffusion als Ergebnis der Molekularbewegung betrachtet. Nimmt man z. B. einen mit Stickstoff gleichmäßig gefüllten Zylinder und bezeichnet die in einem Zeitpunkte an einem Ende des Zylinders befindlichen Moleküle rein fiktiv, d. h. ohne dabei ihre Masse und Radien zu beeinflussen, so kann man die Selbstdiffusion des Stickstoffs ähnlich verfolgen, wie man etwa die Diffusion des Stickstoffs in Sauerstoff mißt. Während aber im letzten Falle die Diffusionsgeschwindigkei vom Radius und der Masse sowohl der einen wie der anderen Molekülart abhängt, zeigt sie im ersteren Falle, wo nur ein Radius und ein Molekulargewicht in Betracht zu ziehen ist, ein viel einfacheres Bild.

Mangels einer den obigen Anforderungen entsprechenden Bezeichnung kann man notdürftig die Diffusion des Stickstoffs in Sauerstoff, da weder Radien noch Massen dieser Gasmoleküle sehr verschieden sind, statt der Selbstdiffusion betrachten.

Anders steht es bei der Selbstdiffusion in flüssigem Aggregatzustande. Die Wechselwirkung, in die das Gelöste und das Lösungsmittel treten, sei es infolge Bildung von Verbindungen, sei es durch Solvatation (Hydratation usw.), erschweren es, den Fall der Selbstdiffusion, auch nur mit ähnlicher Annäherung wie im Falle der Stickstoff-Sauerstoffkombination zu verwirklichen, und gerade hier, wo sich ja aus Diffusionsdaten Rückschlüsse auf die Teilchengröße ziehen lassen, ist die Kenntnis der Selbstdiffusionsgeschwindigkeit von besonderem Interesse.

1) J. C. Maxwell, Scientific Papers Vol. II, Cambridge 1890; vgl. auch L. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie 1. Leipzig 1896.

Wir versuchten deshalb, die Selbstdiffusion in geschmolzenem Blei festzustellen und die obenerwähnte fiktive Bezeichnung der Bleiatome an einem Ende unseres Bleizylinders durch Beimengung eines radioaktiven Bleiisotopen zu erzeugen. Die Feststellung der Geschwindigkeit der Selbstdiffusion erfolgte demnach durch Bestimmung der Diffusionskonstante des in gewöhnlichem Blei diffundierenden Bleiisotopen.

Der Einwand liegt nahe, daß das aktive Bleiisotop, in unserem Falle Thorium B (212) ein anderes Atomgewicht hat als das gewöhnliche Blei (207, 1). Demgegenüber sei daran erinnert, daß die Diffusion in Flüssigkeiten von der Masse der diffundierenden Teilchen weitgehend unabhängig ist und bei konstanter Temperatur praktisch allein vom Radius abhängt.[1]) Für die Gleichheit der Radien der Isotopen sprechen aber sowohl gutbewährte theoretische Anschauungen[2]) wie experimentelle Befunde.[3])

Experimentelle Anordnung.

Bei Diffusionsversuchen bildet die größte Schwierigkeit die Vermeidung der Konvektion, sowohl beim Aufeinanderschichten der Flüssigkeiten, wie während des Diffusionsvorganges und der darauf folgenden Trennung. Um dies zu verhindern, sind wir folgendermaßen verfahren: In einer Hartglasröhre von etwa 3 mm Durchmesser, die am unteren Ende abgeschmolzen war, haben wir eine etwa 1,5 cm lange, aktive Bleischicht eingeschmolzen; nachdem diese erstarrt war, schichteten wir darüber eine dreimal so lange inaktive Bleischicht, ließen auch sie erstarren und brachten nunmehr das abgeschmolzene Glasrohr in einem vertikalen elektrischen Ofen von etwa 340° unter. In diesem war die Bleisäule bald geschmolzen und die Diffusion nahm ihren Anfang.

Nach dem Ablauf der Diffusionszeit von $^1/_2$—2 Tagen schaltete man den Heizstrom aus und ließ das Blei im Ofen er-

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. **19.** S. 302. 1906.

2) Vgl. G. v. Hevesy, Phys. Zeitschr. **14.** S. 1209. 1913.

3) Nach Th. W. Richards und C. H. Wadsworth (J. Amer. Chem. Soc. **38.** S. 2613. 1916) sind die Atomvolumina verschiedener Bleiarten um weniger als 0,007 Proz. verschieden; aus den von G. v. Hevesy und F. Paneth gemessenen Flüssigkeitspotentialen folgt die Gleichheit der Radien des wäßrigen Pb''- und Ra G''-Ions innerhalb $^1/_{100}$ Proz. (Wiener Ber. **124.** S. 381. 1915).

starren. Die Bleisäule wurde jetzt in vier gleiche Stücke von je 1,5 cm Länge geschnitten. Nunmehr walzten wir dünne Bleiblättchen aus den vier Spaltstücken und verglichen ihre α-Aktivitäten im Elektroskop; deren Verhältnis ergab unmittelbar die Verteilung des aktiven Bleis zwischen den vier Schichten nach der Diffusion und somit, da Versuchszeit und Schichtlänge bekannt sind, die Möglichkeit der Berechnung der Diffusionskonstante des aktiven Bleis im inaktiven.

Das Aufeinanderschichten der zwei Bleiarten hat sich indessen viel schwieriger gezeigt, als man nach der obigen Schilderung meinen würde. Um zu verhindern, daß zwischen den zwei Bleisäulen Luftblasen zurückbleiben, die dann das geschmolzene Metall aufrühren und den Versuch vereiteln, mußte das Schichten im Vakuum, das wir mit Hilfe der Gaedeschen rotierenden Quecksilberpumpe erzeugt haben, erfolgen. Es zeigte sich dann, daß das frischgeschmolzene Blei längere Zeit hindurch Gase abgibt — vermutlich Sauerstoff aus dem allmählich zerfallenen, im Metall gelösten Oxyd — und so war es erforderlich, das geschmolzene Metall längere Zeit hindurch vor dem Schichten im Vakuum zu erhitzen.

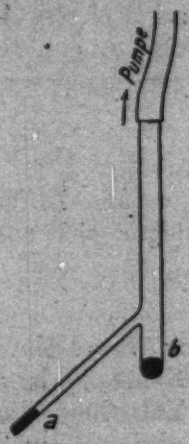


Fig. 1.

Fig. 1 zeigt eine Versuchsröhre, in deren Schenkel a das aktive, in b das inaktive Blei geschmolzen und entgast wurde. Durch Drehen der Apparatur um 90° konnte ein Hinüberfließen des Bleis von b nach a bewirkt werden.

Sehr empfindliche Störungen verursachten das Springen der Hartglasröhren während des Schmelzens oder Erstarrens der Bleisäule. Nach einer großen Zahl erfolgloser Versuche versuchten wir, meistens mit gutem Ergebnis, diesen Übelstand folgendermaßen zu beseitigen: Wir brachten die Hartglasröhre in einer zweiten, ganz eng passenden unter, welche die flüssige Bleisäule auch dann zusammenhielt, wenn die innere Röhre gesprungen war.

Wir wollen noch Näheres über die Herstellung des aktiven Bleis und die Messung seiner Aktivität mitteilen: Es wurde aktiver Niederschlag von Thorium, den uns ein Radiothorpräparat lieferte, an der Oberfläche einer negativ geladenen

Bleifolie gesammelt. Die Bleifolie lösten wir in Salpetersäure auf, setzten ihr die notwendige Menge an Bleinitrat zu und schlugen aus ihr elektrolytisch ein derart mit dem Bleiisotop Th B „indiziertes" aktives Blei ab.

Beim Auswalzen der Einzelteile der Bleisäule nach dem Versuch haben wir darauf geachtet, daß die Dicke der erhaltenen Blättchen größer sei als die Reichweiten der α-Strahlen des Th C im Blei. Das war erforderlich, um sich von unvermeidlichen Unterschieden in der Dicke der verglichenen Bleiblättchen völlig unabhängig zu machen. Ist die erwähnte Bedingung erfüllt, so ist bei gegebener Oberfläche die Aktivität des Blättchens ein eindeutiges Maß seines Th B-Gehaltes. Es sei noch erwähnt, daß wir die vier Bleiteile vor dem Walzen einzeln eingeschmolzen haben, um innerhalb der Einzelteile eine homogene Verteilung des Th B zu erzielen.

Die Versuchsergebnisse und ihre Berechnung.

Die Diffusionskonstante des inaktiven Bleis in aktivem ergibt sich aus der Gleichung:

$$D = \frac{(h/2)^2}{s \cdot z},$$

wo h = Höhe der einzelnen Schicht, s = eine der Tabelle von Stefan[1]) bzw. Kawalki[2]) zu entnehmende Zahl, zu deren Entnahme die Kenntnis der prozentischen Verteilung der Aktivität zwischen den vier Schichten erforderlich ist; z = die Zeit in Tagen.

In der Tabelle sind die Ergebnisse von 17 Versuchen zusammengestellt. In der ersten Kolumne ist die Höhe der einzelnen flüssigen Bleischichten, in der zweiten die Versuchszeit angeführt, dann kommt der relative Gehalt an Aktivität in der untersten (IV), in der zweitobersten (II) und obersten (I) Bleischicht. Wie Stefan gezeigt hat, eignen sich die Zahlen der Schicht III nicht zur Berechnung der Diffusionsgeschwindigkeit. In der sechsten, siebenten und achten Kolumne ist dann die Diffusionsgeschwindigkeit in cm^2/Tag aus der Schicht IV, II bzw. I angeführt, in Kolumne 9 deren Mittelwert.

1) J. Stefan, Wiener Ber. 79. S. 2. 1879.
2) W. Kawalki, Wied. Ann. 52. S. 166 u. 300. 1894.

Tabelle.

Die Selbstdiffusionskonstante des Bleis bei $T = 343°$.

Versuch Nr.	h in cm	z in Tagen	Verteilung der Aktivitäten in % in der Schicht:			D berechnet aus der Schicht:			D Mittelwert
			IV	II	I	IV	II	I	
1	1,25	0,92	48,4	14,6	5,5	1,72	1,77	1,82	1,77
2	1,82	0,88	63,0	6,7	1,0	1,70	1,72	2,05	1,82
3	2,01	1,77	47,2	15,4	5,5	2,48	2,59	2,45	2,50
4	2,05	1,89	47,1	15,4	6,2	2,43	2,53	2,54	2,50
5	2,03	2,09	48,9	14,1	5,4	1,94	1,94	2,09	1,99
6	1,51	0,83	50,6	13,7	4,6	2,42	2,57	2,64	2,54
7	2,16	1,79	54,1	11,0	2,7	1,92	1,87	1,98	1,92
8	1,82	1,58	49,8	14,6	5,8	1,96	2,18	2,32	2,15
9	2,39	1,54	56,9	9,8	3,0	2,34	2,36	2,90	2,53
10	1,40	0,85	49,4	14,5	5,0	2,21	2,37	2,33	2,30
11	1,40	1,63	38,1	18,0	15,7	2,23	1,83	2,83	2,30
12	1,87	1,58	44,5	13,3	7,6	2,77	2,00	2,83	2,53
13	1,82	1,67	49,2	13,7	5,5	1,91	1,88	2,13	1,97
14	2,50	1,89	56,9	10,4	3,4	1,92	2,06	2,54	2,17
15	1,98	1,85	49,0	14,2	5,8	2,07	2,11	2,34	2,17
16	1,83	1,89	41,3	17,3	9,8	2,78	2,54	2,79	2,70
17	1,40	0,85	51,7	12,2	3,2	1,93	1,87	1,89	1,90

Mittelwert sämtlicher D-Werte = 2.22 cm²/Tag.

Ergebnisse.

Berechnet man nach der Formel von Einstein-Smoluchowski aus der ermittelten Diffusionskonstante den Radius des diffundierenden Bleiatoms bzw. Moleküls (wie aus den Versuchen Siedentopfs[1]) hervorgeht, ist das geschmolzene Blei assoziiert), so erhält man den Wert von $0{,}78 \times 10^{-8}$ cm. Berechnet man sie nach der von Sutherland modifizierten Formel, so ergibt sich $1{,}16 \times 10^{-8}$ cm. Wir wollen diesen Zahlen keine besondere Bedeutung beimessen, und uns lediglich darauf beschränken, aus dem Verhältnis der nicht sehr verschiedenen Diffusionsgeschwindigkeiten diverser Teilchen auf das annähernde Verhältnis ihrer Dimensionen zu schließen.

Wir vergleichen vor allem die Diffusionsgeschwindigkeit des Bleiions in Wasser mit der des Bleiatoms (Moleküls) in geschmolzenem Blei. Dazu ist erforderlich, sie auf dieselbe

1) H. Siedentopf, Ann. d. Phys. 61. S. 23. 1897.

Temperatur und Zähigkeit des Mediums zu reduzieren. Wir nehmen den obigen Formeln gemäß die Diffusionsgeschwindigkeit der absoluten Temperatur direkt und der Zähigkeit des Mediums umgekehrt proportional und rechnen die Selbstdiffusionsgeschwindigkeit des Bleis auf Zimmertemperatur und die Zähigkeit des Wassers um.

Die zweite Annahme ist experimentell vielfach bestätigt worden[1]), die Richtigkeit der ersteren konnte deshalb experimentell nicht streng erwiesen werden, weil bei der Diffusion in wäßriger Lösung nur ein recht beschränktes Temperaturintervall untersucht werden kann, in welchem der Temperaturkoeffizient der Zähigkeit des Wassers den Temperaturkoeffizienten der Molekularbewegung um ein Vielfaches überschreitet und so verdeckt. Die von Roberts-Austen[2]) bei 550° einerseits, bei 492° andererseits erhaltenen Werte für die Diffusionsgeschwindigkeit des Goldes in Blei stehen im Verhältnis von 1,06, die Zähigkeit des Bleis ist nach Arpi[3]) bei beiden Temperaturen dieselbe und, da das Verhältnis der absoluten Temperaturen 1,07 beträgt, so können die Roberts-Austenschen Messungen als Stütze der obigen Annahme herangezogen werden.

Die große Einfachheit, welche die Selbstdiffusion gegenüber der sonstigen Diffusion aufweist, sticht hier besonders ins Auge. Die in Frage kommende Zähigkeit kann in unserem Falle nur die des Bleis sein, während z. B. bei der Diffusion von Blei und Quecksilber die Frage aufgeworfen werden kann, ob es berechtigt ist, die Zähigkeit des Quecksilbers in die obige Formel einzusetzen.

Die Zähigkeit des geschmolzenen Bleis beträgt bei 340° nach Arpi 0,0189. Es sind ferner Zähigkeiten geschmolzener Metalle von Plüss[4]) ermittelt worden. Dieser Forscher hat zwar die Zähigkeit des Bleis nicht bestimmt, doch die des Wismuts, Zinns und verschiedener Bleilegierungen, er fand höhere Werte und sucht sie in erster Linie darauf zurückzuführen, daß Arpi die Hagenbachsche Korrektion bei der

1) L. Pissarjewsky u. E. Karp, Zeitschr. f. phys. Chem. 63. S. 264. 1908; P. Walden, Zeitschr. f. Elektrochem. 12. S. 77. 1906.

2) W. C. Roberts-Austen, Phil. Trans. 187. S. 411. 1896.

3) R. Arpi, Internat. Zeitschr. f. Metallographie. 5. S. 153. 1914.

4) M. Plüss, Zeitschr. f. anorg. Chem. 93. S. 1. 1915.

Berechnung seiner Versuchsresultate nicht mitberücksichtigt hatte. Extrapoliert man aus der Verschiedenheit der für Wismut gefundenen Zähigkeiten der beiden Forscher auf den im Falle des Bleis zu erwartenden, so ergibt sich der Wert der korrigierten Zähigkeit des Bleis zu 0,0219. Die für Wismut gefundenen Werte wurden deshalb zur Grundlage der Korrektionsrechnung gewählt, weil Wismut nahe dieselbe Zähigkeit und Dichte besitzt wie Blei.

Während die obigen Werte nach der Ausflußmethode gewonnen sind, erhält C. H. Fawsitt[1]) aus der Oszillationsdauer eines in geschmolzenem Blei schwingenden Körpers für die Viskosität des Bleis bei der obigen Temperatur den Wert von 0.029.

Führt man die erwähnten Reduktionen — für die Zähigkeit die von Plüss gefundene, ungefähr in der Mitte der drei Werte liegende Zahl einsetzend[2]) — aus, so erhält man für die Diffusionsgeschwindigkeit des Bleis auf 18° und die Zähigkeit des Wassers bezogen 2,13, während die Diffusionsgeschwindigkeit des Bleiions in Wasser nur 0,68 cm^2/Tag beträgt.[3]) Der bedeutende Größenunterschied zwischen einem Bleiatom (Molekül) und einem wäßrigen Bleiion und somit die starke Hydratation des letzteren geht aus dem Vergleich dieser zwei Zahlen besonders anschaulich hervor. Die Hydrathülle des zweiwertigen Ions vergrößert den Radius des Bleiatoms mindestens auf das Dreifache seines Wertes.

Die Selbstdiffusionsgeschwindigkeit des Bleis in geschmolzenem Bleichlorid beträgt 1,7 cm^2/Tag bei 575°[4]) und nahe derselbe Wert ergibt sich, falls man sie auf Zimmertemperatur und die Zähigkeit des Wassers reduziert. Diese Zahl ist die Resultante der Diffusionsgeschwindigkeit des $Pb^{\cdot\cdot}$, $PbCl'$ und $PbCl_2$ im Schmelzfluß, sie läßt somit keinen genauen Schluß auf die Diffusionsgeschwindigkeit des Bleiions zu, doch ist

1) C. H. Fawsitt, J. Chem. Soc. **93**. S. 1299. 1908.

2) Setzt man für die Zähigkeit den von Arpi gefundenen Wert, so erhält man $D = 1{,}83$; setzt man den weniger wahrscheinlicheren von Fawsitt ein, so resultiert 2,81.

3) Dieser Wert berechnet sich aus der Ionenbeweglichkeit; experimentell wurde 0,67 gefunden (G. v. Hevesy, Physik. Zeitschr. **14**. S. 1230. 1913).

4) G. v. Hevesy, Jahrb. d. Radioakt. **13**. S. 282. 1916.

dieses in der Schmelze jedenfalls wesentlich beweglicher, also auch kleiner als das wäßrige Ion, im völligen Einklang mit den Anschauungen, die über den Zusammenhang zwischen Größe und Ladung der Ionen entwickelt worden sind.

Es sei noch erwähnt, daß für die Diffusionsgeschwindigkeit des Goldes in geschmolzenem Blei Roberts-Austen[1]) bei 550° 3,18 cm^2/Tag erhielt, wogegen sich für die Selbstdiffusion des Bleis bei dieser Temperatur, bei Berücksichtigung der Zähigkeit und Temperaturreduktion 8,5 ergibt.

Wir hoffen demnächst über die Selbstdiffusion in festem Blei berichten zu können.

Zusammenfassung.

Es wurde durch Verfolgung der Diffusion eines aktiven Bleiisotopen in geschmolzenem Blei die Selbstdiffusionsgeschwindigkeit des geschmolzenen Bleis bei 348° zu 2,2 cm^2/Tag bestimmt.

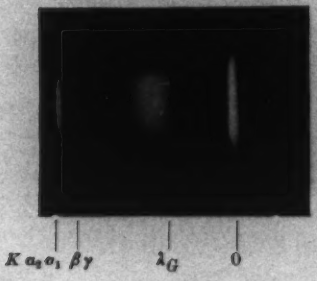
Auf die Zähigkeit des Wassers und Zimmertemperatur reduziert, ergibt sich für die Selbstdiffusionsgeschwindigkeit der Wert von 2,1 cm^2/Tag. Dieser beträgt rund das Dreifache der Diffusionsgeschwindigkeit des Bleiions in Wasser. Daraus folgt, daß der Radius des Bleiions zumindest dreimal so groß ist als der der Atome (Moleküle) des geschmolzenen Bleis und somit, im Einklange mit theoretischen Vorstellungen, die starke Hydratation des ersteren.

Budapest, Chem. Inst. d. Tierärztl. Hochschule, 1914—20.

1) W. C. Roberts-Austen, a. a. O.

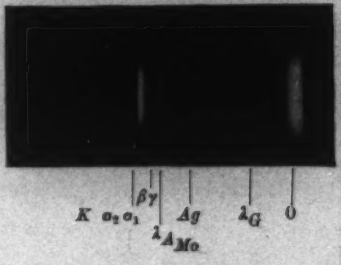
(Eingegangen 23. März 1920.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig



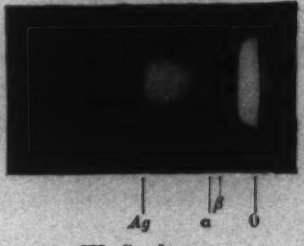
Mo-Spektrum

Aufnahme 1.



Mo-Spektrum

Aufnahme 2.



W-Spektrum

Aufnahme 3.

1920. № 18.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 63.

1. *Über die Nichtintegrabilität der Streckenübertragung und die Weltfunktion in der Weylschen verallgemeinerten Relativitätstheorie*[1]; *von Ernst Reichenbächer.*

Der Einsteinschen Forderung der Invarianz der Naturgesetze in bezug auf jede Koordinatentransformation hat Weyl die gleiche in bezug auf jede Abänderung der Eichung hinzugefügt und damit den relativistischen Grundzug in der Auffassung des gesamten Geschehens in der unbelebten Natur in der denkbar schärfsten Weise betont. Es scheint mir aber zweifelhaft, ob dieser absolut phänomenalistische Standpunkt sich völlig rein aufrecht erhalten läßt. Sehen wir zunächst einmal von der Willkür bei der Eichung ab, so läßt sich doch nicht behaupten, daß wir imstande sind, schlechthin jedes beliebige Koordinatensystem der Naturbetrachtung zugrunde zu legen; es ist ja gerade das Wesen der Gravitationstheorie, daß durch die Schwerewirkung der Materie die Maßvorschrift für das Linienelement entscheidend beeinflußt wird und der Riemannsche Krümmungstensor bestimmte Werte erhält: „Das Gravitationsfeld läßt sich nicht wegtransformieren". Demnach erscheint jedenfalls der Krümmungstensor der Welt realer Natur und damit die Willkür in der Wahl der Fundamentalgrößen $g_{\mu\nu}$ beschränkt. Es kann daher nicht die Rede davon sein, jedes überhaupt denkbare Koordinatensystem in die Welt einzuführen, sondern nur solche, die sich dem Krümmungscharakter anpassen. Mit Einführung der ver-

1) Im Verlaufe der folgenden Untersuchungen muß ich mich häufiger auf nachstehende Arbeiten beziehen: H. Weyl, Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie. Ann. d. Phys. **59**. S. 101ff. 1919; E. Reichenbächer, Grundzüge zu einer Theorie der Elektr. u. der Gravitat. Ann. d. Phys. **52**. S. 134ff. 1917 nebst Nachtrag (angeführt als I); desgleichen 3 Arbeiten zum skalaren Gravitationspotential. Ann. d. Phys. **61**. S. 1ff., S. 21ff., S. 25ff. 1920 (gemeinsam angeführt als II).

änderlichen Eichung werden die Verhältnisse zwar bedeutend unübersichtlicher, aber an der Einschränkung der Willkür wird nichts geändert; dies hat Weyl nachgewiesen, indem er zeigte (S. 117), daß nur solche Änderungen der beiden Fundamentalformen zulässig sind, bei denen die Metrik von der Deformation ungeändert mitgenommen wird. Aber mir möchte scheinen, als ob wir auch bei der Eichung selbst nicht mit unbeschränkter Willkür verfahren dürften; so spricht Weyl von der „natürlichen" Eichung der Welt (oder der Eichung von Hause aus) im statischen Falle (S. 124) und legt auch im allgemeinen Falle — allerdings bei Annahme eines speziellen Wirkungsprinzips — eine besonders ausgezeichnete Eichung fest (S. 122). Wenn er nun auch mit der Annahme dieses Prinzips nicht das letzte Wort gesprochen haben will, so ist doch bei der rechnerisch weit schwierigeren Einführung der von ihm grundsätzlich bevorzugten Invarianten 1 und 2 (S. 132f.) nicht einzusehen, daß sie in voller Allgemeinheit, d. h. ohne Bevorzugung einer besonderen Eichung, die Feldgesetze in bequemer Gestalt, d. h. als Differentialgleichungen zweiter Ordnung, ableiten lassen. Es scheint sich also zu ergeben, daß nicht nur im statischen Falle eine Eichung die natürliche ist, so daß auch hier der realistische Standpunkt der Naturbetrachtung zur Geltung kommt.

Von hier aus möchte mir der relativistische Grundsatz der allgemeinen Invarianz der Naturgesetze in bezug auf Koordinatenwahl und Eichung nur als fruchtbares heuristisches Prinzip erscheinen, als ein ausgezeichneter Weg zur Naturerkenntnis, zu der es aber auch noch andere Wege geben kann. In bezug auf die Einsteinsche Gravitationstheorie kommt noch hinzu, daß sich zwar die Struktur der elektromagnetischen Feldgleichungen aus der Eichinvarianz bei jeder Annahme für das Wirkungsprinzip ableiten läßt (S. 121), was für diejenigen der Gravitation (im Einsteinschen Sinne) nicht gilt. Im Rahmen der am folgerichtigsten durchgeführten Theorie der Relativität, der Weylschen, kommt also den Feldgleichungen der Elektrizität eine höhere Evidenz zu als denjenigen der Gravitation.

Das bestärkt mich in der Annahme, daß mit der Einsteinschen Gravitationstheorie noch nicht das letzte Wort gesprochen ist, da insbesondere die experimentellen Bestätigungen in der Perihelwanderung und der Krümmung des

Lichtstrahls nur eine Folgerung des Ansatzes für das L. E. Q. (vgl. II, S. 3) im kugelsymmetrischen Falle, aber unabhängig von der Annahme eines skalaren oder tensoriellen Potentials sind (vgl. Nachtrag zu I, ferner II, S. 24).

Ich behaupte demnach zusammenfassend, daß zwar die Feldgesetze eine allgemein kovariante Gestalt in bezug auf Koordinaten und Eichung besitzen müssen, daß aber von allen möglichen nur die verwirklicht sind, die mit meiner Annahme der durch die Elektronen bewirkten Veränderungen der Raumzeitmannigfaltigkeit, nämlich der Elementardrehung und der Streckung oder Verzerrung des Koordinatensystems (I, Hauptteil I 1 und II 1) verträglich sind. Diese Behauptung muß sich natürlich aus dem Ansatz für die Weltfunktion herleiten lassen.

I. Teil. Die Nichtintegrabilität der Streckenübertragung als Folge der Elementardrehung.

Die Einführung der Nichtintegrabilität der Streckenübertragung[1]) bringt ein so gänzlich neues Moment in die mathematische Behandlung hinein, daß es zunächst äußerst schwer fällt, sich die Sache irgendwie verständlich zu machen. Da nun aber Weyl hieraus die fruchtbarsten Folgerungen in bezug auf die Deutung des Elektromagnetismus zieht, andererseits aber die grundlegenden Tatsachen auch aus meiner Annahme der Elementardrehung sich ableiten lassen (I, Hauptteil I), stand es für mich fest, daß beide — Nichtintegrabilität und Elementardrehung — irgendwie zusammenhängen mußten. Es ist mir nun gelungen, diesen Zusammenhang aufzuspüren, und im folgenden will ich den Nachweis erbringen.

Der zweidimensionale Fall. Es erleichtert die Herleitung, wenn ich mich zunächst auf den Fall zweier Ausdehnungen beschränke und erst später deren Zahl erweitere. Ich hatte (I, S. 137) die Drehung der Elemente in einer Ebene eingeführt; dadurch erhält jeder Punkt eine neue Lage. Ist demnach eine Funktion l für alle Punkte so definiert, daß sie von deren Lage irgendwie abhängt, so äußert sich der Einfluß der Elementardrehung darin, daß l nicht von den Koordinaten des Punktes abhängt, in den es durch die Drehung gekommen ist, sondern von den ursprünglichen. Wenn man es nun trotzdem

1) H. Weyl, S. 108f.

se behandelt, als hinge es von der neuen Lage ab, so ergibt das eine Unstimmigkeit, die zur Nichtintegrabilität führt.

Um dies zu veranschaulichen, betrachte ich als das Element der Fläche, die ich zunächst als Ebene voraussetze, einen kleinen Kreis mit dem Halbmesser ϱ. Es seien dann x^0 und x^1 die Koordinaten des Mittelpunktes; dann werden die irgend eines Punktes auf dem Rande $x^0 + \varrho\cos\gamma$, $x^1 + \varrho\sin\gamma$ sein. Dreht sich nun das Element um den Winkel ϑ, so erhält man statt dessen die Werte $x^0 + \varrho\cos(\gamma - \vartheta)$, $x^1 + \varrho\sin(\gamma - \vartheta)$. In diesem neuen Punkte sollen aber, wie gesagt, wie bisher $x^0 + \varrho\cos\gamma$, $x^1 + \varrho\sin\gamma$ als Argumente der Funktion gelten. Nun integriere ich die von γ abhängige Funktion l' längs des Kreisumfanges; es ist aber, der neuen Lage entsprechend,

$$l'(\gamma) = -\frac{\partial l}{\partial x^0}\varrho\sin(\gamma - \vartheta) + \frac{\partial l}{\partial x^1}\varrho\cos(\gamma - \vartheta),$$

wobei aber in l als Argumente wieder $x^0 + \varrho\cos\gamma$ und $x^1 + \varrho\sin\gamma$ einzusetzen sind. In diesem verschiedenen Ansatz liegt eben die Unstimmigkeit, da für $\vartheta = 0$ das Integral zwischen den Grenzen α und β natürlich den Wert $l(\beta) - l(\alpha)$ hat und daher das volle Integral über den ganzen Kreis verschwindet. Bei unserer Annahme aber wird das Vollintegral der Nichtintegrabilität (was trotz der sich aneinander stoßenden Worte natürlich kein Widersinn ist):

$$\int_0^{2\pi} l'(\gamma)\,d\gamma = \int_0^{2\pi} d\gamma\Big[-\frac{\partial l(x^0 + \varrho\cos\gamma, x^1 + \varrho\sin\gamma)}{\partial x^0}\varrho\sin(\gamma - \vartheta) + \frac{\partial l(x^0 + \varrho\cos\gamma, x^1 + \varrho\sin\gamma)}{\partial x^0}\varrho\cos(\gamma - \vartheta)\Big],$$

also nach Taylor

$$\int_0^{2\pi} l'(\gamma)\,d\gamma = \int_0^{2\pi} d\gamma\Big[-\frac{\partial l(x^0, x^1)}{\partial x^0}\varrho\sin(\gamma - \vartheta) + \frac{\partial l(x^0, x^1)}{\partial x^1}\varrho\cos(\gamma - \vartheta)\Big]$$
$$+ \int_0^{2\pi} d\gamma\Big[-\frac{\partial^2 l(x^0, x^1)}{(\partial x^0)^2}\varrho^2\cos\gamma\sin(\gamma - \vartheta)$$
$$+ \frac{\partial^2 l(x^0, x^1)}{\partial x^0\,\partial x^1}\varrho^2[\cos\gamma\cos(\gamma - \vartheta) - \sin\gamma\sin(\gamma - \vartheta)]$$
$$+ \frac{\partial^2 l(x^0, x^1)}{(\partial x^1)^2}\varrho^2\sin\gamma\cos(\gamma - \vartheta)\Big] + \ldots$$

Das erste Integral der rechten Seite verschwindet, desgleichen das mit dem Faktor $\frac{\partial^2 l}{\partial x^0 \partial x^1}$, da

$$\cos\gamma\cos(\gamma-\vartheta)-\sin\gamma\sin(\gamma-\vartheta)=\cos(2\gamma-\vartheta)$$

ist, was bei der Integration $\frac{1}{2}\sin(2\gamma-\vartheta)$ liefert und daher für diese Grenzen verschwindet. Entsprechend erhält man für

$$\int_0^{2\pi}\cos\gamma\sin(\gamma-\vartheta)\,d\gamma=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin 2\gamma\cos\vartheta-\frac{1+\cos 2\gamma}{2}\sin\vartheta\right)d\gamma$$
$$=-\pi\sin\vartheta$$

und

$$\int_0^{2\pi}\sin\gamma\cos(\gamma-\vartheta)\,d\gamma=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin 2\gamma\cos\vartheta+\frac{1-\cos 2\gamma}{2}\sin\vartheta\right)d\gamma$$
$$=\pi\sin\vartheta.$$

Daher wird, abgesehen von Gliedern höherer Ordnung in ϱ:

$$\int_0^{2\pi} l'(\gamma)\,d\gamma=\pi\varrho^2\sin\vartheta\left(\frac{\partial^2 l(x^0,x^1)}{(\partial x^0)^2}+\frac{\partial^2 l(x^0,x^1)}{(\partial x^1)^2}\right).$$

Führt man daher die Funktion $l(x^0, x^1)$ um den Rand eines um den Winkel ϑ gedrehten Flächenelementes herum, so erhält sie einen Zuwachs, der gleich dem Produkt aus dem Inhalt des Elementes, dem Sinus des Drehungswinkels und dem Laplaceschen Operator, angewandt auf die Funktion l, ist. Legt man statt des Kartesischen ein beliebiges Koordinatensystem zugrunde, so erhält man natürlich die Gleichung:

$$\int_0^{2\pi} l'(\gamma)\,d\gamma=\pi\varrho^2\sin\vartheta\cdot\operatorname{Div}\operatorname{Grad} l$$
$$=\pi\varrho^2\sin\vartheta\cdot\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\sqrt{G}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial l}{\partial x^\nu},$$

die auch dann anzuwenden ist, wenn die Fläche keine Ebene ist.

Der dreidimensionale Fall. Für den Fall dreier Ausdehnungen sei das — wiederum zunächst Kartesisch vorausgesetzte — Koordinatensystem so gelegt, daß die x^2-Achse auf der Ebene des Drehungsvektors senkrecht steht. Dann fällt die Nichtintegrabilität in der $x^0\,x^1$-Ebene so aus wie im zweidimensionalen Fall. Für eine andere Ebene aber hat man zu beachten, daß deren Lage durch die Drehung ebenfalls ver-

ändert wird, so daß die Nichtintegrabilität in zwei Teile zerfällt, erstens in den, der durch die Drehung in der Ebene, und zweitens in den, der durch die Drehung der Ebene selbst dargestellt wird. Ersteren will ich die parallele, letzteren die orthogonale Nichtintegrabilität nennen. Ich lege nun die x^0-Achse so, daß sie den Winkel der beiden Spurlinien halbiert, die unsere Ebene vor und nach der Drehung in der $x^0 x^1$-Ebene erzeugt. Natürlich hat dieser Winkel die Größe ϑ. Bei dieser Anordnung fällt die Schnittgerade der beiden Lagen der gedrehten Ebenen in die $x^1 x^2$-Ebene und bildet dort den Winkel β mit der x^1-Achse; dieser Winkel ist zugleich der bei der Drehung unveränderliche Neigungswinkel der gedrehten Ebene gegen die $x^0 x^1$-Ebene. Nun gebe $\frac{\pi}{2} - \gamma$ den Winkel an, den der Radiusvektor nach einem beliebigen Punkte in der Ebene vor und nach der Drehung mit der Spur in der $x^0 x^1$-Ebene bildet; so sind nach den Formeln der sphärischen Trigonometrie die Koordinaten vor der Drehung:

$$x^0 + \varrho\left(\sin\gamma\cos\frac{\vartheta}{2} + \cos\beta\cos\gamma\sin\frac{\vartheta}{2}\right),$$

$$x^1 + \varrho\left(\cos\beta\cos\gamma\cos\frac{\vartheta}{2} - \sin\gamma\sin\frac{\vartheta}{2}\right),$$

$$x^2 + \varrho\sin\beta\cos\gamma,$$

nach der Drehung

$$x^0 + \varrho\left(\sin\gamma\cos\frac{\vartheta}{2} - \cos\beta\cos\gamma\sin\frac{\vartheta}{2}\right),$$

$$x^1 + \varrho\left(\cos\beta\cos\gamma\cos\frac{\vartheta}{2} + \sin\gamma\sin\frac{\vartheta}{2}\right),$$

$$x^2 + \varrho\sin\beta\cos\gamma.$$

Man erhält also wie früher, gemäß der neuen Lage:

$$\int_0^{2\pi} l'(\gamma)\,d\gamma = \int_0^{2\pi} d\gamma\left[\frac{\partial l}{\partial x^0}\varrho\left(\cos\gamma\cos\frac{\vartheta}{2} + \cos\beta\sin\gamma\sin\frac{\vartheta}{2}\right) + \frac{\partial l}{\partial x^1}\varrho\right.$$

$$\left.\left(-\cos\beta\sin\gamma\cos\frac{\vartheta}{2} + \cos\gamma\sin\frac{\vartheta}{2}\right) - \frac{\partial l}{\partial x^2}\varrho\sin\beta\sin\gamma\right].$$

Dabei sind als Argumente von l anzusehen die alten Koordinaten (in den oberen Zeilen). Entwickelt man dies nach Taylor, so erhält man:

$$\int_0^{2\pi} l'(\gamma)\,d\gamma = \pi\varrho^2\left[\cos\beta\sin\vartheta\left(\frac{\partial^2 l}{(\partial x^0)^2} + \frac{\partial^2 l}{(\partial x^1)^2}\right) + 2\sin\beta\sin\frac{\vartheta}{2}\frac{\partial^2 l}{\partial x^1\,\partial x^2}\right].$$

Hiervon stellt das erste Glied die parallele, das zweite die orthogonale Nichtintegrabilität dar (in Analogie mit Weyls Zerlegung der Vektorkrümmung S. 109). Bezeichnet man den Neigungswinkel der beiden Lagen der gedrehten Ebene gegeneinander mit ν, so ist in der Tat

$$\sin\frac{\nu}{2} = \sin\beta\sin\frac{\vartheta}{2}\,.$$

Soll der orthogonale Teil verschwinden, so muß man eine Funktion l wählen, deren Gradient in die Ebene des Drehungsvektors fällt, so daß also $\partial l/\partial x^2$ verschwindet. Für eine derartige Funktion ist dann weiter

$$\int_0^{2\pi} l'(\gamma)\,d\gamma = \pi\varrho^2\cos\beta\sin\vartheta\left(\frac{\partial^2 l}{(\partial x^0)^2}+\frac{\partial^2 l}{(\partial x^1)^2}+\frac{\partial^2 l}{(\partial x^3)^2}\right)$$
$$= \pi\varrho^2\cos\beta\sin\vartheta\,\mathrm{Div\,Grad}\,l.$$

Dabei ist natürlich $\cos\beta\sin\vartheta$ die Komponente des Drehungsvektors in der betrachteten Ebene.

Der vierdimensionale Fall. Sind beliebig viel Ausdehnungen gegeben, so erhält man das allgemeine Ergebnis der Drehung der Punkte eines Kreises am einfachsten aus der Multiplikation der Matrizen $\Gamma\cdot A\cdot\Theta$. Dabei legt die erste Matrix

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 & \dots \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

den Fahrstrahl in der Ebene des Kreises gegen eine beliebige, aber unveränderliche Anfangsrichtung fest. Die zweite

$$A = \begin{vmatrix} a_0^{\,0} & a_0^{\,1} & a_0^{\,2} & a_0^{\,3} & \dots \\ a_1^{\,0} & a_1^{\,1} & a_1^{\,2} & a_1^{\,3} & \dots \\ a_2^{\,0} & a_2^{\,1} & a_2^{\,2} & a_2^{\,3} & \dots \\ a_3^{\,0} & a_3^{\,1} & a_3^{\,2} & a_3^{\,3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

bestimmt die Lage der gedrehten Ebene zu denen des Drehungsvektors, der gegeben ist durch

$$\Theta = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 & 0 & \dots \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \cos\vartheta^* & \sin\vartheta^* & \dots \\ 0 & 0 & -\sin\vartheta^* & \cos\vartheta^* & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Diese Matrix enthält soviel voneinander unabhängige Drehungswinkel ϑ, ϑ^* usw., wie 2 in der Ausdehnungszahl aufgeht; ist diese ungerade, so schließt die Matrix rechts unten mit 1. Für 4 Ausdehnungen lautet das Matrizenprodukt

$$\Gamma \cdot A \cdot \Theta = \begin{vmatrix} a_0^0 \cos\gamma\cos\vartheta - a_1^0 \sin\gamma\cos\vartheta - a_0^1 \cos\gamma\sin\vartheta + a_1^1 \sin\gamma\sin\vartheta, \\ a_0^0 \sin\gamma\cos\vartheta + a_1^0 \cos\gamma\cos\vartheta - a_0^1 \sin\gamma\sin\vartheta - a_1^1 \cos\gamma\sin\vartheta, \\ a_2^0 \cos\vartheta - a_2^1 \sin\vartheta, \\ a_3^0 \cos\vartheta - a_3^1 \sin\vartheta, \\ a_0^0 \cos\gamma\sin\vartheta - a_1^0 \sin\gamma\sin\vartheta + a_0^1 \cos\gamma\cos\vartheta - a_1^1 \sin\gamma\cos\vartheta, \\ a_0^0 \sin\gamma\sin\vartheta + a_1^0 \cos\gamma\sin\vartheta + a_0^1 \sin\gamma\cos\vartheta + a_1^1 \cos\gamma\cos\vartheta, \\ a_2^0 \sin\vartheta + a_2^1 \cos\vartheta, \\ a_3^0 \sin\vartheta + a_3^1 \cos\vartheta, \\ a_0^2 \cos\gamma\cos\vartheta^* - a_1^2 \sin\gamma\cos\vartheta^* - a_0^3 \cos\gamma\sin\vartheta^* + a_1^3 \sin\gamma\sin\vartheta^*, \\ a_0^2 \sin\gamma\cos\vartheta^* + a_1^2 \cos\gamma\cos\vartheta^* - a_0^3 \sin\gamma\sin\vartheta^* - a_1^3 \cos\gamma\sin\vartheta^*, \\ a_2^2 \cos\vartheta^* - a_2^3 \sin\vartheta^*, \\ a_3^2 \cos\vartheta^* - a_3^3 \sin\vartheta^*, \\ a_0^2 \cos\gamma\sin\vartheta^* - a_1^2 \sin\gamma\sin\vartheta^* + a_0^3 \cos\gamma\cos\vartheta^* - a_1^3 \sin\gamma\cos\vartheta^*, \\ a_0^2 \sin\gamma\sin\vartheta^* + a_1^2 \cos\gamma\sin\vartheta^* + a_0^3 \sin\gamma\cos\vartheta^* + a_1^3 \cos\gamma\cos\vartheta^*, \\ a_2^2 \sin\vartheta^* + a_2^3 \cos\vartheta^*, \\ a_3^2 \sin\vartheta^* + a_3^3 \cos\vartheta^*. \end{vmatrix}$$

Die erste Zeile dieser Matrix gibt die Richtung des Fahrstrahles nach der Drehung wieder, die zweite den negativen Differentialquotienten der ersten nach $d\gamma$.

Wie im Fall dreier Ausdehnungen hat man hier eine parallele von einer orthogonalen Nichtintegrabilität zu unterscheiden; um auch letztere richtig zu erhalten, lasse ich die Drehung von der Lage $-\frac{1}{2}\Theta$ nach $+\frac{1}{2}\Theta$ erfolgen. Für die parallele ist das offenbar gleichbedeutend mit der Drehung von 0 bis Θ, wie auch das Ergebnis zeigt. Dieses lautet:

$$\int_0^{2\pi} l(\gamma)\,d\gamma = \pi\varrho^2\left\{\left|\begin{matrix}\alpha_0^0 & \alpha_0^1\\ \alpha_1^0 & \alpha_1^1\end{matrix}\right|\sin\vartheta\left(\frac{\partial^2 l}{(\partial x^0)^2}+\frac{\partial^2 l}{(\partial x^1)^2}\right)+\left|\begin{matrix}\alpha_0^2 & \alpha_0^3\\ \alpha_1^2 & \alpha_1^3\end{matrix}\right|\sin\vartheta^*\cdot\left(\frac{\partial^2 l}{(\partial x^2)^2}+\frac{\partial^2 l}{(\partial x^3)^2}\right)\right.$$

$$+2\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta^*}{2}\left[-\left|\begin{matrix}\alpha_0^1 & \alpha_0^2\\ \alpha_1^1 & \alpha_1^2\end{matrix}\right|\frac{\partial^2 l}{\partial x^0\,\partial x^3}-\left|\begin{matrix}\alpha_0^1 & \alpha_0^3\\ \alpha_1^1 & \alpha_1^3\end{matrix}\right|\frac{\partial^2 l}{\partial x^0\,\partial x^3}\right.$$

$$\left.+\left|\begin{matrix}\alpha_0^0 & \alpha_0^2\\ \alpha_1^0 & \alpha_1^2\end{matrix}\right|\frac{\partial^2 l}{\partial x^1\,\partial x^3}+\left|\begin{matrix}\alpha_0^0 & \alpha_0^3\\ \alpha_1^0 & \alpha_1^3\end{matrix}\right|\frac{\partial^2 l}{\partial x^1\,\partial x^3}\right]$$

$$+2\sin\frac{\vartheta^*}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\left[\left|\begin{matrix}\alpha_0^0 & \alpha_0^3\\ \alpha_1^0 & \alpha_1^3\end{matrix}\right|\frac{\partial^2 l}{\partial x^0\,\partial x^3}-\left|\begin{matrix}\alpha_0^0 & \alpha_0^2\\ \alpha_1^0 & \alpha_1^2\end{matrix}\right|\frac{\partial^2 l}{\partial x^0\,\partial x^3}\right.$$

$$\left.\left.+\left|\begin{matrix}\alpha_0^1 & \alpha_0^3\\ \alpha_1^1 & \alpha_1^3\end{matrix}\right|\frac{\partial^2 l}{\partial x^1\,\partial x^3}-\left|\begin{matrix}\alpha_0^1 & \alpha_0^2\\ \alpha_1^1 & \alpha_1^2\end{matrix}\right|\frac{\partial^2 l}{\partial x^1\,\partial x^3}\right]\right\}.$$

In der ersten Zeile steht die parallele, in den beiden anderen die orthogonale Nichtintegrabilität. Die erstere enthält in

$$\left|\begin{matrix}\alpha_0^0 & \alpha_0^1\\ \alpha_1^0 & \alpha_1^1\end{matrix}\right|\sin\vartheta \quad\text{und}\quad \left|\begin{matrix}\alpha_0^2 & \alpha_0^3\\ \alpha_1^2 & \alpha_1^3\end{matrix}\right|\sin\vartheta^*$$

die Komponenten der beiden Drehungsvektoren in der betrachteten Ebene.

Um die orthogonale Nichtintegrabilität zum Verschwinden zu bringen, kann man entweder eine Funktion l zugrunde legen, deren Gradient in einer der beiden Drehungsebenen liegt oder aber eine solche, bei der wenigstens die gemischten Differentialquotienten nach Richtungen in beiden Ebenen, also $\frac{\partial^2 l}{\partial x^0\,\partial x^2}$ usf. verschwinden. Im ersten Falle kann man sofort wieder schreiben, wenn man Grad l in der ϑ-Ebene annimmt:

$$\int_0^{2\pi} l(\gamma)\,d\gamma = \pi\varrho^2\left|\begin{matrix}\alpha_0^0 & \alpha_0^1\\ \alpha_1^0 & \alpha_1^1\end{matrix}\right|\sin\vartheta\cdot\left(\frac{\partial^2 l}{(\partial x^0)^2}+\frac{\partial^2 l}{(\partial x^1)^2}+\frac{\partial^2 l}{(\partial x^2)^2}+\frac{\partial^2 l}{(\partial x^3)^2}\right)$$

$$=\pi\varrho^2\left|\begin{matrix}\alpha_0^0 & \alpha_0^1\\ \alpha_1^0 & \alpha_1^1\end{matrix}\right|\sin\vartheta\cdot\operatorname{Div}\operatorname{Grad} l.$$

Liegt also der Gradient der Funktion l in der Ebene des Drehungsvektors ϑ, so ist die Nichtintegrabilität in jeder Ebene gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt, der Komponente des Drehungsvektors in dieser Ebene und dem Laplaceschen Operator, angewandt auf die Funktion l. Entsprechendes gilt natürlich auch für den Vektor ϑ^* und ferner in einer Mannigfaltigkeit beliebiger Krümmung. Soll auch

Eichinvarianz bestehen, so muß zu Div Grad l noch der Summand $g^{\mu\nu}\varphi_\nu \frac{\partial l}{\partial x^\mu}$ hinzutreten (vgl. Weyl, S. 105 unten).

Dies hat man heranzuziehen, um die von mir als elektromagnetischen Sechservektor gedeutete Drehung mit dem Weyls zu vergleichen, der ihn gleich der Streckenkrümmung setzt (S. 112). Diese aber hängt (S. 109) mit der Nichtintegrabilität dadurch zusammen, daß letztere

$$\nabla l = -l\nabla\varphi = -\tfrac{1}{2} l f_{ik} \Delta_{ik}$$

ist. Hierin ist f_{ik} die Streckenkrümmung $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i}$, also der Weylsche Sechservektor des Elektromagnetismus, $\frac{1}{2}\Delta x_{ik}$ der Inhalt des umlaufenen Flächenelementes[1]) und l die herumgeführte Strecke. Um den Vergleich durchzuführen, habe ich zunächst

$$\text{Div Grad } l = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{G} g^{\mu\nu} \frac{\partial l}{\partial x^\nu}$$

zu bilden; nun ist aber nach Weyl (S. 104f.) der Gradient $\frac{\partial l}{\partial x^\nu}$ durch $-l\varphi_\nu$ zu ersetzen. Also wird

$$\text{Div Grad } l = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{G} g^{\mu\nu}\varphi_\nu l = -\frac{l}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{G} g^{\mu\nu}\varphi_\nu$$
$$- g^{\mu\nu}\varphi_\nu \frac{\partial l}{\partial x^\mu} = -l[\text{Div}\,\varphi - g^{\mu\nu}\varphi_\nu\varphi_\mu]$$

oder

$$\text{Div Grad } l + g^{\mu\nu}\varphi_\nu \frac{\partial l}{\partial x^\mu} = -l\,\text{Div}\,\varphi = -\frac{l}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{G}\varphi^\mu.$$

Ich habe also Übereinstimmung meiner Definition des Elektromagnetismus mit der Weylschen bis auf den skalaren Faktor

$$\mathfrak{a} = \text{Div}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{G}\varphi^\mu, \tag{1}$$

oder anders ausgedrückt: Es ist der elektromagnetische Sechservektor nach meiner Festsetzung[2]):

$$M_{ki} = f_{ik} : \mathfrak{a} = f_{ik} : \text{Div}\,\varphi. \tag{2}$$

1) Bei Weyl ist die Festsetzung etwas anders; versteht man aber unter f_{ik} die Komponente der Streckenkrümmung in der Ebene des Elementes Δx_{ik}, wie ich es tue, so ergibt sich der obige Ansatz.

2) Ich habe außerdem die Indizes i und k vertauscht [vgl. I S. 169, Gleichung (80)].

Aber das gilt nur, solange die Strecke l keinen Gradienten oder besser das Potential φ keine Komponenten in der ϑ^*-Fläche besitzt, der Sechservektor sich also auf einen elektrostatischen umtransformieren lassen kann. In diesem Falle ist es aber möglich, daß nicht nur f_{ik}, sondern auch M_{ik} die Maxwellsche Bedingung

$$\mathrm{Div}_i M_{ik}^* = 0$$

erfüllt. Denn es ist, da $\mathfrak{a}$ skalar ist:

$$-\mathrm{Div}_i M_{ik}^* = \frac{1}{\mathfrak{a}} \mathrm{Div}_i f_{ik}^* + f_{ik}^* \frac{\partial \frac{1}{\mathfrak{a}}}{\partial x^i}.$$

Es muß also

$$f_{ik}^* \frac{\partial \frac{1}{\mathfrak{a}}}{\partial x^i}$$

verschwinden. Nun kann man aber das Koordinatensystem so wählen (eben im elektrostatischen Falle!), daß alle f_{ik}^* bis auf eines verschwinden, woraus sich ergibt, daß der Skalar $1/\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{a}$ nur von den beiden Koordinaten abhängen darf, die in der Parameterfläche des Vektors f (und zugleich ϑ) liegen. Diese Bedingung würde noch einfacher erfüllt, wenn der Skalar $\mathfrak{a}$ zu einer Konstanten wird. Dann unterscheidet sich der Weylsche Sechservektor von dem meinigen nur durch einen konstanten Faktor, was unwesentlich ist. Selbstverständlich dürfte dann $\mathfrak{a}$ nicht verschwinden, wie das bei Weyl zutrifft [S. 123, Gleichung (21)], der $\mathfrak{a}$ als Divergenz der Elektrizitätsladung deutet. Letztere erhält bei mir vielmehr einen anderen Ausdruck.

Im allgemeinen Fall aber, wo sich der Sechservektor nicht auf einen statischen zurückführen läßt, sondern auf zwei Komponenten in zueinander „dualen" Parameterflächen, als die ich die $x^0 x^1$- und $x^2 x^3$-Fläche wähle, während die übrigen Komponenten gleich Null sind, verschwindet doch für das Weylsche l die orthogonale Nichtintegrabilität, da zwar die quasi Gradienten von l, also die Komponenten des Potentials φ, in beiden Flächen liegen, aber die Ableitungen dieser Komponenten nach den in der anderen Fläche gelegenen Richtungen gleich Null sind. Denn es treten ja eben keine Komponenten des Sechservektors in den Flächen auf, die die Parameter der beiden dualen Flächen gemischt enthalten; es wird also

$$\frac{\partial^2 l}{\partial x^0 \partial x^2} = \frac{\partial^2 l}{\partial x^0 \partial x^3} = \frac{\partial^2 l}{\partial x^1 \partial x^2} = \frac{\partial^2 l}{\partial x^1 \partial x^3} = 0.$$

Man erhält also die Nichtintegrabilität rein parallel zu

$$\nabla l = \int_0^{2\pi} l'(\gamma)\, d\gamma = \pi \varrho^2 \left\{ L_{ki} \left(\frac{\partial^2 l}{(\partial x^0)^2} + \frac{\partial^2 l}{(\partial x^1)^2} \right) + N_{ki} \left(\frac{\partial^2 l}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2 l}{(\partial x^3)^2} \right) \right\},$$

was auf

$$f_{ik} = L_{ki} \cdot a_{\mathrm{I}} + N_{ki} \cdot a_{\mathrm{II}} \tag{3}$$

führt. Darin sind a_{I} und a_{II} gleichfalls zwei Skalare, deren Summe

$$a_{\mathrm{I}} + a_{\mathrm{II}} = a = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{G}\, \varphi^\mu = \mathrm{Div}\, \varphi$$

ist. Die beiden Teile a_{I} und a_{II} kann man übrigens getrennt erhalten, wenn man den Vektor φ in zwei Komponenten φ_{I} und φ_{II} in der $x^0 x^1$- und $x^2 x^3$-Fläche zerlegt. Dann ist

$$a_{\mathrm{I}} = \mathrm{Div}\, \varphi_{\mathrm{I}} \quad \text{und} \quad a_{\mathrm{II}} = \mathrm{Div}\, \varphi_{\mathrm{II}}. \tag{4}$$

Um die Vektoren L_{ki} und N_{ki} aus M_{ki} herzuleiten, nehme ich, um bei einfachen Bezeichnungen bleiben zu können, eine Minkowskische Mannigfaltigkeit mit Kartesischem Koordinatensystem zunächst an. Da aber bei Übertragung auf eine allgemeine Mannigfaltigkeit mit beliebigem Sy tem sich nur die Bezeichnungen, aber nicht die Begriffe[1]) ändern, gilt die folgende Herleitung allgemein. Selbstverständlich ist zunächst

$$L_{ki} + N_{ki} = M_{ki},$$

dann aber gewinnt man beide durch Projektion der beiden Größen $\sin\vartheta$ und $\sin\vartheta^*$ aus deren Ebenen in die ki-Ebene. Sind u und v die Kosinus der betreffenden Neigungswinkel, so wird $L_{ki} = u \cdot \sin\vartheta$, $N_{ki} = v \cdot \sin\vartheta^*$, also

$$u \sin\vartheta + v \sin\vartheta^* = M_{ki}.$$

Ebenso gilt

$$u^* \sin\vartheta + v^* \sin\vartheta^* = M_{ki}^*$$

in der zur ki-Ebene dualen Fläche; dabei ist nach einem einfachen mathematischen Satze $u^* = v$, $v^* = u$. So ergeben sich für u und v zwei Gleichungen mit den Lösungen

---

1) Im allgemeinen Falle wird

$$M_{ik}^* = \sqrt{G} \cdot M^{pq}, \quad M^{ik*} = \frac{1}{\sqrt{G}} M_{pq},$$

wenn i, k, p, q sämtliche 4 Indizes sind.

$$u = \frac{M_{kl}\sin\vartheta - M_{kl}^*\sin\vartheta^*}{\sin^2\vartheta - \sin^2\vartheta^*}, \quad v = \frac{M_{kl}^*\sin\vartheta - M_{kl}\sin\vartheta^*}{\sin^2\vartheta - \sin^2\vartheta^*}.$$

Daraus aber folgt

$$L_{kl} = \frac{M_{kl}\sin^2\vartheta - M_{kl}^*\sin\vartheta\sin\vartheta^*}{\sin^2\vartheta - \sin^2\vartheta^*}, \quad N_{kl} = \frac{M_{kl}^*\sin\vartheta\sin\vartheta^* - M_{kl}\sin^2\vartheta^*}{\sin^2\vartheta - \sin^2\vartheta^*}$$

und

$$f_{ik} = M_{kl}\frac{a_I\sin^2\vartheta - a_{II}\sin^2\vartheta^*}{\sin^2\vartheta - \sin^2\vartheta^*} + M_{kl}^*\frac{(a_{II} - a_I)\sin\vartheta\sin\vartheta^*}{\sin^2\vartheta - \sin^2\vartheta^*}$$
$$= M_{kl}\mathfrak{p}_I + M_{kl}^*\mathfrak{p}_{II}.$$

Um die skalaren Faktoren $\mathfrak{p}_I$ und $\mathfrak{p}_{II}$ zu berechnen, führe ich zunächst die beiden Skalare des Sechservektors M_{kl}:

$$\mathfrak{M}^2 = M_{kl}M^{kl} = \mathfrak{M}^{*2} \quad \text{und} \quad (\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*) = M_{kl}M^{kl*} = M_{kl}^*M^{kl}$$

ein, auf die sich $\sin\vartheta$ und $\sin\vartheta^*$ vermittelst der Gleichungen zurückführen lassen:

$$\sin^2\vartheta + \sin^2\vartheta^* = \mathfrak{M}^2, \quad 2\sin\vartheta\sin\vartheta^* = (\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*),$$
$$\sin\vartheta = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{\mathfrak{M}^2 + (\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*)} + \sqrt{\mathfrak{M}^2 - (\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*)}\right],$$
$$\sin\vartheta^* = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{\mathfrak{M}^2 + (\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*)} - \sqrt{\mathfrak{M}^2 - (\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*)}\right].$$

Dann erhält man für die obigen Skalare:

$$\mathfrak{p}_I = \frac{1}{2\sqrt{\mathfrak{M}^4 - (\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*)^2}}\left[(a_I - a_{II})\cdot\mathfrak{M}^2 + (a_I + a_{II})\sqrt{\mathfrak{M}^4 - (\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*)^2}\right];$$

$$\mathfrak{p}_{II} = -\frac{(a_I - a_{II})\cdot(\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*)}{2\sqrt{\mathfrak{M}^4 - (\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*)^2}}.$$

Es ist zweckmäßig, die Skalare des Vektors f_{ik}

$$\mathfrak{f}^2 = f_{ik}f^{ik} \quad \text{und} \quad (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*) = f_{ik}f^{ik*}$$

einzuführen. Man erhält

$$\mathfrak{f}^2 = \mathfrak{M}^2(\mathfrak{p}_I^2 + \mathfrak{p}_{II}^2) + 2(\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*)\mathfrak{p}_I\mathfrak{p}_{II}$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[(a_I^2 + a_{II}^2)\mathfrak{M}^2 + (a_I^2 - a_{II}^2)\sqrt{\mathfrak{M}^4 - (\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*)^2}\right],$$
$$(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*) = (\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*)(\mathfrak{p}_I^2 + \mathfrak{p}_{II}^2) + 2\mathfrak{M}^2\mathfrak{p}_I\mathfrak{p}_{II} = a_Ia_{II}(\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*).$$

Hieraus folgt umgekehrt:

$$\mathfrak{M}^2 = \frac{1}{2a_I^2a_{II}^2}\left[(a_I^2 + a_{II}^2)\mathfrak{f}^2 - (a_I^2 - a_{II}^2)\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2}\right],$$

$$(\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*) = \frac{4}{a_Ia_{II}}(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*),$$

$$\sqrt{\mathfrak{M}^4 - (\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*)^2} = \frac{1}{2\mathfrak{a}_I^2\mathfrak{a}_{II}^2}$$
$$[-(\mathfrak{a}_I^2 - \mathfrak{a}_{II}^2)\mathfrak{f}^2 + (\mathfrak{a}_I^2 + \mathfrak{a}_{II}^2)\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2}],$$

$$\mathfrak{p}_I = \frac{\mathfrak{a}_I\mathfrak{a}_{II}[-(\mathfrak{a}_I - \mathfrak{a}_{II})\mathfrak{f}^2 + (\mathfrak{a}_I + \mathfrak{a}_{II})\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2}}{-(\mathfrak{a}_I^2 - \mathfrak{a}_{II}^2)\mathfrak{f}^2 + (\mathfrak{a}_I^2 + \mathfrak{a}_{II}^2)\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2}},$$

$$\mathfrak{p}_{II} = -\frac{\mathfrak{a}_I\mathfrak{a}_{II}(\mathfrak{a}_I - \mathfrak{a}_{II})(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)}{-(\mathfrak{a}_I^2 - \mathfrak{a}_{II}^2)\mathfrak{f}^2 + (\mathfrak{a}_I^2 + \mathfrak{a}_{II}^2)\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2}}.$$

Diese Werte sind in die Gleichung

$$f_{ik} = M_{ki}\mathfrak{p}_I + M_{ki}^*\mathfrak{p}_{II} \tag{5}$$

und die aus ihr ableitbare

$$M_{ki} = f_{ik}\frac{\mathfrak{p}_I}{\mathfrak{p}_I^2 - \mathfrak{p}_{II}^2} - f_{ik}^*\frac{\mathfrak{p}_{II}}{\mathfrak{p}_I^2 - \mathfrak{p}_{II}^2} \quad ^1) \tag{6}$$

einzusetzen, die den Zusammenhang zwischen dem Weylschen Sechservektor f_{ik} und meinem M_{ki} angeben. Für den elektrostatischen Fall wird $\mathfrak{p}_{II} = 0$, $\mathfrak{p}_I = \mathfrak{a}_I\ (= \mathfrak{a})$, woraus wieder die Gleichung $f_{ik} = M_{ki}\mathfrak{a}$ hervorgeht.

II. Teil. Die Weltfunktion.

Die zweite von mir angenommene Wirkung der Elektronen bestand in einer Streckung der Parameterlinien oder Verzerrung des Koordinatensystems (I, S. 150). Diese setzte ich als Skalar voraus und habe in meiner Arbeit II die Durchführbarkeit dieser Annahme für den allgemeinen Fall nachgewiesen, wobei ich an der weiteren Hypothese festhielt, daß eine Verzerrung nicht für den Ruhraum des erzeugenden Elektrons, sondern nur für die zeitliche Koordinate in Betracht käme; ich habe aber mehrfach angedeutet (Nachtrag zu I, S. 174 oder II, S. 24), daß darin nicht das Wesen meiner Theorie liegt, sondern daß sie sich auch auf den Fall anwenden läßt, daß der Ruhraum in radialer Richtung ebenfalls eine Verzerrung erfährt, wie das Einstein annimmt und durch die

1) Übrigens sind diese Faktoren

$$\frac{\mathfrak{p}_I}{\mathfrak{p}_I^2 - \mathfrak{p}_{II}^2} = \frac{-(\mathfrak{a}_I - \mathfrak{a}_{II})\mathfrak{f}^2 + (\mathfrak{a}_I + \mathfrak{a}_{II})\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2}}{2\mathfrak{a}_I\mathfrak{a}_{II}\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2}},$$

$$\frac{\mathfrak{p}_{II}}{\mathfrak{p}_I^2 - \mathfrak{p}_{II}^2} = \frac{-(\mathfrak{a}_I - \mathfrak{a}_{II})(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)}{2\mathfrak{a}_I\mathfrak{a}_{II}\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2}}.$$

bekannten experimentellen Belege stützt. Übrigens ergibt sich aus meiner Arbeit II, daß nur die Änderung des Krümmungsmaßes infolge der Verzerrung als doppelte Gradientendivergenz ausgedrückt zu werden braucht [II, S. 17, Gleichung (1)], so daß ich nicht genötigt bin, von dem Minkowskischen Kontinum als unverzerrter Mannigfaltigkeit auszugehen, sondern z. B. auch Einsteins Zylinderwelt zugrunde legen könnte.

Wesentlich kommt aber für den Augenblick nur in Betracht, daß eben die Gravitationswirkungen durch die als Skalar aufzufassende Verzerrung als Potential hervorgebracht werden, daß also eine solche koordinateninvariante Größe existiert, die eingeführt werden muß, um die tatsächlich vorhandenen Krümmungsverhältnisse aus der Menge aller denkmöglichen herauszuheben. Dies kann selbstverständlich nur durch die Annahme einer besonderen Weltfunktion geschehen, aus der sich die Feldgleichung

$$\mathfrak{R} = 2\,\mathrm{Div}\,\mathrm{Grad}\,\mathfrak{A} \tag{1}$$

oder eine entsprechende ergeben muß, die auch eichungsinvariant ist.

Nun können aber in diese Weltfunktion auch das skalare Gravitationspotential $\mathfrak{A}$, sowie die „Strecke" seines Gradienten

$$\mathfrak{g}^2 = g^{\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\nu} \tag{2}$$

aufgenommen werden, wenn man von höheren Ableitungen absieht. Dabei ist das Potential $\mathfrak{A}$ nach Weyls Bezeichnung vom Gewicht Null, da es als Logarithmus der Lichtgeschwindigkeit, d. h. des Verhältnisses des (mittleren) Längenmaßes zum Zeitmaß gedeutet werden kann (II, S. 20). Die zweite Invariante $\mathfrak{g}^2$ erhält dann das Gewicht -1. Ferner will ich noch außer dem einen elektromagnetischen Skalar $\mathfrak{f}^2$ den zweiten $(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)$ aufnehmen. Unter Berücksichtigung dieser Größen kann man nun das Weylsche besondere Wirkungsprinzip (S. 121) abändern und die Weltfunktion

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{f}^2 + a\cdot(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*) + \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{F}^2 + 2\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{F}\cdot\mathfrak{g}^2 + \mathfrak{D}\cdot\mathfrak{g}^4 \tag{3}$$

setzen. Hierin bedeutet $\mathfrak{W}$ das Weylsche W, also eine Invariante vom Gewicht -2, die das Integral

$$\int\int\int\int \mathfrak{W}\sqrt{G}\,dx^0\,dx^1\,dx^2\,dx^3$$

eichungs- und koordinateninvariant macht. Ich bezeichne die Invarianten im Anschluß an meine früheren Arbeiten immer mit deutschen Buchstaben; $\mathfrak{f}^2$ ist das Weylsche $4I$ (z. B. S. 132, 1); $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ sind nur von $\mathfrak{A}$ abhängige Größen. $\mathfrak{F}$ ist das Weylsche F, also (S. 110, Gleichung (7)]:

$$(4) \qquad \mathfrak{F} = -\mathfrak{K} - \frac{3}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}\, \varphi^\nu}{\partial x^\nu} - \frac{3}{2} \varphi_\nu \varphi^\nu .$$

a ist eine Konstante. Die Gravitationsfeldgleichung muß nun durch Variation der Größe $\mathfrak{A}$ herauskommen. Dabei hat man aber die kontravariante Größe $g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\nu}$ und daher auch Div Grad $\mathfrak{A}$ als unveränderlich anzusehen, da sie — zumal nach ihrer Multiplikation mit $\sqrt{G}$ — als Quantitätsgrößen den Intensitätsgrößen $\mathfrak{A}$ und $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\mu}$ gegenüberstehen (vgl. Weyl, S. 107). Entsprechend war ich auch in meiner Arbeit I verfahren (vgl. Nachtrag S. 178), ohne das Prinzip klar erkannt zu haben. Es erleichtert nun die Rechnung sehr, wenn ich $\mathfrak{F}$ als unabhängig von diesen Intensitätsgrößen ansehe, wobei ich offenbar nicht so weit zu gehen brauche wie Weyl, der $\mathfrak{F}$ konstant voraussetzt, wobei die Eichinvarianz seiner Feldgleichungen in die Brüche geht. Da ich keine zweiten Ableitungen von $\mathfrak{A}$ habe, lautet die Gravitationsgleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{B}\sqrt{G}}{\partial \mathfrak{A}} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathfrak{B}\sqrt{G}}{\partial \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\mu}} \equiv \sqrt{G}\,[\mathfrak{B}' \cdot \mathfrak{F}^2 + 2\mathfrak{C}' \cdot \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{g}^2 + \mathfrak{D}' \cdot \mathfrak{g}^4]$$

$$- \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[2(\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{F} + \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{g}^2) \sqrt{G}\, g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\nu} \right] = 0.$$

$$\mathfrak{B}' \mathfrak{F}^2 + 2\mathfrak{C}' \cdot \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{g}^2 + \mathfrak{D}' \cdot \mathfrak{g}^4 = 2(\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{F} + \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{g}^2)\, \text{Div Grad } \mathfrak{A}$$

$$+ 2 g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\nu} \frac{\partial (\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{F} + \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{g}^2)}{\partial x^\mu} .$$

Um eine meiner Feldgleichung (1) entsprechende zu erhalten, muß die Division

$$(\mathfrak{B}' \mathfrak{F}^2 + 2\mathfrak{C}' \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{g}^2 + \mathfrak{D}' \cdot \mathfrak{g}^4) : (\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{F} + \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{g}^2)$$

aufgehen und als Faktor von $\mathfrak{F}$ die Zahl -1 liefern. Letzteres wird erreicht, wenn $\mathfrak{C} = -\mathfrak{B}'$ ist; ersteres dagegen ergibt sich entweder, wenn

$$\mathfrak{D} = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{D}^2 \cdot \mathfrak{B}' - 2\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{C}' + \mathfrak{C}^2 \cdot \mathfrak{D}' = 0$$

wird. Durch Einsetzen von $-\mathfrak{C}$ für $\mathfrak{B}'$ erhält man hieraus die Beziehung

$$\frac{d\frac{\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{D}}}{d\mathfrak{A}} = -\mathfrak{C}, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{D}} + \mathfrak{b},$$

wo $\mathfrak{b}$ eine Konstante ist. Es kommen daher nur folgende zwei Ansätze für die Weltfunktion in Betracht:

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{f}^2 + \alpha(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*) + \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{F}^2 - 2\mathfrak{B}'\cdot\mathfrak{F}\cdot\mathfrak{g}^2 \tag{5}$$

oder

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{f}^2 + \alpha(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*) + \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{F}^2 + \frac{1}{\mathfrak{B}-\mathfrak{b}}[(\mathfrak{B}-\mathfrak{b})\mathfrak{F} - \mathfrak{B}'\mathfrak{g}^2]^2. \tag{6}$$

Der zweite Ansatz führt nach Division durch $-\mathfrak{B}'\mathfrak{F} + \frac{\mathfrak{B}'^2}{\mathfrak{B}-\mathfrak{b}}\mathfrak{g}^2$ zu der Feldgleichung

$$\begin{aligned} -\mathfrak{F} + \mathfrak{g}^2\frac{d\lg\frac{\mathfrak{B}'^2}{\mathfrak{B}-\mathfrak{b}}}{d\mathfrak{A}} &= 2\,\mathrm{Div}\,\mathrm{Grad}\,\mathfrak{A} + 2g^{\mu\nu}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x^\nu}\frac{\partial\lg\left(-\mathfrak{B}'\mathfrak{F}+\frac{\mathfrak{B}'^2}{\mathfrak{B}-\mathfrak{b}}\mathfrak{g}^2\right)}{\partial x^\mu} \\ &= 2\,\mathrm{Div}\,\mathrm{Grad}\,\mathfrak{A} + 2g^{\mu\nu}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x^\nu} \\ &\quad\left[\frac{\partial\lg[-\mathfrak{F}(\mathfrak{B}-\mathfrak{b})+\mathfrak{B}'\mathfrak{g}^2]}{\partial x^\mu} + \frac{d\lg\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{B}-\mathfrak{b}}}{d\mathfrak{A}}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x^\mu}\right]. \end{aligned}$$

Da nun nach (2): $g^{\mu\nu}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x^\nu}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x^\mu} = \mathfrak{g}^2$ ist, bedeutet dies

$$\begin{aligned} -\mathfrak{F} + \mathfrak{g}^2\frac{d\lg(\mathfrak{B}-\mathfrak{b})}{d\mathfrak{A}} &= 2\,\mathrm{Div}\,\mathrm{Grad}\,\mathfrak{A} \\ &\quad + 2g^{\mu\nu}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x^\nu}\frac{\partial\lg[-\mathfrak{F}(\mathfrak{B}-\mathfrak{b})+\mathfrak{B}'\mathfrak{g}^2]}{\partial x^\mu}. \end{aligned}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{-\mathfrak{F}(\mathfrak{B}-\mathfrak{b})+\mathfrak{B}'\mathfrak{g}^2}{\mathfrak{B}-\mathfrak{b}} &= 2\,\mathrm{Div}\,\mathrm{Grad}\,\mathfrak{A} \\ &\quad + 2g^{\mu\nu}\frac{\partial\mathfrak{A}}{dx^\nu}\frac{\partial\lg[-\mathfrak{F}(\mathfrak{B}-\mathfrak{b})+\mathfrak{B}'\mathfrak{g}^2]}{\partial x^\mu}. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Auf den ersten Blick scheint sich diese Feldgleichung zu empfehlen, da in ihr der eine Ausdruck $-\mathfrak{F}(\mathfrak{B}-\mathfrak{b}) + \mathfrak{B}'\mathfrak{g}^2$ eine besondere Rolle spielt (vgl. auch die elektrischen Feldgleichungen), ich glaube aber nicht, daß sich dieses Wirkungsprinzip durchführen lassen wird, da es nicht möglich sein wird, die Voraussetzung zu erfüllen, daß $\mathfrak{F}$ unabhängig von den Intensitätsgrößen $\mathfrak{A}$ und $\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x^\mu}$ wird.

Es bliebe also Ansatz 5. Dieser liefert die Feldgleichung

$$-\mathfrak{F}+2\mathfrak{g}^2\frac{d\lg\mathfrak{C}}{d\mathfrak{A}}=2\,\mathrm{Div\,Grad}\,\mathfrak{A}+2g^{\mu\nu}\frac{\partial\lg(\mathfrak{C}\mathfrak{F})}{\partial x^\mu},$$

die sich wegen

$$\mathfrak{g}^2\frac{d\lg\mathfrak{C}}{d\mathfrak{A}}=g^{\mu\nu}\frac{d\lg\mathfrak{C}}{d\mathfrak{A}}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x^\nu}=g^{\mu\nu}\frac{\partial\lg\mathfrak{C}}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x^\nu}$$

auf

$$-\mathfrak{F}=2\,\mathrm{Div\,Grad}\,\mathfrak{A}+2g^{\mu\nu}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x^\nu}\frac{\partial\lg\mathfrak{F}}{\partial x^\mu} \tag{8}$$

reduziert. In dieser Gestalt sieht man, daß tatsächlich $\mathfrak{F}$ von den Intensitätsgrößen nicht mehr abhängt, und deshalb muß ich dem Ansatz 5 für die Weltfunktion und damit der Gravitationsfeldgleichung (8) den Vorzug geben. Sie stellt auch eine der einfachsten Erweiterungen der Gleichung (1) dar, die diese eichinvariant machen, wenn auch nicht die natürlichste, bei der vielmehr $\frac{\partial\lg\mathfrak{F}}{\partial x^\mu}$ durch das elektrische Potential φ_μ ersetzt werden müßte; immerhin ist sie dadurch bemerkenswert, daß sie sich aus dem Ansatz 5 stets ergibt, welche besondere Funktion $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ man auch wählen möge. Selbstverständlich wäre auch die Gleichung (7) koordinaten- und eichinvariant.

Zur Ableitung der elektromagnetischen Gleichungen beachte man, daß

$$\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\varphi_\nu}=-\frac{3}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu}-3g^{\mu\nu}\varphi_\mu,\quad\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x^\mu}}=-3g^{\mu\nu},$$

$$\frac{\partial\mathfrak{f}^2}{\partial\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x^\mu}}=4g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\left(\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x^\beta}\right)=4f^{\mu\nu}$$

und entsprechend $\frac{\partial(\mathfrak{f}^*)}{\partial\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x^\mu}}=-4f^{\mu\nu*}$ ist. Man erhält für Ansatz 5 und 6, da $\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{g}^4$ unabhängig von φ_ν und $\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x^\mu}$ ist, gleicherweise:

$$\frac{\partial\mathfrak{B}\sqrt{G}}{\partial\varphi_\nu}-\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathfrak{B}\sqrt{G}}{\partial\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x^\mu}}\equiv-6(\mathfrak{B}\mathfrak{F}-\mathfrak{B}'\mathfrak{g}^2)\left(\frac{\partial\sqrt{G}g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu}+\sqrt{G}\,g^{\mu\nu}\varphi_\mu\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[6(\mathfrak{B}\mathfrak{F}-\mathfrak{B}'\mathfrak{g}^2)g^{\mu\nu}\sqrt{G}+4\sqrt{G}(f^{\mu\nu}+\alpha f^{\mu\nu*})\right]=0.$$

$$(9)\quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}(f^{\mu\nu}+\alpha f^{\mu\nu *})}{\partial x^\mu}=\tfrac{3}{2}(\mathfrak{B}\mathfrak{F}-\mathfrak{B}'\mathfrak{g}^2)g^{\mu\nu}\left[\varphi_\mu-\frac{\partial \lg(\mathfrak{B}\mathfrak{F}-\mathfrak{B}'\mathfrak{g}^2}{\partial x^\mu}\right].$$

Auch diese Gleichung ist koordinaten- und eichinvariant; sie kann als Feldgleichung der Elektrizität gedeutet werden. Das Gleiche gilt aber auch von der aus ihr hervorgehenden, in der $\mathfrak{p}$ einen Skalar bedeutet:

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{G}\cdot\mathfrak{p}(f^{\mu\nu}+\alpha f^{\mu\nu *})}{\partial x^\mu}=\tfrac{3}{2}\mathfrak{p}(\mathfrak{B}\mathfrak{F}-\mathfrak{B}'\mathfrak{g}^2)g^{\mu\nu} \\ \qquad\left[\varphi_\mu-\dfrac{\partial \lg(\mathfrak{B}\mathfrak{F}-\mathfrak{B}'\mathfrak{g}^2)}{\partial x^\mu}\right]+(f^{\mu\nu}+\alpha f^{\mu\nu *})\dfrac{\partial \mathfrak{p}}{\partial x^\mu}. \end{cases}$$

Aus dieser allgemeineren Gleichung würden sich der Weylsche Sechservektor

$$(11)\qquad \mathfrak{h}^{\mu\nu}=\sqrt{G}\,\mathfrak{p}(f^{\mu\nu}+\alpha f^{\mu\nu *}).$$

und der Viererstrom

$$(12)\quad \begin{cases} s^\nu=\tfrac{3}{2}\mathfrak{p}(\mathfrak{B}\mathfrak{F}-\mathfrak{B}'\mathfrak{g}^2)g^{\mu\nu}\left[\varphi_\mu-\dfrac{\partial \lg(\mathfrak{B}\mathfrak{F}-\mathfrak{B}'\mathfrak{g}^2)}{\partial x^\mu}\right] \\ \qquad\qquad +(f^{\mu\nu}+\alpha f^{\mu\nu *})\dfrac{\partial \mathfrak{p}}{\partial x^\mu} \end{cases}$$

ergeben, und selbstverständlich ist wegen der Schiefsymmetrie von $\mathfrak{h}^{\mu\nu}$

$$(13)\qquad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}\,s^\nu}{\partial x^\nu}=0,$$

die Gleichung von der Erhaltung der Elektrizität.

Die Feldgleichung (9) oder die allgemeinere (10) hat vor der Weylschen [(20) auf S. 123] nicht nur den Vorzug der Eichinvarianz, sondern auch den damit zusammenhängenden, daß die Dichte der Elektrizität nicht dem Potential proportional zu sein braucht, was doch der Erfahrung widerspricht und die seltsame Folgerung haben würde, daß im freien Äther, wo s^ν verschwindet, zugleich φ^ν und damit auch die Feldstärke gleich Null wird.

Nimmt man an, daß der Wert des skalaren Faktors $\mathfrak{B}\mathfrak{F}-\mathfrak{B}'\mathfrak{g}^2$ schon in großer Nähe der Elektronen sehr klein wird, so hat man das Postulat von Mie erfüllt, daß die Elektrizitätsdichte nur in gewissen Punkten merklich, sonst aber gering ist, wobei jedoch diese äußerst dünnen „Atmosphären" sich bis ins Unendliche erstrecken. Allerdings muß man, zu-

nächst in Gleichung (9), dann aber auch wegen der sogleich zu erörternden Bedeutung von $\mathfrak{p}$ in (10), die von dem bisher Gebräuchlichen abweichende Annahme machen, daß im statischen Falle nicht nur φ_0, sondern auch φ_1 von Null verschieden ist, da es gleich

$$\frac{d\lg(\mathfrak{B}\mathfrak{H} - \mathfrak{B}'\mathfrak{H}')}{dr} \quad (r \equiv x^1)$$

[in Gleichung (9)] sein muß, wenn s^1 verschwinden, d. h. der Zustand stationär sein soll. Aber ich glaube, daß man darum keinesfalls herumkommt, wenn man an der Eichinvarianz der elektrischen Feldgleichungen festhalten will, und es will das ja auch nichts bedeuten, da φ_1 als eine Funktion von x^1 keinen Beitrag zu den Feldgrößen liefert. Hingegen fällt dann natürlich Div φ von Null verschieden aus, und das muß ich ja gerade haben, wenn ich meinen Drehungsvektor M_{ik} auf f_α zurückführen will [vgl. I. Teil, Gleichung (2)]. Setze ich nun

$$\alpha = 0, \quad \mathfrak{p} = \frac{1}{a},$$

so erhalte ich ohne weiteres nach (11):

$$M_{ik} = -h_{ik} = -\frac{1}{\sqrt{G}}\mathfrak{h}_{ik}. \tag{14}$$

Soll diese Gleichung auch im nichtstatischen, also allgemeinen Fall gelten, so muß nach der Gleichung (6) des I. Teils

$$\mathfrak{p} = \frac{\mathfrak{p}_I}{\mathfrak{p}_I^2 - \mathfrak{p}_{II}^2} \quad \text{nebst} \quad \alpha = -\frac{\mathfrak{p}_{II}}{\mathfrak{p}_I} \tag{15, 16}$$

sein. Letzteres ist wegen der Bedeutung von $\mathfrak{p}_I$ und $\mathfrak{p}_{II}$ nur dann möglich, wenn das Verhältnis der Skalare

$$\left[-(a_I - a_{II})\mathfrak{f}^2 + (a_I + a_{II})\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2}\right] : (a_I - a_{II})(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*) \tag{17}$$

eine reine Zahl ist. Das müßte durch eine passende Eichung, die sich hier als die natürliche ergeben würde, erreicht werden. Die Bedingung (16) könnte auch dadurch ersetzt werden, daß die Verhältnisse $\mathfrak{f}^2 : (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)$ und $a_I : a_{II}$ Konstanten würden, was ja leichter zu übersehen wäre, aber meiner Ansicht nach nicht zulässig ist.

Ich gebe zu, daß sowohl die Bedingung (17) wie auch die Einführung des Skalares p in die Gleichung (10) etwas Mißliches an sich hat; es ist möglich, daß dieser Umstand durch Wahl einer passenderen Weltfunktion beseitigt werden könnte. Immerhin ist dieser Mangel geringfügig und mehr ein Schönheitsfehler, ohne der Theorie zu widersprechen.

Will man aus der Feldgleichung (8) der Gravitation die ursprüngliche Gestalt 1 herleiten, die vielleicht durch den zu $\mathfrak{R}$ hinzuzufügenden Subtrahenden $\mathfrak{R}_0$ zu erweitern wäre, der die Krümmung der unverzerrten Mannigfaltigkeit (z. B. Zylinderwelt) angibt, so erhielte man wegen (4) die weitere Gleichung

$$3\,\mathrm{Div}\,\varphi + \tfrac{3}{2}\varphi_\nu\varphi^\nu = \mathfrak{R}_0 + 2g^{\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\nu}\frac{\partial \lg \mathfrak{F}}{\partial x^\mu}, \tag{18}$$

die sehr wohl zulässig ist, da noch genügend viel zunächst unbestimmte Funktionen zur Verfügung stehen, die dahin spezialisiert werden können.

Es kam mir in dieser Arbeit darauf an, die Weylsche Definition des Elektromagnetismus mit der von mir in der als I angeführten Abhandlung gegebenen Erklärung in Übereinstimmung zu bringen. Das ist mir durch die in Gleichung (14) des II. Teiles gegebene Beziehung gelungen, allerdings bei Annahme einer besonderen Weltfunktion und einer gegen Schluß der Untersuchung spezialisierten Eichung. Gleichzeitig habe ich gezeigt, wie sich die Weylsche Theorie zu meiner Behauptung des skalaren Gravitationspotentials stellt. Es ist demnach möglich, zu einer auch im Sinne der allgemeinsten Relativitätstheorie einwandfreien Lösung des Weltproblems mit der Aufstellung invarianter Feldgleichungen für Gravitation und Elektromagnetismus zu gelangen, wenn man von der von mir in den Vordergrund gestellten doppelten Elementarwirkung der Elektronen ausgeht und sich damit auf einen realistischen Standpunkt gegenüber dem mehr phänomenalistischen der Relativitätstheoretiker stellt. Dabei möchte ich dahingestellt sein lassen, wie weit die beiden Elementarwirkungen voneinander als unabhängig anzusehen sind; ich habe nämlich nachträglich gesehen, daß es zweckmäßig ist, aus der Matrix des Drehungsvektors die Diagonale auszuscheiden, so daß demnach der elektromagnetische Sechservektor gleich der Drehungs-

matrix vermindert um die Diagonalglieder wird. Letztere stellen aber mit großer Annäherung die Einheitsmatrix dar, so daß es auch verständlich wird, daß die elektromagnetischen Vektoren zu addieren sind, während die Drehungsmatrizen multipliziert werden. Die Abweichungen, die sich dabei ergeben, sind nun wohl auf das Konto der Gravitation zu schreiben, die demnach nicht ganz unabhängig von dem Elektromagnetismus bleiben kann, wie dies ja auch sowohl die von Weyl als die von mir aufgestellten Gleichungen zeigen.

Wilhelmshaven, den 29. Februar 1920.

(Eingegangen 8. März 1920.)

2. *Die Feldgleichungen der Gravitation und der Elektrizität innerhalb der Materie;* von *Ernst Reichenbächer.*

Bei Weiterführung des Vergleichs zwischen der Weylschen Theorie des Elektromagnetismus und meiner eigenen bin ich sehr bald zu interessanten Folgerungen gekommen, die es meines Erachtens klar hervortreten lassen, daß eine Vereinigung beider Theorien zu dem gewünschten Ziele führen muß.

I. Die Gravitation.

In meiner Arbeit über die Weylsche Weltfunktion hatte ich für diese eine der beiden Gestalten vorgeschlagen:

$$(1)\qquad \mathfrak{W} = \mathfrak{f}^2 + \alpha(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*) + \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{F}^2 - 2\mathfrak{B}'\cdot\mathfrak{F}\cdot\mathfrak{g}^2\left(+\frac{\mathfrak{B}'^2}{\mathfrak{B}-\mathfrak{b}}\mathfrak{g}^4\right);$$

läßt man das eingeklammerte Glied fort, so erhält man für die Gravitation die Feldgleichung (II 8):

$$(2)\qquad -\mathfrak{F} = 2\,\mathrm{Div}\,\mathrm{Grad}\,\mathfrak{A} + 2g^{\mu\nu}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x^\nu}\,\frac{\partial \lg\mathfrak{F}}{\partial x^\mu};$$

behält man es bei, so ergibt sich (wenn die Konstante $\mathfrak{b}$ verschwindet):

$$(3)\qquad \frac{-\mathfrak{F}\mathfrak{B}+\mathfrak{B}'\mathfrak{g}^2}{\mathfrak{B}} = 2\,\mathrm{Div}\,\mathrm{Grad}\,\mathfrak{A} + 2g^{\mu\nu}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x^\nu}\,\frac{\partial\lg(-\mathfrak{F}\cdot\mathfrak{B}+\mathfrak{B}'\mathfrak{g}^2)}{\partial x^\mu}.$$

Für ein konstantes $\mathfrak{B}$ geht 3 in 2 über, da dann das letzte Glied in $\mathfrak{W}$ ohnedies fortfällt.

Es ist nun möglich, mit Benutzung der elektromagnetischen Feldgleichung in der Gestalt II 9:

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathrm{Div}(f+\alpha f^*) = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\,\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\sqrt{G}(f^{\mu\nu}+\alpha f^{*\mu\nu}) \\ \qquad = \frac{3}{2}(\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{F}-\mathfrak{B}'\mathfrak{g}^2)\,y^{\mu\nu}\left[\varphi_u - \dfrac{\partial\lg(\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{F}-\mathfrak{B}'\mathfrak{g}^2)}{\partial x^\mu}\right] \end{cases}$$

die Gravitationsgleichung so umzugestalten, daß der Zusammenhang mit meiner ursprünglichen Feldgleichung

$$\mathfrak{K} = 2\,\mathrm{Div\,Grad}\,\mathfrak{A} \tag{5}$$

klarer hervortritt. Bezeichnet man die rechte Seite der Gleichung (4) mit d^ν, setzt also

$$\left\{\begin{aligned} d^\nu &= \tfrac{3}{4}(\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{F} - \mathfrak{B}'\cdot\mathfrak{g}^2)\,g^{\mu\nu}\left[\varphi_\mu - \frac{\partial \lg(\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{F} - \mathfrak{B}'\cdot\mathfrak{g}^2)}{\partial x^\mu}\right], \\ \text{d. h. } d_\mu &= \tfrac{3}{4}(\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{F} - \mathfrak{B}'\,\mathfrak{g}^2)\left[\varphi_\mu - \frac{\partial \lg(\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{F} - \mathfrak{B}'\cdot\mathfrak{g}^2)}{\partial x^\mu}\right], \end{aligned}\right. \tag{6}$$

so erhält man

$$\frac{\partial \lg(\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{F} - \mathfrak{B}'\cdot\mathfrak{g}^2)}{\partial x^\mu} = \varphi_\mu - \frac{2 d_\mu}{3(\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{F} - \mathfrak{B}'\,\mathfrak{g}^2)}.$$

Setzt man dies in (3) ein, so folgt

$$\frac{-\mathfrak{F}\cdot\mathfrak{B} + \mathfrak{B}'\cdot\mathfrak{g}^2}{\mathfrak{B}} = 2\,\mathrm{Div\,Grad}\,\mathfrak{A} + 2 g^{\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\nu}\varphi_\mu - \frac{4 d_\mu}{3(\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{F} - \mathfrak{B}'\cdot\mathfrak{g}^2)} g^{\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\nu}.$$

Das letzte Glied dieser Gleichung enthält das skalare Produkt $(\mathfrak{g}\cdot\mathfrak{e})$ des Gravitationsvektors g und desjenigen der Elektrizitätsdichte d. (Ich wähle den Buchstaben e statt d, da ich den letzteren für die Massendichte vorbehalten will.) So wird denn

$$-\mathfrak{F} = 2\,\mathrm{Div\,Grad}\,\mathfrak{A} + 2 g^{\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\nu}\varphi_\mu - \frac{4(\mathfrak{g}\cdot\mathfrak{e})}{3(\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{F} - \mathfrak{B}'\cdot\mathfrak{g}^2)} - \frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{B}}\mathfrak{g}^2. \tag{7}$$

In dieser Gleichung tritt der Zusammenhang mit (5) klar hervor; denn deren wegen der ihr mangelnden Eichinvarianz notwendige Erweiterung würde auf

$$-\mathfrak{F} = 2\,\mathrm{Div\,Grad}\,\mathfrak{A} + 2 g^{\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\nu}\varphi_\mu \tag{8}$$

führen. Die beiden Zusatzglieder

$$-\frac{4(\mathfrak{g}\cdot\mathfrak{e})}{3(\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{F} - \mathfrak{B}'\cdot\mathfrak{g}^2)} \quad \text{und} \quad -\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{B}}\mathfrak{g}^2$$

können unter gewissen Voraussetzungen zum Verschwinden gebracht werden. Die beiden Vektoren g und d werden als aufeinander senkrecht angenommen werden dürfen, da d in die Räume konstanter Verzerrung fallen wird, deren Gradient g

ist. Es wird also erlaubt sein, $(\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{e}) = 0$ zu setzen. Das letzte Glied fällt aber fort, wenn man für $\mathfrak{B}$ eine Konstante, die Weyl mit $-1/\beta$ bezeichnet (S. 121 f.), annimmt, wofür ja die Gleichungen (2) und (3) übereinstimmen. Unter diesen Voraussetzungen würde demnach die aus (5) durch die einzig angemessene Erweiterung auf Eichinvarianz hervorgegangene Gleichung (8) völlig genau gelten. Soll daneben Gleichung (5) selbst noch bestehen, so müßte die Eichung so getroffen werden, daß

$$3\,\mathrm{Div}\,\varphi + \tfrac{1}{2}(\varphi, \varphi') = 2\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x'}\varphi' \tag{9}$$

wird. Es ist bemerkenswert, daß ich durch diese Überlegungen wieder von der Gleichung (3) auf (2) zurückgeführt werde, der ich ja aus verschiedenen Gründen den Vorzug geben wollte. Zugleich erhält aber die Weltfunktion bis auf das Glied $\alpha\,(\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{f}^*)$, über dessen Wegfall im zweiten Teil gesprochen werden soll, genau wieder die Weylsche Gestalt. Dabei muß aber betont werden, daß man, um aus (1) die Gleichung (2) zu erhalten, die von $\mathfrak{A}$ abhängige Funktion $\mathfrak{B}$ nicht von vornherein konstant setzen darf, da sonst das Gravitationspotential aus $\mathfrak{B}$ ganz herausfällt; erst nach vollzogener Variation darf man $\mathfrak{B} = -\frac{1}{\beta}$ setzen; ich hatte ja gezeigt, daß bei Unterdrückung des Schlußgliedes in (1), das übrigens für die elektrischen Feldgleichungen gar nicht in Betracht kommt, stets Gleichung (2) sich ergibt, was für eine Funktion von $\mathfrak{A}$ das $\mathfrak{B}$ auch sei.

Die Massendichte $\mathfrak{d}$, die ich bisher[1]) als $\frac{\mathfrak{R}}{8\pi\varkappa}$ definiert hatte, um in Übereinstimmung mit der Poissonschen Gleichung zu bleiben, wird jetzt

$$\mathfrak{d} = -\frac{\mathfrak{H}}{8\pi\varkappa} \tag{10}$$

gesetzt werden müssen, wenn sie eichinvariant bleiben soll.

Es könnte zweifelhaft erscheinen, inwieweit es berechtigt ist, das Auftreten des Gravitationspotentials $\mathfrak{A}$ und seiner Ableitungen in dem Komponenten des Fundamentaltensors, in denen es doch zweifellos vorkommen wird, bei der Variation unberücksichtigt zu lassen. Dies Auftreten ist dabei im allgemeinen Falle so hoffnungslos unübersichtlich, daß es völlig

1) E. Reichenbächer, Ann. d. Phys. 52. S. 163. Gl. (60)

aussichtslos ist, auf unmittelbarem Wege die Abhängigkeit der $g^{\mu\nu}$ von $\mathfrak{A}$ zu ermitteln. In dieser schlimmen Lage findet sich nun aber folgender Ausweg, der wenigstens für die in der Weltfunktion vorkommenden Größen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{g}^2$ zum Ziele führt. Wie ich in meiner Arbeit über das skalare Gravitationspotential — allerdings nur für den Fall des unverzerrten Ruhraumes — gezeigt habe[1]), geht unter dem Einfluß der Verzerrung der Skalar

$$g^{\varrho\sigma}\frac{\partial f_1}{\partial x^\varrho}\frac{\partial f_2}{\partial x^\sigma}$$

in genau den entsprechenden über, so daß sich also hierin die Verzerrung wie eine bloße Transformation verhält. Bezeichne ich also — abweichend von der angeführten Arbeit — die Koordinaten vor der Verzerrung mit Apostrophen, nach ihr ohne diese, so erhalte ich zunächst

$$g^{\varrho\sigma}\frac{\partial f_1}{\partial x^\varrho}\frac{\partial f_2}{\partial x^\sigma}=g'^{\mu\nu}\frac{\partial f_1}{\partial x'^\mu}\frac{\partial f_2}{\partial x'^\nu}. \tag{11}$$

Die Komponenten des Fundamentaltensors $g'^{\mu\nu}$ vor der Verzerrung sind aber offenbar von dem Gravitationspotential frei; denn man kann, wie ich es in eben dieser Arbeit nachgewiesen habe, jedes beliebige Gravitationsfeld, wenn nur das Potential skalar angenommen wird, durch eine einzige Verzerrung aus der ursprünglichen unverzerrten Mannigfaltigkeit erzeugen.

Wenn nun aber hiermit die $g'^{\mu\nu}$ eingeführt sind, so ist das nur möglich bei gleichzeitiger Benutzung der Koordinaten x'^μ usf. Dann muß aber auch das Differential

$$\sqrt{G}\,dx^0\,dx^1\,dx^2\,dx^3$$

des Weltintegrals durch das entsprechende

$$\sqrt{G'}\,dx'^0\,dx'^1\,dx'^2\,dx'^3$$

vor der Verzerrung ersetzt werden, und damit entfällt auch die Berücksichtigung der Abhängigkeit der Determinante G von $\mathfrak{A}$.

Nun soll aber $\mathfrak{F}$ als Laplacescher Operator Div Grad herauskommen, und ich muß demnach die Änderung dieses Operators mit der Verzerrung berücksichtigen.

1) E. Reichenbächer, Ann. d. Phys. 61. S. 5f. 1920.

Über das Verhalten dieses Operators bei der Verzerrung belehrt uns nun Gleichung (22) auf S. 6 der angeführten Arbeit. Vertauscht man wieder die Stellung der Apostrophe und setzt, wie ich das (vgl. S. 19) als möglich nachgewiesen habe, die Funktionaldeterminante $a = 1$, so erhält man mit $\mathfrak{A}$ statt $\lg l$:

$$\text{(12)} \qquad \text{Div Grad}\, f = \text{Div Grad}'\, f + g'^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial f}{\partial x'^{\nu}}.$$

Im letzten Gliede kann unbedenklich die Summation über alle Kombinationen der μ und ν mit Einschluß der 0 erstreckt werden, da $\partial \mathfrak{A}/\partial x'^{0}$ gleich 0 ist, natürlich nur für das Gleichung (22) zugrunde liegende Ruhsystem.

In unserem Falle ist für f das Potential $\mathfrak{A}$ zu setzen, und dann ist

$$\text{(13)} \qquad \text{Div Grad}\, \mathfrak{A} = \text{Div Grad}'\, \mathfrak{A} + \mathfrak{g}^2.$$

Es würde daher nicht zweckmäßig sein, wie bisher $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{A}$ und $\partial \mathfrak{A}/\partial x^{\mu}$ völlig unabhängig zu wählen; denn wenn sich Gleichung (8) als Erweiterung von (5) ergeben soll, muß

$$\text{(14)} \qquad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{A}} = 0, \quad \text{aber} \quad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \dfrac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^{\mu}}} = -2 g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^{\nu}}$$

sein. Ich kann natürlich wegen Gleichung (11) wieder die Koordinaten der verzerrten Mannigfaltigkeit in $\mathfrak{g}^2$ einsetzen. Hierin würde eine kleine Abweichung von meinem bisherigen Verfahren bei der Variation liegen, die aber unwesentlich ist. Das hat nämlich zur Folge, daß in Gleichung (3) und (4) die Funktion $\mathfrak{B}'$ durch $\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B}$ zu ersetzen ist und die Gleichung (3) auch zunächst nur für das unverzerrte Kontinuum gilt. Es müßte also zu Div Grad $\mathfrak{A}$ noch der Subtrahend $\mathfrak{g}^2$ hinzugefügt werden, wenn man die Gleichung (3) für das verzerrte Kontinuum gültig machen will. Offenbar heben sich aber diese beiden Abänderungen in (7) gerade wieder auf.

Schwieriger ist die Untersuchung des Gliedes $\mathfrak{f}^2 + a(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)$ in $\mathfrak{B}$, wenigstens was den ersten Teil angeht. Man weiß nämlich von vornherein nicht, wie sich das Potential φ und damit der Vektor f bei der gleichzeitig mit ihnen auftretenden Verzerrung der Raumzeitmannigfaltigkeit ändern. Aber gerade das Glied $(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)$ zeigt, wie man vorzugehen hat. Es ist

$$\text{(15)} \qquad (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*) = \frac{2}{\sqrt{G}} (f_{01} f_{23} + f_{02} f_{31} + f_{03} f_{12}).$$

Damit zeigt sich aber das Produkt $\sqrt{G}\,(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)$ im verzerrten System vom Potential $\mathfrak{A}$ und seinen Ableitungen völlig frei und liefert also keinen Beitrag zur Feldgleichung der Gravitation. Wir gehen wohl nicht fehl, wenn wir das Gleiche von dem anderen Teile, d. h. von $\mathfrak{f}^2\sqrt{G}$, erwarten. Aber es ist hier doch schwieriger nachzuweisen. Man muß zu diesem Zweck nämlich annehmen, daß sich der Sechservektor $f_{\mu\nu}$ im wesentlichen bei der Verzerrung nicht anders umwandelt als bei einer bloßen Koordinatentransformation, nämlich geradeso mit der Abweichung, daß im Ruhsystem der Faktor 1 oder $e^{\mathfrak{A}}$ auftritt, mit dem man den transformierten Vektor multiplizieren muß, um den verzerrten zu erhalten, soweit die mit Null zusammengesetzten Komponenten in Betracht kommen. Es müßte also

$$f_{\mu\nu} = \sum_1^3 \varrho\sigma\, a_\mu^{\varrho}\, a_\nu^{\sigma}\, f'_{\varrho\sigma}, \tag{16}$$

wenn $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$, aber

$$f_{\mu 0} = a_\mu^{\varrho}\, 1\, f'_{\varrho 0} \tag{17}$$

sein. Dann würde sich ergeben, daß der Skalar $g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} f_{\mu\nu} f_{\alpha\beta} = \mathfrak{f}^2$ in beiden Mannigfaltigkeiten gleich ist. Die Bestätigung für die Richtigkeit des Ansatzes (17) liegt nun aber gerade im Verhalten des Skalars $(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)$, der, wie wir oben gesehen haben, keinen Beitrag zur Gravitationsfeldgleichung liefert, andererseits dies aber nur tun kann, wenn Gleichung (17) gilt. Denn sonst würde die Umrechnung in das unverzerrte Kontinuum einen solchen Beitrag hervorbringen. Es zeigt also dieser Skalar die Richtigkeit des Ansatzes und damit die bemerkenswerte Tatsache, daß auch Skalare von der Gestalt $\mathfrak{f}^2$ oder $g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} f_{\mu\nu} f_{\alpha\beta}$ bei der Verzerrung invariant bleiben.

Es scheint sich damit eine eigentümliche Analogie zur Eichinvarianz herauszustellen; denn tatsächlich sind die Skalare $\mathfrak{g}^2$, $\mathfrak{f}^2$, $(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)$ alles solche, denen bezüglich der Eichung ein bestimmtes Gewicht zukommt. Diese bleiben also bei der Verzerrung invariant. Andere Skalare dagegen, wie Div Grad f, besitzen kein Gewicht; denn bei Änderung der Eichung um den Betrag α wird Div Grad f zu

$$\frac{1}{\alpha}\left(\text{Div Grad } f + g^{\mu\nu}\frac{\partial f}{\partial x^\nu}\frac{\partial \alpha}{\partial x^\mu}\right).$$

Aber hier springt die Analogie zu Gleichung (22)[1]) sofort in die Augen.

Tatsächlich bestehen ja nun zwischen Eichung und Verzerrung weitgehende Ähnlichkeiten, so daß ich zuerst glaubte, daß beide identisch wären. Auch Mie hält dafür[2]), daß man ein skalares Gravitationspotential nur als Eichung definieren könne. Aber so wie ich die Größe $\mathfrak{A}$ auffasse, ist sie doch von der Eichung verschieden, insofern als nicht alle Strecken gleichmäßig umgeeicht werden, sondern nur die zeitlichen im Ruhsystem der Gravitation (nach meinem gewöhnlichem Ansatz; es läßt sich aber auch für den Fall durchführen, daß auch die räumlichen Strecken in der Richtung des Gradienten von $\mathfrak{A}$, aber in anderer Weise als die zeitlichen, umgeeicht werden). Tatsächlich hatte ich ja aus dieser Umeichung der zeitlichen Strecken die Gravitationswirkung abgeleitet.[3]) So kann es auch nicht wundernehmen, daß die Skalare bei der Verzerrung sich doch etwas anders verhalten als bei der völlig gleichartigen Eichung im Sinne Mies und Weyls; von einer Multiplikation mit einer Potenz des Eichskalars a ist in meiner Theorie keine Rede.

Es hat sich danach das bemerkenswerte Ergebnis herausgestellt, daß, trotzdem die Verzerrung natürlich auch in den Fundamentaltensor, noch dazu in gänzlich unübersichtlicher Weise eingeht, doch bei der Variation der Weltfunktion so verfahren werden kann, wie ich es bisher getan habe, nämlich als ob der Fundamentaltensor von der Verzerrung völlig unabhängig wäre. Etwa auftretende Zusatzglieder heben sich gegenseitig auf.

Dies gilt, soweit ich es bis jetzt übersehen kann, allerdings nur unter Zugrundelegung meiner Annahme des unverzerrten Ruhraumes. Doch konnte ich auch für die anderen Fälle, in denen dieser in der Richtung des Gradienten ebenfalls verzerrt wird, bisher noch keine Abweichung von dieser Vorschrift finden. Insbesondere bestätigt sich die Regel von der Invarianz der Skalare $g^{\mu\nu}\frac{\partial f_1}{\partial x^\mu}\frac{\partial f_2}{\partial x^\nu}$ allgemein.

1) a. a. O., S. 6.

2) Vgl. G. Mie, Die Einsteinsche Gravitationstheorie usw. Phys. Zeitschr. 18. S. 574f. 1917.

3) E. Reichenbächer, Ann. d. Phys. 52. S. 155ff. 1917; 61. S. 25ff. 1920.

Nur in dem Punkte ergibt sich eine kleine Abweichung, daß in den Gleichungen (3) und (4) zu $\mathfrak{B}'$ der Subtrahend $-2\mathfrak{B}$ hinzutritt. Da in Gleichung (3) auch Div Grad $\mathfrak{A}$ verändert wird, lautet sie jetzt

$$(18)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{-\mathfrak{K}\mathfrak{B}+\mathfrak{B}'\mathfrak{g}^2}{\mathfrak{B}} &= 2\,\mathrm{Div\ Grad}\,\mathfrak{A} \\ &\quad + 2g^{\mu\nu}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x^\nu}\,\frac{\partial \lg[-\mathfrak{K}\cdot\mathfrak{B}+(\mathfrak{B}'-2\mathfrak{B})\mathfrak{g}^2]}{\partial x^\mu}. \end{aligned} \right.$$

II. Der Elektromagnetismus.

Die natürliche Eichung. Ehe ich auf die Ableitung der elektrodynamischen Gleichungen eingehe, möchte ich gleich im Anfang die in meiner letzten Arbeit über die Weylsche Weltfunktion vorgetragene Theorie an einer Stelle abändern. Ich hatte als Funktion, deren Nichtintegrabilität bei der Herumführung um ein Flächenstück ich untersuchte, die Weylsche „Strecke" l benutzt, glaube aber sie besser durch ihren Logarithmus ersetzen zu müssen, da sonst bei der zweimaligen Differentiation Unstimmigkeiten eintreten. Zunächst ist Weyls Ansatz $\nabla l = -l\,\nabla\varphi$ (S. 109) gleichbedeutend mit $\nabla \lg l = -\nabla\varphi$; ich hätte also entsprechend das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\lg l}{d\gamma}\,d\gamma$$

zu bilden. Das kommt nun für beide Teile der Nichtintegrabilität in Betracht, für den orthogonalen wie für den parallelen. Ich hatte gesagt, daß der erstere dann verschwindet, wenn die zweiten Ableitungen der betreffenden Funktion nach den „gemischten" Parametern verschwinden. Das tritt für unseren Fall auch ein, allerdings nur bei passender Eichung. Unter „gemischten" Parametern wollte ich solche verstehen, die in den beiden zueinander dualen Flächenscharen liegen, in denen allein Komponenten des Sechservektors f auftreten, während sie in den anderen vier verschwinden. In diesem System, das ich das natürliche der Elektrodynamik nennen will — und in dem übrigens die Lage der Parameterlinien innerhalb ihrer Flächen noch willkürlich ist —, hatte ich die beiden ausgezeichneten Flächen als 01- und 23-Fläche benannt. Gemischte Parameter sind also die vier anderen Paare. Um auf

die Eichvorschrift zurückzukommen, will ich daran erinnern, daß ich, um im Einklang mit Weyl zu bleiben, $\frac{\partial \lg l}{\partial x^\mu}$ durch $-\varphi_\mu$ zu ersetzen habe. Dann wird $\frac{\partial^2 \lg l}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$ in den Formeln für die orthogonale Nichtintegrabilität gleich

$$-\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^\nu} \text{ oder } -\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x^\mu},$$

was ja dasselbe ist, da μ und ν gemischte Indizes sind, für die die Komponenten des Sechservektors $f_{\mu\nu}$ verschwinden. Ändere ich die Eichung ab, so vermindern sich diese Größen je um $\frac{\partial^2 \lg \alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$, und ich setze nun als natürliche Eichung diejenige fest, für die nicht nur die Komponenten $f_{\mu\nu}$ mit gemischten Indizes, sondern auch deren einzelne Glieder $\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^\nu}$ verschwinden. Ist demnach die Eichung irgendwie anders, so bestimme ich die Eichänderung α durch die 4 Gleichungen (immer mit gemischten Indizes)

$$(1) \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lg \alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x^\mu}.$$

Diese sind miteinander wohl vereinbar, da sie auf

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \lg \alpha}{\partial x^\mu} = \varphi_\mu - \chi_\mu$$

führen, worin χ_μ nur von seinem eigenen Parameter und dessen Genossen (also 0 und 1 oder 2 und 3) abhängen darf. Diese Gleichungen sind aber wiederum miteinander verträglich, da sie in den 4 Flächen mit gemischten Parametern tatsächlich auf verschwindende Komponenten des Sechservektors f führen, während in den beiden anderen

$$f_{01} = \frac{\partial \chi_0}{\partial x^1} - \frac{\partial \chi_1}{\partial x^0} \quad \text{und} \quad f_{23} = \frac{\partial \chi_2}{\partial x^3} - \frac{\partial \chi_3}{\partial x^2}$$

wird, was allerdings bedeutet, daß f_{01} nur von x^0 und x^1, f_{23} nur von x^2 und x^3 abhängen darf. Dies ist aber wiederum eine Folge der Maxwellschen Gleichungen

$$(2) \qquad \text{Div } f^* = 0,$$

die Weyl (S. 112) $\frac{\partial f_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_l} = 0$ schreibt.

Für die parallele Nichtintegrabilität aber werden beim Ersatz von l durch $\lg l$ die von mir mit a_I und a_{II} bezeichneten Skalare anders. Bisher war in einem Kartesischen System

$$a_I = -\frac{1}{l}\left(\frac{\partial^2 l}{\partial x^{0^2}} + \frac{\partial^2 l}{\partial x^{1^2}}\right), \quad a_{II} = -\frac{1}{l}\left(\frac{\partial^2 l}{\partial x^{2^2}} + \frac{\partial^2 l}{\partial x^{3^2}}\right).$$

Diese Größen wären demnach jetzt durch

$$a_I = -\left(\frac{\partial^2 \lg l}{\partial x^{0^2}} + \frac{\partial^2 \lg l}{\partial x^{1^2}}\right), \quad a_{II} = -\left(\frac{\partial^2 \lg l}{\partial x^{2^2}} + \frac{\partial^2 \lg l}{\partial x^{3^2}}\right),$$

d. h. durch

$$a_I = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x^0} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x^1}, \qquad a_{II} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x^3}$$

zu ersetzen, die in einer beliebigen Mannigfaltigkeit, in der auch auf Eichinvarianz Rücksicht genommen wird, lauten

$$(3) \qquad a_I = \mathrm{Div}\,\varphi_I + (\varphi, \varphi')_I, \quad a_{II} = \mathrm{Div}\,\varphi_{II} + (\varphi, \varphi')_{II},$$

wo eben φ_I die Komponente des Potentials φ in der 01-Fläche, φ_{II} die Komponente in der 23-Fläche ist.[1])

Das Hilfspotential. Diese beiden Komponenten φ_I und φ_{II} sollen demnach als selbständige Vierervektoren behandelt werden, aus denen nach dem in den Gleichungen (3) angegebenen Verfahren die Skalare a_I und a_{II} gebildet werden. Es wird sich aber empfehlen, diese Vierervektoren in der allgemein kovarianten Schreibweise zu entwickeln. Zu diesem Zweck betrachte ich neben ihrer Summe, die ja natürlich gleich φ ist, ihre Differenz ψ, die ich das Hilfspotential nennen will. Es soll also sein:

$$(4) \qquad \varphi = \varphi_I + \varphi_{II}, \ \psi = \varphi_I - \varphi_{II}, \ \varphi_I = \tfrac{1}{2}(\varphi + \psi), \ \varphi_{II} = \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi).$$

Das Hilfspotential ψ ist dadurch gekennzeichnet, daß im natürlichen Koordinatensystem des Elektromagnetismus seine 0- und 1-Komponenten mit den entsprechenden von φ übereinstimmen; dagegen haben die 2- und 3-Komponenten beider Potentiale bei gleichen Absolutwerten entgegengesetzte Vorzeichen. ψ wird nun offenbar durch φ selbst und den durch Transformation mittels des Sechservektors f aus φ erhaltenen

1) Etwas Analoges ist die Einführung der elektrischen und der magnetischen Ruhkraft durch Minkowski in seinen „Grundgleichungen", Mathemat. Annal. 68. S. 501ff. 1910.

neuen Vierervektor mit den Komponenten $\varphi^\varkappa f_{\varkappa\lambda} f^{\mu\lambda}$ gemäß folgenden kovarianten Gleichungen bestimmt:

$$(5)\quad \begin{cases} \psi^\mu = [\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2]^{-1/4} \cdot (2\varphi^\varkappa f_{\varkappa\lambda} f^{\mu\lambda} - \mathfrak{f}^2 \cdot \varphi^\mu), \\ \psi_\mu = [\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2]^{-1/4} \cdot (2\varphi_\varkappa f^{\varkappa\lambda} f_{\mu\lambda} - \mathfrak{f}^2 \cdot \varphi_\mu). \end{cases}$$

Dabei sind $\mathfrak{f}^2$ und $(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)$ die bekannten beiden Skalare des Sechservektors f:

$$(6)\quad \mathfrak{f}^2 = f_{\varrho\sigma} f^{\varrho\sigma}, \quad (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*) = f_{\varrho\sigma} f^{*\varrho\sigma} = \frac{2}{\sqrt{G}} (f_{01} f_{23} + f_{02} f_{31} + f_{03} f_{12}).$$

Die Richtigkeit der Gleichungen (5) zeigt sich sofort, wenn man das natürliche Koordinatensystem zugrunde legt; dann erhält man nämlich für $\mu = 0$ oder 1 nur von 0 verschiedene f-Komponenten, wenn $\lambda = 1$ oder 0, $\varkappa = 0$ oder 1 werden; das Produkt $f_{01} f^{01}$ aber hat den Wert $\frac{1}{2}[\mathfrak{f}^2 + \sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2}]$. Ist dagegen $\mu = 2$ oder 3, so wird $\lambda = 3$ oder 2, $\varkappa = 2$ oder 3, und man erhält das Produkt $f_{23} f^{23}$ mit dem Wert

$$\tfrac{1}{2}[\mathfrak{f}^2 - \sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2}].$$

Die Gleichungen (5) sind in derselben Gestalt umkehrbar

$$(7)\quad \begin{cases} \varphi^\mu = [\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2]^{-1/4} \cdot (\psi^\mu \mathfrak{f}^2 - 2\psi^\varkappa f^*_{\varkappa\lambda} f^{*\mu\lambda}), \\ \varphi_\mu = [\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2]^{-1/4} \cdot (\psi_\mu \mathfrak{f}^2 - 2\psi_\varkappa f^{*\varkappa\lambda} f^*_{\mu\lambda}), \end{cases}$$

was ja auch selbstverständlich ist, da ja φ auf dieselbe Weise durch Umkehrung der Vorzeichen in den 2- und 3-Komponenten aus ψ erhalten werden kann wie dieses aus hm.

Aus dem Hilfspotential ψ läßt sich ebenfalls ein Sechservektor k ableiten, der im natürlichen System[1]) mit f bis auf das Vorzeichen in der 23-Komponente übereinstimmt. Daraus ergeben sich die Skalare

$$\mathfrak{k}^2 = \mathfrak{f}^2, \quad (\mathfrak{k}\mathfrak{k}^*) = -(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*), \quad (\mathfrak{k}\mathfrak{f}) = \sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2}\,[= \sqrt{\mathfrak{k}^4 - (\mathfrak{k}\mathfrak{k}^*)^2}],$$
$$(\mathfrak{k}\mathfrak{f}^*) = (\mathfrak{k}^*\mathfrak{f}) = 0.$$

Der elektromagnetische (Verschiebungs-) Sechservektor h. Ich war in meiner letzten Arbeit zu dem Ergebnis gekommen, daß ich meinen Sechservektor der Elementardrehung, den ich von Anfang an zur Erklärung des Elektromagnetismus herange-

1) Aber nur bei natürlicher Eichung; andernfalls verschwinden die Komponenten in den vier anderen Parameterflächen nicht!

zogen hatte, als im wesentlichen übereinstimmend mit dem in der zweiten Gruppe der Maxwellschen Gleichungen auftretenden Verschiebungsvektor h nachwies. Es war nur nötig, um bei der von mir angenommenen Schreibweise zu bleiben, die dem Operator Rot den umgekehrten Sinn beilegte im Vergleich mit der Weylschen, ein Minuszeichen hinzuzufügen, das aber nichts mit dem Wesen der Sache zu tun hat, sondern eben nur die Umkehrung in der Bezeichnung des Rot-Operators aufheben soll. Aus dimensionellen Gründen möchte ich aber mich dazu entschließen, nur Proportionalität beider Vektoren zu fordern, so daß ich also bei konstantem $\varkappa$

$$-M = \frac{h}{\varkappa} \tag{8}$$

setze. Nach der Gleichung (I 6) meiner letzten Arbeit hatte ich nun, um Übereinstimmung meiner Theorie mit der Weylschen herbeizuführen:

$$-M = \frac{\mathfrak{p}_I}{\mathfrak{p}_I^2 - \mathfrak{p}_{II}^2} f - \frac{\mathfrak{p}_{II}}{\mathfrak{p}_I^2 - \mathfrak{p}_{II}^2} f^*, \tag{9}$$

wo $\mathfrak{p}_I$ und $\mathfrak{p}_{II}$ die beiden Skalare waren, die in die umgekehrte Beziehung (I 5) zwischen f und M eingehen, die ich bei meiner Untersuchung voranstellte. Aus (8) und (9) ergibt sich sofort

$$h = \frac{\varkappa \mathfrak{p}_I}{\mathfrak{p}_I^2 - \mathfrak{p}_{II}^2} f - \frac{\varkappa \mathfrak{p}_{II}}{\mathfrak{p}_I^2 - \mathfrak{p}_{II}^2} f^*. \tag{10}$$

Nun hängen die Skalare

$$\frac{\mathfrak{p}_I}{\mathfrak{p}_I^2 - \mathfrak{p}_{II}^2} \quad \text{und} \quad -\frac{\mathfrak{p}_{II}}{\mathfrak{p}_I^2 - \mathfrak{p}_{II}^2}$$

mit den Skalaren $\mathfrak{f}^2$ und $(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)$, sowie mit den durch die Gleichungen (3) festgesetzten Größen a_I und a_{II} zusammen:

$$\frac{\mathfrak{p}_I}{\mathfrak{p}_I^2 - \mathfrak{p}_{II}^2} = \frac{a_I + a_{II}}{2 a_I a_{II}} - \frac{a_I - a_{II}}{2 a_I a_{II}} \mathfrak{f}^2 [\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2]^{-1/2}, \tag{11}$$

$$-\frac{\mathfrak{p}_{II}}{\mathfrak{p}_I^2 - \mathfrak{p}_{II}^2} = \frac{a_I - a_{II}}{2 a_I a_{II}} (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*) [\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2]^{-1/2}. \tag{12}$$

Man erhält also für den Verschiebungsvektor

$$\begin{aligned} h = f \Big(& \frac{\varkappa (a_I + a_{II})}{2 a_I a_{II}} - \frac{\varkappa (a_I - a_{II})}{2 a_I a_{II}} \mathfrak{f}^2 [\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2]^{-1/2} \Big) \\ & + f^* \frac{\varkappa (a_I - a_{II})}{2 a_I a_{II}} (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*) [\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2]^{-1/2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Nun führe ich folgende neue Größen ε und λ zur Abkürzung ein:

$$(14) \qquad \varepsilon = \frac{\varkappa}{\mathfrak{a}_\mathrm{I}}, \quad \lambda = \frac{\mathfrak{a}_\mathrm{II}}{\varkappa}, \quad \text{also } \mathfrak{a}_\mathrm{I} = \frac{\varkappa}{\varepsilon}, \quad \mathfrak{a}_\mathrm{II} = \varkappa\lambda$$

und erhalte

$$(15) \quad \begin{cases} h = f\left(\frac{1+\varepsilon\lambda}{2\lambda} - \frac{1-\varepsilon\lambda}{2\lambda} f^3 [f^4 - (ff^*)^2]^{-1/2}\right) \\ \qquad\qquad + f^* \frac{1-\varepsilon\lambda}{2\lambda} (ff^*) [f^4 - (ff^*)^2]^{-1/2}. \end{cases}$$

Im materiefreien Äther müssen nun die beiden Vektoren h und f übereinstimmen; es muß also das f^*-Glied verschwinden. Das könnte durch Verschwinden des Skalars (ff^*) herbeigeführt werden; dann aber dürften im Äther nur Felder vorkommen, die sich auf einen einkomponentigem Sechservektor, d. h. auf ein elektrostatisches Feld transformieren lassen. Das ist ausgeschlossen[1]), also muß im Äther

$$\lim_{\text{Äther}} \varepsilon\lambda = 1, \text{ d. h. } \mathfrak{a}_\mathrm{II} = \mathfrak{a}_\mathrm{I}$$

werden. Dann fällt aber auch das zweite Glied im Koeffizienten von f in (15) fort, und der erste nimmt den Wert $1/\lambda$ an, so daß $\lambda = 1$, $\varepsilon = 1$ gesetzt werden muß, um Übereinstimmung von h und f zu erzielen.

Durch Verbindung der Gleichungen (8) und (14) erhält man

$$(16) \qquad \mathrm{Div}\, \varphi_\mathrm{I} + (\varphi_\nu \varphi^\nu)_\mathrm{I} = \frac{\varkappa}{\varepsilon}, \quad \mathrm{Div}\, \varphi_\mathrm{II} + (\varphi_\nu \varphi^\nu)_\mathrm{II} = \varkappa\lambda$$

und daraus durch Addition und Subtraktion mit Berücksichtigung von 4:

$$(16a) \quad \begin{cases} \mathrm{Div}\, \varphi + \frac{1}{2}(\varphi_\nu \varphi^\nu) + \frac{1}{2}(\psi_\nu \psi^\nu) = \frac{\varkappa}{\varepsilon}(1+\varepsilon\lambda), \\ \mathrm{Div}\, \psi + (\varphi_\nu \psi^\nu) = \frac{\varkappa}{\varepsilon}(1-\varepsilon\lambda). \end{cases}$$

Im freien Äther würde das die Gleichungen liefern

$$(17) \quad \lim_{\text{Äther}} [\mathrm{Div}\, \varphi + \tfrac{1}{2}(\varphi_\nu \varphi^\nu + \tfrac{1}{2}(\psi_\nu \psi^\nu)] = 2\varkappa, \quad \lim_{\text{Äther}} [\mathrm{Div}\, \psi + (\varphi_\nu \psi^\nu)] = 0.$$

---

1) Vgl. aber den nachher behandelten Ausnahmefall der Kugelsymmetrie.

Es erscheint mir zweifelhaft, ob die schon durch die oben erwähnte Bedingung festgelegte natürliche Eichung weiter spezialisiert werden kann, daß diesen Gleichungen in größeren Raumzeitgebieten Genüge geschehen kann. Dann wären die Gleichungen (17) nur als Grenzbedingungen anzusehen, die vielleicht im Unendlichen oder im „Äquator" der Zylinderwelt gelten, so daß also, abgesehen von diesen Grenzen, materiefreie Bereiche nirgends vorkommen, wie ich das ja schon in Übereinstimmung mit Mie als Folgerung meiner elektromagnetischen Feldgleichungen festgestellt hatte. Es war nämlich unmöglich, daß die Elektrizitätsdichte genau Null wurde, so daß eben die Elektronen von unendlich großen, äußerst dünnen Atmosphären umgeben erscheinen, so daß tatsächlich kein Gebiet vorkommt, das materiefrei wäre. Die erste der Gleichungen (17) liefert uns nun den Wert von $2\varkappa$ als Grenzwert des Ausdruckes $\mathrm{Div}\,\varphi + \frac{1}{2}(\varphi, \varphi^{\nu}) + \frac{1}{2}(\psi, \psi^{\nu})$, den dieser außerhalb der Materie annehmen würde, $\varkappa$ ist als konstant anzusehen und hängt wahrscheinlich mit der Gravitationskonstanten zusammen, ist daher von mir auch so bezeichnet, ich möchte damit aber nicht behaupten, daß es mit dieser Konstanten übereinstimmt.

Die Gleichungen (16a) sollen nun aber überall gelten; dann können die Größen ε und λ keine Konstanten sein, ebensowenig wie es die Skalare $\mathfrak{a}_{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{a}_{\mathrm{II}}$ waren. Sehr wohl aber ist es möglich, beide innerhalb größerer Bezirke als beinahe konstant anzusehen.

Nun liefert die Gleichung (15) für das natürliche System der Elektrodynamik wegen

$$f_{01}^{*} = f^{23}\sqrt{G} = f_{01}\frac{\mathfrak{f}^2 - \sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2}}{(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)},$$

$$f_{23}^{*} = f^{01}\sqrt{G} = f_{23}\frac{\mathfrak{f}^2 + \sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2}}{(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)}$$

die Beziehungen

$$h_{01} = \varepsilon \cdot f_{01}, \quad h_{23} = \frac{1}{\lambda} f_{23}. \qquad (18)$$ [1])

1) Diese Gleichungen sagen natürlich nichts anderes aus als die allerersten, die ich durch Gleichsetzen der Weylschen Nichtintegrabilität und meiner eigenen gewonnen hatte, und mit deren Hilfe ich die Skalare $\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{p}_{\mathrm{II}}$ erst bestimmte.

Es zerfällt also in diesem natürlichen System, das man auch als Ruhsystem in bezug auf das Feld bezeichnen könnte, der Verschiebungsvektor in einen elektrischen Teil h_{01} und einen magnetischen Teil h_{23}. Beide sind mit dem Weylschen Feldvektor f, der in die entsprechenden Teile zerfällt, durch die Gleichungen (18) verbunden. Damit ist aber die Bedeutung der Größen ε und λ gegeben; es sind die sogenannte Dielektrizitäts-„Konstante" und die Permeabilität. Sowohl das Auftreten dieser Größen als auch ihr Zusammenhang mit den Größen φ und f, wie er durch die Gleichungen (16), (17), (4) und (5) gegeben ist, ist eine besonders schöne Frucht der vereinigten Theorien von Weyl und mir.

Die Weltfunktion und die Feldgleichung. In meiner letzten Arbeit hatte ich aus der hier wieder als (I 4) angeführten Feldgleichung (II 9) durch Multiplikation mit einem Skalar $\mathfrak{p}$ die zweite (II 10) abgeleitet (wenn ich mich der Abkürzung d^ν für die kontravariante Dichte bediene):

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{Div}(\mathfrak{p}f + a\,\mathfrak{p}f^*) &= \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\sqrt{G}\cdot\mathfrak{p}(f + a f^*) \\ &= \mathfrak{p}\,d^\nu + (f^{\mu\nu} + a f^{*\mu\nu})\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial x^\mu}\,. \end{aligned}\right.$$

Hierin muß a eine Konstante bedeuten, und ich wollte nun durch Festlegung der Eichung es so einrichten, daß in der Divergenz gerade der Verschiebungsvektor

$$(10)\qquad h = \frac{\varkappa \mathfrak{p}_{\mathrm{I}}}{\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}^2 - \mathfrak{p}_{\mathrm{II}}^2} f - \frac{\varkappa \mathfrak{p}_{\mathrm{II}}}{\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}^2 - \mathfrak{p}_{\mathrm{II}}^2} f^*$$

auftritt. Es müßte also die Eichung so getroffen werden, daß das Verhältnis $-\frac{\mathfrak{p}_{\mathrm{II}}}{\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}}$ gleich der Konstanten a wird; dann könnte

$$\frac{\varkappa \mathfrak{p}_{\mathrm{I}}}{\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}^2 - \mathfrak{p}_{\mathrm{II}}^2}$$

gleich $\mathfrak{p}$ gesetzt werden. Weil in dem Verhältnis $-\frac{\mathfrak{p}_{\mathrm{II}}}{\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}}$ wegen der darin auftretenden Skalare [vgl. Gleichungen (11) und (12)] $\mathfrak{a}_{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{a}_{\mathrm{II}}$ der Eichungsskalar in recht verwickelter Weise auftritt, ist dies mißlich; hauptsächlich aber ist es zweifelhaft, ob sich diese Eichbedingung mit der als notwendig erkannten natürlichen Eichung vereinbaren läßt.

Man entgeht nun aber der Zwickmühle, wenn man sich der anderen Maxwellschen Gleichungen

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{Div}\, f^* = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{G} f^{*\mu\nu} = 0$$

bedient, die sofort aus der Definition des Weylschen Feldvektors folgten. Aus ihnen folgt nämlich durch Multiplikation mit einem anderen Skalar $\mathfrak{v}$

$$\text{(20)} \qquad \mathrm{Div}\, \mathfrak{v} f^* = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{G}\, \mathfrak{v} f^{*\mu\nu} = f^{*\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x^\mu} .$$

Durch Addition dieser Gleichung zu (19), in der nun $a = 0$ gesetzt werden kann, womit die Weltfunktion auch im elektromagnetischen Teil genau die Weylsche Gestalt $\mathfrak{f}^2 - \frac{1}{\beta}\mathfrak{F}^2$ annimmt, erhält man nun sofort die Gleichung

$$\text{(10)} \qquad h = \frac{\varkappa \mathfrak{p}_\mathrm{I}}{\mathfrak{p}_\mathrm{I}^2 - \mathfrak{p}_\mathrm{II}^2} f - \frac{\varkappa \mathfrak{p}_\mathrm{II}}{\mathfrak{p}_\mathrm{I}^2 - \mathfrak{p}_\mathrm{II}^2} f^* ,$$

wenn man

$$\mathfrak{p} = \frac{\varkappa \mathfrak{p}_\mathrm{I}}{\mathfrak{p}_\mathrm{I}^2 - \mathfrak{p}_\mathrm{II}^2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{v} = -\frac{\varkappa \mathfrak{p}_\mathrm{II}}{\mathfrak{p}_\mathrm{I}^2 - \mathfrak{p}_\mathrm{II}^2}$$

setzt. Das Mitschleppen des Gliedes $a(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)$ hat gar keinen Zweck mehr, da es sich glatt heraushebt, und auch die Einführung einer weiteren Invariante $\gamma \sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2}$, an die ich zuerst gedacht hatte, verbietet sich, da dann für den Fall des reinen Äthers h nicht mit f übereinstimmt, sondern ein Leitungsstromglied auftreten würde. Die Hauptsache aber ist, man entgeht der unangenehmen Eichvorschrift $-\frac{\mathfrak{p}_\mathrm{II}}{\mathfrak{p}_\mathrm{I}} = a$, die ich als einen Schönheitsfehler bezeichnet hatte. Es bleibt aber die Notwendigkeit, die beiden Skalare $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{v}$ beizubehalten, und das ist sehr gut; denn aus ihnen ergeben sich Dielektrizität ε und Permeabilität λ, und aus ihnen wird auch die Leitfähigkeit σ folgen.

An Stelle der Gleichung (19), die ich damit also aufgebe, hat zu treten:

$$\text{(21)} \qquad \mathrm{Div}\, h = \mathrm{Div}(\mathfrak{p} f + \mathfrak{v} f^*) = \mathfrak{p}\, d^\nu + f^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x^\mu} + f^{*\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x^\mu} = s^\nu .$$

Der Vergleich mit (15) lehrt, daß die Skalare $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{v}$ die Werte haben:

$$\text{(22)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{p} = \dfrac{1+\varepsilon\lambda}{2\lambda} - \dfrac{1-\varepsilon\lambda}{2\lambda}\, \mathfrak{f}^3 [\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2]^{-1/2}, \\ \mathfrak{v} = \dfrac{1-\varepsilon\lambda}{2\lambda} (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*) [\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2]^{-1/2}. \end{cases}$$

Meiner Ansicht nach wäre es nun unrichtig, die Zerlegung von s^ν in Konvektions- und Leitungsstrom in der Weise vorzunehmen, daß man ersteren gleich $\mathfrak{p}\,d^\nu$ setzte; in den Gliedern

$$f^{\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial x^\mu} + f^{*\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{o}}{\partial x^\mu}$$

steckt vielmehr noch ein Beitrag hierzu. Die Ausrechnung der Differentialquotienten

$$\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial x^\mu} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{o}}{\partial x^\mu}$$

wird das zeigen. Für sie erhält man

$$(22a)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{p}}{\partial x^\mu} = \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\dfrac{1+\varepsilon\lambda}{2\lambda} - \mathfrak{f}^2[\mathfrak{f}^4-(\mathfrak{ff}^*)^2]^{-1/2}\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\dfrac{1-\varepsilon\lambda}{2\lambda} \\ \quad -\dfrac{1-\varepsilon\lambda}{2\lambda}\left[-(\mathfrak{ff}^*)^2\dfrac{\partial \mathfrak{f}^2}{\partial x^\mu} + \mathfrak{f}^2(\mathfrak{ff}^*)\dfrac{\partial(\mathfrak{ff}^*)}{\partial x^\mu}\right][\mathfrak{f}^4-(\mathfrak{ff}^*)^2]^{-3/2}, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{o}}{\partial x^\mu} = (\mathfrak{ff}^*)[\mathfrak{f}^4-(\mathfrak{ff}^*)^2]^{-1/2}\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\dfrac{1-\varepsilon\lambda}{2\lambda} + \dfrac{1-\varepsilon\lambda}{2\lambda}\left[\mathfrak{f}^4\dfrac{\partial(\mathfrak{ff}^*)}{\partial x^\mu}\right. \\ \quad \left. -\mathfrak{f}^2(\mathfrak{ff}^*)\dfrac{\partial \mathfrak{f}^2}{\partial x^\mu}\right]\cdot[\mathfrak{f}^4-(\mathfrak{ff}^*)^2]^{-3/2}. \end{cases}$$

Setzt man diese Werte in (21) ein, so bekommt man daraus:

$$(23)\quad \begin{cases} \mathrm{Div}\,h = s^\nu = \left\{\mathfrak{p}\,d^\nu + \dfrac{1-\varepsilon\lambda}{2\lambda}[f^{\mu\nu}(\mathfrak{ff}^*) - f^{*\mu\nu}\mathfrak{f}^2]\right. \\ \qquad \left.\cdot\left[(\mathfrak{ff}^*)\dfrac{\partial \mathfrak{f}^2}{\partial x^\mu} - \mathfrak{f}^2\dfrac{\partial(\mathfrak{ff}^*)}{\partial x^\mu}\right]\cdot[\mathfrak{f}^4-(\mathfrak{ff}^*)^2]^{-3/2}\right\} \\ \quad + \left\{f^{\mu\nu}\left[\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\dfrac{1+\varepsilon\lambda}{2\lambda} - \mathfrak{f}^2[\mathfrak{f}^4-(\mathfrak{ff}^*)^2]^{-1/2}\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\dfrac{1-\varepsilon\lambda}{2\lambda}\right]\right. \\ \qquad \left. + f^{*\mu\nu}(\mathfrak{ff}^*)[\mathfrak{f}^4-(\mathfrak{ff}^*)^2]^{-1/2}\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\dfrac{1-\varepsilon\lambda}{2\lambda}\right\}. \end{cases}$$

Ich behaupte nun, daß die erste Schleifenklammer den Konvektions-, die zweite den Leitungsstrom darstellt. Zum Nachweis bediene ich mich wieder des natürlichen Koordinatensystems des Elektromagnetismus. Zunächst ist

$$(\mathfrak{ff}^*)\frac{\partial \mathfrak{f}^2}{\partial x^\mu} - \mathfrak{f}^2\frac{\partial(\mathfrak{ff}^*)}{\partial x^\mu} = (\mathfrak{ff}^*)^2\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\mathfrak{f}^2}{(\mathfrak{ff}^*)}.$$

Im natürlichen System aber wird, da $2f_{01}f_{23} = 2G f^{01} f^{23} = \sqrt{G}\,(\mathfrak{ff}^*)$ ist,

$$\frac{\mathfrak{f}^3}{(\mathfrak{ff}^*)} = \frac{\sqrt{G}\,f^{01}}{2f_{23}} + \frac{f_{23}}{2\sqrt{G}\,f^{01}} = \frac{\sqrt{G}\,f^{23}}{2f_{01}} + \frac{f_{01}}{2\sqrt{G}\,f^{23}}.$$

Den ersten Ansatz verwendet man bei der Differentiation nach x^0 und x^1, den zweiten bei der nach x^2 und x^3 und erhält

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\,\frac{\mathfrak{f}^3}{(\mathfrak{ff}^*)} = \left[\frac{1}{2f_{23}} - \frac{f_{23}}{2G(f^{01})^2}\right]\frac{\partial\sqrt{G}\,f^{01}}{\partial x^0}$$

und entsprechend für x^1, da $\frac{\partial f_{23}}{\partial x^0} = \frac{\partial f_{23}}{\partial x^1} = 0$ ist,

$$\frac{\partial}{\partial x^2}\,\frac{\mathfrak{f}^3}{(\mathfrak{ff}^*)} = \left[\frac{1}{2f_{01}} - \frac{f_{01}}{2G(f^{23})^2}\right]\frac{\partial\sqrt{G}\,f^{23}}{\partial x^2}$$

und entsprechend für x^3, da $\frac{\partial f_{01}}{\partial x^2} = \frac{\partial f_{01}}{\partial x^3} = 0$ ist.

Nach den Gleichungen (I 4) und (I 6) ist aber

$$\frac{\partial\sqrt{G}\,f^{01}}{\partial x^0} = d^1\sqrt{G}, \quad \frac{\partial\sqrt{G}\,f^{01}}{\partial x^1} = -d^0\sqrt{G},$$

$$\frac{\partial\sqrt{G}\,f^{23}}{\partial x^2} = d^3\sqrt{G}, \quad \frac{\partial\sqrt{G}\,f^{23}}{\partial x^3} = -d^2\sqrt{G}.$$

Ferner ist

$$\frac{1}{2f_{23}} - \frac{f_{23}}{2G(f^{01})^2} = \frac{G(f^{01})^2 - f_{23}^2}{2G(f^{01})^2 f_{23}} = \frac{f_{01}f^{01} - f_{23}f^{23}}{\frac{2f_{01}f_{23}}{\sqrt{G}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{G}\,f^{01}}$$

wegen obiger Gleichung $f_{01}f_{23} = G f^{01} f^{23}$; entsprechend wird

$$\frac{1}{2f_{01}} - \frac{f_{01}}{2G(f^{23})^2} = \frac{f_{23}f^{23} - f_{01}f^{01}}{\frac{2f_{01}f_{23}}{\sqrt{G}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{G}\,f^{23}}.$$

Nun ist aber

$$f_{01}f^{01} - f_{23}f^{23} = \sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{ff}^*)^2}, \quad \frac{2f_{01}f_{23}}{\sqrt{G}} = (\mathfrak{ff}^*).$$

Es wird also

$$(\mathfrak{ff}^*)^2\,\frac{\partial}{\partial x^0}\,\frac{\mathfrak{f}^3}{(\mathfrak{ff}^*)} = +(\mathfrak{ff}^*)\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{ff}^*)^2}\,d^1 : f^{01},$$

$$(\mathfrak{ff}^*)^2\,\frac{\partial}{\partial x^1}\,\frac{\mathfrak{f}^3}{(\mathfrak{ff}^*)} = -(\mathfrak{ff}^*)\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{ff}^*)^2}\,d^0 : f^{01};$$

$$(\mathfrak{ff}^*)^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\mathfrak{f}^2}{(\mathfrak{ff}^*)} = -(\mathfrak{ff}^*)\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{ff}^*)^2}\, d^3 : f^{23},$$

$$(\mathfrak{ff}^*)^2 \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{\mathfrak{f}^3}{(\mathfrak{ff}^*)} = +(\mathfrak{ff}^*)\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{ff}^*)^2}\, d^2 : f^{23}.$$

Weiter ist

$$f^{10}(\mathfrak{ff}^*) - f^{10*}\mathfrak{f}^2 = -[f^{01}(\mathfrak{ff}^*) + f^{01*}\mathfrak{f}^2]$$

$$= -f^{01} \cdot \frac{2 f_{01} f_{23}}{\sqrt{G}} + \frac{f_{23}}{\sqrt{G}}(f_{01} f^{01} + f_{23} f^{23})$$

$$= -(f_{01} f^{01} - f_{23} f^{23}) f_{23} : \sqrt{G} = -\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{ff}^*)} \cdot f_{23} : \sqrt{G}$$

und entsprechend

$$f^{32}(\mathfrak{ff}^*) - f^{32*}\mathfrak{f}^2 = -[f^{23}(\mathfrak{ff}^*) - f^{23*}\mathfrak{f}^2] = +\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{ff}^*)^2} \cdot f_{01} : \sqrt{G}.$$

Faßt man all dies zusammen, so erhält man für die Komponenten des Vektors, der zu $\mathfrak{p}\, d^\nu$ in der ersten Schleifenklammer hinzutritt, nacheinander die Ausdrücke:

$$\frac{1-\varepsilon\lambda}{2\lambda} \times -\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{ff}^*)^2} \cdot f_{23} : \sqrt{G} \times -(\mathfrak{ff}^*)\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{ff}^*)^2}\, d^0 : f^{01}$$

$$\times [\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{ff}^*)^2]^{-3/2} = \frac{1-\varepsilon\lambda}{2\lambda} \cdot 2 f_{23} f^{23} d^0 [\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{ff}^*)^2]^{-1/2} [\mathrm{da}\,(\mathfrak{ff}^*)$$

$$= 2\sqrt{G} f^{01} f^{23} \text{ ist}] = \frac{1-\varepsilon\lambda}{2\lambda} [\mathfrak{f}^2 \underline{\underline{-}} \sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{ff}^*)^2}]\, d^0 [\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{ff}^*)^2]^{-1/2},$$

$$\frac{1-\varepsilon\lambda}{2\lambda} \times +\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{ff}^*)^2} \cdot f_{23} : \sqrt{G} \times +(\mathfrak{ff}^*)\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{ff}^*)^2}\, d^1 : f^{01}$$

$$\times [\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{ff}^*)^2]^{-3/2} = \frac{1-\varepsilon\lambda}{2\lambda} [\mathfrak{f}^2 \underline{\underline{-}} \sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{ff}^*)^2}]\, d^1 [\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{ff}^*)^2]^{-1/2},$$

$$\frac{1-\varepsilon\lambda}{2\lambda} \times +\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{ff}^*)^2} \cdot f_{01} : \sqrt{G} \times +(\mathfrak{ff}^*)\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{ff}^*)^2}\, d^2 : f^{23}$$

$$\times [\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{ff}^*)^2]^{-3/2} = \frac{1-\varepsilon\lambda}{2\lambda} \cdot 2 f_{01} f^{01} d^2 [\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{ff}^*)^2]^{-1/2}$$

$$= \frac{1-\varepsilon\lambda}{2\lambda} [\mathfrak{f}^2 \underline{\underline{+}} \sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{ff}^*)^2}]\, d^2 [\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{ff}^*)^2]^{-1/2} \text{ und}$$

$$\frac{1-\varepsilon\lambda}{2\lambda} \times -\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{ff}^*)^2} \cdot f_{01} : \sqrt{G} \times -(\mathfrak{ff}^*)\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{ff}^*)^2}\, d^3 : f^{23}$$

$$\times [\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{ff}^*)^2]^{-3/2} = \frac{1-\varepsilon\lambda}{2\lambda} [\mathfrak{f}^2 \underline{\underline{+}} \sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{ff}^*)^2}]\, d^3 [\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{ff}^*)^2]^{-1/2}.$$

Es enthalten also diese Komponenten die Elektrizitätsdichte; aber diese geht wegen des Wechsels des Vorzeichens in

die 2- und 3-Komponente anders ein als in die 0- und 1-Komponente. Berücksichtigt man nun den Wert von

$$(15)\qquad \mathfrak{p} = \frac{\varkappa \mathfrak{p}_1}{\mathfrak{p}_1^2 - \mathfrak{p}_{11}^2} = \frac{1+\varepsilon\lambda}{2\lambda} - \frac{1-\varepsilon\lambda}{2\lambda}\,\mathfrak{f}^2[\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2]^{-1/2},$$

so erhält der Konvektionsstrom die Komponenten

$$\varepsilon d^0, \quad \varepsilon d^1, \quad \frac{1}{\lambda} d^2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{\lambda} d^3.$$

Zur Berechnung des Leitungsstromes fasse ich die beiden Glieder mit

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,\frac{1-\varepsilon\lambda}{2\lambda}$$

zusammen. Es treten dann in den beiden ersten Komponenten hinzu die Faktoren

$$\begin{aligned}
&\pm [f^{01}\mathfrak{f}^2 - f^{01*}(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)][\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2]^{-1/2} \\
&\quad = \pm \left\{ f^{01}(f_{01}f^{01} + f_{23}f^{23}) - \frac{f_{23}}{\sqrt{G}}\sqrt{G}\cdot 2 f^{01} f^{23} \right\} \cdot [\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2]^{-1/2} \\
&\quad = \pm f^{01}(f_{01}f^{01} - f_{23}f^{23}) \cdot [\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2]^{-1/2} = \pm f^{01}.
\end{aligned}$$

Entsprechend erhält man in dem letzten Paar

$$\pm f^{23}(f_{23}f^{23} - f_{01}f^{01}) \cdot [\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2]^{-1/2} = \mp f^{23}.$$

Zieht man nun wieder mit

$$f^{\mu\nu}\,\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,\frac{1+\varepsilon\lambda}{2\lambda}$$

zusammen, so erhält man der Reihe nach

$$f^{10}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x^1}, \quad f^{01}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x^0}, \quad f^{32}\frac{\partial \frac{1}{\lambda}}{\partial x^3}, \quad f^{23}\frac{\partial \frac{1}{\lambda}}{\partial x^3},$$

so daß für das natürliche System sich die vier Gleichungen ergeben:

$$(24)\quad \begin{cases} s^0 = \mathrm{Div}_0\, h = \varepsilon d^0 + f^{10}\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial x^1}, & s^1 = \mathrm{Div}_1\, h = \varepsilon d^1 + f^{01}\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial x^0}, \\ s^2 = \mathrm{Div}_2\, h = \dfrac{1}{\lambda} d^0 + f^{32}\dfrac{\partial \frac{1}{\lambda}}{\partial x^3}, & s^3 = \mathrm{Div}_3\, h = \dfrac{1}{\lambda} d^3 + f^{23}\dfrac{\partial \frac{1}{\lambda}}{\partial x^3}. \end{cases}$$

Dies Ergebnis ist nicht weiter verwunderlich, da ja in den ersten beiden Gleichungen $h = \varepsilon f$, in den letzten aber $= \frac{1}{\lambda} f$

nach (18) wird. Es war aber die Durchrechnung nötig, um zu zeigen, wie sich in der kovarianten Gleichung (23) Konvektions- und Leitungsstrom verteilen.

Außerdem kann man nun die Leitfähigkeit beurteilen. Legt man in der 01-Fläche die Parameterlinien so, daß längs der x^0-Linien der Skalar ε konstant bleibt, so gibt $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x^1}$ den Gradienten an. Nimmt man ferner an, daß

$$\frac{\partial \frac{1}{\lambda}}{\partial x^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \frac{1}{\lambda}}{\partial x^3}$$

auch nur klein sind, weil der Gradient von λ ebenfalls wesentlich in die x^1-Richtung fällt, so erhält man die Formeln der klassischen Elektrodynamik, wenn man

$$\sigma = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^1} \tag{25}$$

als Leitfähigkeit deutet. Es kann also die Dielektrizität ε keine Konstante sein, um so weniger, je größer die Leitfähigkeit ist, daher der Gegensatz von Dielektriken und guten Leitern. Somit wäre auch die letzte sogenannte Materialkonstante σ befriedigend erklärt. Es ist aber zu beachten, daß die Formeln (24) nur für das natürliche System der Elektrodynamik gelten; die allgemein kovariante Gestalt für Koordinaten und Eichung haben die Feldgesetze in (23), wobei zu bemerken ist, daß allerdings nur für die natürliche Eichung die Größen ε und λ den einfachen Sinn haben, den wir ihnen beilegen.

Ich möchte noch bemerken, daß jede derartige Umbildung der ursprünglichen Feldgleichung (4) durch Multiplikation mit einem Skalar zu ähnlichen Folgerungen führt, weil Feldvektor und Elektrizitätsdichte sich mit diesem Skalar vervielfältigen und außerdem ein Glied im Viererstrom auftritt, das die Feldstärke selbst als Faktor enthält und daher als Leitungsstrom gedeutet werden könnte. Wesentlich aber bei meiner Ableitung ist die Heranziehung des zweiten Skalars $\mathfrak{v}$, der die scharfe Trennung zwischen elektrischem und magnetischem Bestandteil ermöglicht; dieser zweite Skalar aber läßt sich nur dann finden, wenn man auch den dualen Feldvektor benutzt. Es ist daher überhaupt nicht denkbar, daß der Verschiebungsvektor sich wesentlich anders darstellt, als ich ihn

in Gleichung (10) eingeführt habe. Die Benutzung zweier voneinander unabhängiger Skalare $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{o}$ als Faktoren der beiden Feldvektoren aber führt zu der Trennung von Dielektrizität und Permeabilität und erklärt auch die letzte Materialkonstante, die Leitfähigkeit. Die Zurückführung dieser drei Größen aber auf f und φ war mir nur möglich durch Vergleich meiner Theorie der Elektrodynamik von 1916/17 und der Weylschen; ich denke, daß damit eine starke Stütze für die Richtigkeit beider Theorien gewonnen ist. Daß die Materialkonstanten diesen Namen nicht verdienen, hängt damit zusammen, daß eben die Eigenschaften sonst gleichartiger Materie sich unter dem Einfluß des Feldes ändern, ja, daß eben das, was wir Materie nennen, in Wirklichkeit nichts anderes ist als eine besondere Modifikation des Feldes, d. h. eigentlich der Raumzeitmannigfaltigkeit. Für deren Vierdimensionalität glaube ich aber ein noch stärkeres Argument als Weyl erbracht zu haben, weil diese allein die so wesentliche Existenz des dualen Vektors ermöglicht.

Der Fall der Kugelsymmetrie. Ist das Feld kugelsymmetrisch, wie wir es für den Fall eines einzigen Elektrons haben würden, so muß eine andere Behandlung Platz greifen. Sämtliche Größen können dann nur Funktionen einer einzigen Veränderlichen, des Mittelpunktsabstandes r sein, den ich mit x^1 gleichsetze. Dann ist die natürliche Eichvorschrift von selbst erfüllt, und eine Umeichung ändert daran nichts, solange eben der Eichskalar a auch nur eine Funktion von r ist. Das Feld hat nur eine Komponente f_{01}, und der Skalar (ff^*) verschwindet.

Somit wäre alles in bester Ordnung; nun müßten wir aber, wenn wir bei dem bisherigen Verfahren bleiben wollten,

$$\mathrm{Div}\,\varphi_{\mathrm{II}} + (\varphi, \varphi^*)_{\mathrm{II}} = \varkappa\lambda$$

setzen. Die Divergenz wird offenbar 0, da φ_{II} eben nur die Komponenten φ_2 und φ_3 in der zu f_{01} dualen 23-Fläche haben kann, somit in der Divergenz auch nur Differentiationen nach x^2 und x^3 auftreten. Man könnte dann vielleicht den Skalar $(\varphi, \varphi^*)_{\mathrm{II}}$ von Null verschieden wählen; das hat aber den Nachteil, daß dann wenigstens eine der Komponenten φ_2 und φ_3 von Null verschieden ausfällt. Da aber die x^2- und x^3-Linien Kreise sind, würde das bedeuten, daß bei der Streckenüber-

tragung längs dieser Kreise, wobei sich φ_2 und φ_3 ja nicht ändern dürfen, da x^1 gleich bleibt, Nichtintegrabilitäten auftreten würden, während diese doch gerade auf die $x^0\,x^1$-Fläche beschränkt sein sollen. Es bleibt also nichts anderes übrig, als $\varkappa\,\lambda = 0$ anzunehmen, was entweder auf $\varkappa = 0$ oder $\lambda = 0$ führen muß. Beides scheint mißlich. Aus $\varkappa = 0$ würde nämlich wegen Gleichung (14) auch $\varepsilon = 0$ oder $a_i = 0$ folgen. Der Ansatz $\varepsilon = 0$ ist aber mindestens ebenso unangenehm wie $\lambda = 0$, und aus $a_i = 0$ würde sich ergeben, daß der Drehungsvektor $\sin\vartheta$, dessen Vergleich mit dem Weylschen Nichtintegrabilitätsvektor ja die Grundlage der ganzen Theorie sein sollte, in der $x^0\,x^1$-Ebene stets unendlich wäre, während er in der $x^2\,x^3$-Fläche das nicht zu sein braucht, da ja f_{23} verschwindet. An sich wäre das ja möglich, da ja ϑ_{01} imaginär ist; aber es würde bedeuten, daß die Elementardrehung so weit durchgeführt wäre, daß alle Richtungen mit den Lichtlinien des Vor- und Nachkegels zusammenfielen, und das wäre doch wohl der Gipfel des Ungereimten.

Man sieht sich also genötigt, $\lambda = 0$ zu setzen, und dürfte dieser Größe dann nicht die Bedeutung der Permeabilität geben. Dieser Begriff wird ja aber überhaupt hinfällig, da in dem hier vorhandenen statischen Felde die magnetische Vektorkomponente ganz fehlt. Wegen $(ff^*) = 0$ reduziert sich vielmehr die Gleichung (15) einfach auf $h = \varepsilon \cdot f$, und es ist nicht nötig, wie im allgemeinen Fall $\varepsilon\,\lambda = 1$ zu setzen, wenn man die Gleichungen auf den Äther anwenden will; es genügt vielmehr dann die Forderung, daß die einzige hier auftretende Größe $\varepsilon = 1$ wird, weil eben (ff^*) überall verschwindet. Die beiden Gleichungen (17) widersprechen sich dann nicht, sondern laufen auf dasselbe hinaus, da ψ mit φ identisch wird. Man könnte hier sogar der Forderung Genüge leisten, daß die Dielektrizität ε wirklich konstant würde, weil man die in der Eichvorschrift noch offen gelassene Bestimmung der Funktion χ_1 passend treffen könnte. Es will mir aber zweifelhaft scheinen, ob das wirklich eine angemessene Lösung darstellen würde, da ε sich dann sprunghaft ändern müßte, wenn es im Äther den Wert 1 annehmen soll. Zweckmäßiger würde es wohl sein, über die Eichung so zu verfügen, daß die Gleichung (9) des I. Teils und damit die alte Feldgleichung (5): $\mathfrak{K} = 2\,\mathrm{Div}\,\mathrm{Grad}\,\mathfrak{A}$ erfüllt wären.

Es würden also folgende Gleichungen zu erfüllen sein, wenn diese Eichvorschrift schon als geschehen angenommen wird:

A. Die Feldgleichung der Gravitation:

$$\mathfrak{K} = 2\,\mathrm{Div}\,\mathrm{Grad}\,\mathfrak{A} = \frac{2}{\sqrt{G}}\,\frac{d}{dr}\sqrt{G}\,\frac{d\mathfrak{A}}{dr}.$$

B. Die 0. Feldgleichung der Elektrizität:

$$\mathrm{Div}_0 f = -\frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{d}{dr}\sqrt{G}\,g^{11}\frac{d\varphi_0}{dr}$$
$$= \tfrac{3}{2}[\mathfrak{B}\mathfrak{F} - (\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B})\mathfrak{g}^2]\,g^{00}\varphi_0 \quad (g^{01}\text{ verschwindet}).$$

C. Die 1. Feldgleichung der Elektrizität:

$$\mathrm{Div}_1 f = 0 = \tfrac{3}{2}[\mathfrak{B}\mathfrak{F} - (\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B})\mathfrak{g}^2]\,g^{11}$$
$$\left[\varphi_1 - \frac{d\,\lg[\mathfrak{B}\mathfrak{F} - (\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B})\mathfrak{g}^2]}{dr}\right].$$

D. Die Gleichung (16):

$$\mathrm{Div}\,\varphi + (\varphi_\nu \varphi^\nu) = \frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{d}{dr}\sqrt{G}\,g^{11}\varphi_1 + g^{00}\varphi_0{}^2 + g^{11}\varphi_1{}^2 = \frac{\varkappa}{\varepsilon}.$$

Hierzu tritt noch die Gleichung E.:

$$-\mathfrak{F} = \mathfrak{K} + \frac{3}{\sqrt{G}}\,\frac{d}{dr}\sqrt{G}\,g^{11}\varphi_1 + \tfrac{3}{2}(g^{00}\varphi_0{}^2 + g^{11}\varphi_1{}^2)$$

und F.:

$$\mathfrak{g}^2 = g^{11}\left(\frac{d\mathfrak{A}}{dr}\right)^2$$

und wegen $g_{22} = r^2$, $g_{33} = r^2\cos^2 x^2$ die Formel

$$G = g_{00}\,g_{11}\,r^4\cos^2 x^2.$$

Die Größen g_{00} und g_{11} hängen mit $\mathfrak{A}$ zusammen, und zwar ist $g_{00} = e^{2\mathfrak{A}}$ zu setzen, während $g_{11} = 1$ wird, wenn man an der Annahme des unverzerrten Ruhraumes festhält; bei Voraussetzung der Einsteinschen Verzerrung wird dagegen

$$g_{11} = \frac{1}{g_{00}} = e^{-2\mathfrak{A}}.$$

Nun ist die beste Wahl der Funktion $\mathfrak{B}$ die, sie konstant, nach Weyls Bezeichnung $-1/\beta$, zu setzen, wodurch $\mathfrak{B}'$ verschwindet. Dann enthalten aber die 6 Gleichungen A. bis F. immer noch die 7 Veränderlichen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{g}^2$, φ_0, φ_1 und ε.

Man könnte demnach über eine von ihnen noch willkürlich verfügen. Das hatte ich in meiner ersten Arbeit[1]) getan, indem ich $\mathfrak{R}$ konstant annahm, allerdings mit zwei verschiedenen Werten, 0 im Außenraum und positiv im Innern der Elektronen. Ob dieser Ansatz im Lichte der Gleichung (10) des I. Teils nicht besser durch den entsprechenden für die Größe $-\mathfrak{F}$ zu ersetzen wäre, oder ob eine davon abweichende Annahme, die die Unstetigkeiten vermeidet, vorzuziehen ist, möchte ich dahin gestellt sein lassen. Jedenfalls zeigt sich die Notwendigkeit, eine weitere Hilfshypothese zu treffen, gerade wie bei Weyl, der $\mathfrak{F}$ konstant annahm, und ebenso die Schwierigkeit, die Funktionen aus den Differentialgleichungen wirklich zu ermitteln. Man kann natürlich zunächst die Größe ε beiseite lassen und zuerst die fünf anderen Gleichungen betrachten. Setzt man in ihnen $\mathfrak{B} = -\frac{1}{\beta}$, so erhält man

$$\varphi_1 = \frac{d \lg (\mathfrak{F} + 2\mathfrak{g}^2)}{dr}, \qquad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{d}{dr} \sqrt{G}\, g^{11} \frac{d\varphi_0}{dr} = \frac{8}{2\beta} (\mathfrak{F} + 2\mathfrak{g}^2) g^{00} \varphi_0 .$$

Eingehendere Lösungsversuche will ich aber zurückstellen, bis es mir gelingt, die oben erwähnte Hilfshypothese passend zu wählen.

Zusammenfassend aber läßt sich über den Fall des kugelsymmetrischen Feldes sagen, daß er nur einen Skalar ε zuläßt, während der der Permeabilität entsprechende Skalar λ verschwinden muß. Wir nehmen nun aber an, daß diese von 0 verschieden ist und im Grenzfalle 1 wird, und das scheint mir ein Grund dafür zu sein, daß genau kugelsymmetrische Felder nicht existieren. Somit können gerade wie in der Mieschen Theorie[2]) derartige Felder nicht auftreten; man wird also zur atomistischen Struktur der Elektrizität geführt. Für nur annähernd erfüllte Kugelsymmetrie wird aber der Grund hinfällig, Div $\varphi_u + (\varphi_v \varphi^v)_u = 0$ zu setzen; es entfällt also die Notwendigkeit, $\varkappa$ oder λ verschwinden zu lassen, so daß man demnach imstande ist, die für den allgemeinen Fall entwickelten Gleichungen mit voller Strenge anzuwenden.

Energie- und Impulssatz. Indem ich zum allgemeinen Fall zurückkehre, um Energie- und Impulssatz abzuleiten, bin

1) E. Reichenbächer, Ann. d. Phys. **52**. S. 151. 1917.

2) G. Mie, Grundlagen einer Theorie der Materie. Ann. d. Phys. **39**. S. 36. 1912.

ich zu einem der älteren Theorie entsprechenden, aber von den neueren Methoden Kleins[1]) und Weyls[2]) abweichenden Verfahren genötigt. Das liegt einmal an meiner Annahme des skalaren Potentials, zweitens an der Einführung des Skalares $\mathfrak{p}$ außerhalb der Weltfunktion, um zur Aufstellung der elektromagnetischen Gleichungen (21) oder (23) zu kommen.

Ich bilde also entsprechend, wie das Minkowski[3]) und Laue[4]) getan haben, den Welttensor

$$(26)\quad T_\mu^\nu = [f \cdot h] = \tfrac{1}{4}(f_{\mu\alpha} h^{\nu\alpha} + h_{\mu\alpha} f^{\nu\alpha} - f^*_{\mu\alpha} h^{*\nu\alpha} - h^*_{\mu\alpha} f^{*\nu\alpha})$$

und von diesem die Divergenz

$$(27)\quad \begin{cases} K_\mu = \mathrm{Div}_\nu T_\mu^\nu = \dfrac{1}{4\sqrt{G}} \dfrac{\partial}{\partial x^\nu} \sqrt{G}(f_{\mu\alpha} h^{\nu\alpha} + h_{\mu\alpha} f^{\nu\alpha} \\ \qquad\qquad - f^*_{\mu\alpha} h^{*\nu\alpha} - h^*_{\mu\alpha} f^{*\nu\alpha}). \end{cases}$$

Nach einem dem Laueschen genau nachgebildeten Verfahren erhält man dann

$$K_\mu = +\tfrac{1}{2}\{h_{\mu\alpha} \mathrm{Div}_\nu f^{\nu\alpha} + f_{\mu\alpha} \mathrm{Div}_\nu h^{\nu\alpha} - h^*_{\mu\alpha} \mathrm{Div}_\nu f^{*\nu\alpha} - f^*_{\mu\alpha} \mathrm{Div}_\nu h^{*\nu\alpha}\}.$$

In diese Gleichung setzt man ein [nach (I 4) und (I 6)[$\mathrm{Div}_\nu f^{\nu\alpha} = d^\alpha$, [nach (21)] $\mathrm{Div}_\nu h^{\nu\alpha} = s^\alpha$, [nach (2)] $\mathrm{Div}_\nu f^{*\nu\alpha} = 0$ und schließlich einen neuen Vierervektor

$$(28)\quad \begin{cases} t^\alpha = \mathrm{Div}_\nu h^{*\nu\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial}{\partial x^\nu} \sqrt{G}\, h^{*\nu\alpha} \\ \qquad\qquad = \dfrac{1}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial}{\partial x} \sqrt{G}(\mathfrak{p} f^{*\nu\alpha} + \mathfrak{o} f^{\nu\alpha}). \end{cases}$$

Dann wird

$$K_\mu = \tfrac{1}{2}\{h_{\mu\alpha} d^\alpha + f_{\mu\alpha} s^\alpha - f^*_{\mu\alpha} t^\alpha\}.$$

Führt man nun wieder für h den Ausdruck $\mathfrak{p} f + \mathfrak{o} f^*$ ein, so bekommt man

$$(29)\quad K_\mu = \tfrac{1}{2}\{f_{\mu\alpha}(\mathfrak{p} d^\alpha + s^\alpha) + f^*_{\mu\alpha}(\mathfrak{o} d^\alpha - t^\alpha)\}.$$

---

1) F. Klein, Göttinger Nachr. 1918. H. 2. S. 171ff.
2) H. Weyl, Ann. d. Phys. 59. S. 114ff. 1919.
3) H. Minkowski, Math. Ann. 68. S. 507ff. 1910.
4) M. v. Laue, Relativitätsprinzip. 2. Aufl. S. 86.

Zwecks weiterer Umbildung will ich erst den Vektor t^a berechnen. Nach (28) ist

$$t^a = \mathfrak{p}\,\mathrm{Div}\,f^* + \mathfrak{o}\,\mathrm{Div}\,f + f^{*\nu a}\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial x^\nu} + f^{\nu a}\frac{\partial \mathfrak{o}}{\partial x^\nu},$$

d. h. nach (2) und (I 4, 6):

$$t^a = \mathfrak{o}\,d^a + f^{*\nu a}\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial x^\nu} + f^{\nu a}\frac{\partial \mathfrak{o}}{\partial x^\nu}. \tag{30}$$

Führt man hierin übrigens wieder wie bei s^a die Ausrechnung für das natürliche Koordinatensystem des Elektromagnetismus durch, so erhält man die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} t^0 &= f^{*10}\frac{\partial \frac{1}{\lambda}}{\partial x^1}, \quad & t^1 &= f^{*01}\frac{\partial \frac{1}{\lambda}}{\partial x^0}, \\ t^2 &= f^{*32}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x^3}, \quad & t^3 &= f^{*23}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x^2}, \end{aligned}\right. \tag{31}$$

die den Gleichungen (24) entsprechen und wie sie zur Bestätigung der Richtigkeit herangezogen werden können. Sie zeigen übrigens, daß der Vektor t verschwindet, wenn die Permeabilität von x^0 und x^1, die Dielektrizität von x^2 und x^3 unabhängig ist.

Aus Gleichung (21) folgt

$$\mathfrak{p}\,d^a = s^a - f^{\nu a}\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial x^\nu} - f^{*\nu a}\frac{\partial \mathfrak{o}}{\partial x^\nu}.$$

Setzt man diesen Wert und t^a aus (30) in (29) ein, so erhält man

$$K_\mu = f_{\mu a}s^a - \tfrac{1}{2}(f_{\mu a}f^{\nu a} + f^*_{\mu a}f^{*\nu a})\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial x^\nu} - \tfrac{1}{2}(f_{\mu a}f^{*\nu a} + f^*_{\mu a}f^{\nu a})\frac{\partial \mathfrak{o}}{\partial x^\nu}.$$

Die Klammerausdrücke sind nun aber die Produkte der Skalare $\mathfrak{f}^2$ und $(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)$ mit dem bekannten Vektor δ^ν_μ, der 1 bedeutet, wenn $\mu = \nu$ ist, sonst aber verschwindet. Man erhält also

$$K_\mu = f_{\mu a}s^a - \tfrac{1}{2}\mathfrak{f}^2\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial x^\mu} - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)\frac{\partial \mathfrak{o}}{\partial x^\mu}. \tag{32}$$

In diese Gleichung kann man die Ausdrücke für

$$\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial x^\mu} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x^\mu}$$

aus (22a) einsetzen; nach Zusammenziehen erhält man dann

$$(33)\quad \begin{cases} K_\mu = f_{\mu a} s^a - \frac{1}{2} \mathfrak{f}^2 \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{1+\varepsilon\lambda}{2\lambda} + \frac{1}{2}\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{1-\varepsilon\lambda}{2\lambda}, \\ K_\mu = f_{\mu a} s^a - \frac{1}{4}[\mathfrak{f}^2 + \sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2}] \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^\mu} \\ \qquad\qquad - \frac{1}{4}[\mathfrak{f}^2 - \sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2}] \frac{\partial \frac{1}{\lambda}}{\partial x^\mu}. \end{cases}$$

Diese Gleichung würde an die Stelle der Minkowskischen[1]) (91) und (92) treten; es ist bemerkenswert, daß das dem „Ruhstrahl" Ω, der sich übrigens aus dem Skalar $(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)$ herleiten ließe, entsprechende Glied mit dem Faktor $\varepsilon\lambda - 1$ bei mir gerade herausfällt.

Die Erhaltung von Energie und Impuls ist gewahrt, wenn man den Vierervektor K als den der ponderomotorischen Kraft bezeichnet; der Tensor T enthält dann in seinen rein räumlichen Komponenten in bekannter Weise die Spannungen, in den gemischten den Poyntingschen Vektor und in der rein zeitlichen $T_0{}^0$ die Energie des elektromagnetischen Feldes. In dessen natürlichem Koordinatensystem erhält man die Ruhenergie"

$$(34)\quad \begin{cases} \mathfrak{T}_0{}^0 = \frac{1}{2} f_{01}(\mathfrak{p} f^{01} + \mathfrak{v} f^{*01}) - \frac{1}{2} f_{01}^*(\mathfrak{p} f^{*01} + \mathfrak{v} f^{01}) \\ \qquad = \frac{1}{2}\mathfrak{p}(f_{01} f^{01} - f_{23} f^{23}) = \frac{1}{2}\mathfrak{p}\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2} \\ \qquad = \frac{1}{4\lambda}[(1+\varepsilon\lambda)\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2} - (1-\varepsilon\lambda)\mathfrak{f}^2]. \end{cases}$$

Für den freien Äther, wo ja $\varepsilon = \lambda = \mathfrak{p} = 1$ werden, gibt dies

$$(35)\quad \lim_{\text{Äther}} \mathfrak{T}_0{}^0 = \frac{1}{2}\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2}.$$

Diese Auffassung der ponderomotorischen Kraft würde auch zu meiner Ableitung des Coulombschen Gesetzes im 3. Abschnitt meiner ersten Arbeit[2]) passen, die den zu h proportionalen Drehungsvektor $\sin\vartheta$ benutzt.

1) H. Minkowski, a. a. O., S. 511.
2) E. Reichenbächer, Ann. d. Phys. 52. S. 147ff. 1917.

Zusammenfassung.

Der Feldgleichung der Gravitation

$$\mathfrak{R} = 2\,\mathrm{Div}\,\mathrm{Grad}\,\mathfrak{A}$$

ist die Gestalt gegeben worden, die sie eichinvariant erscheinen läßt:

$$-\mathfrak{F} = 2\,\mathrm{Div}\,\mathrm{Grad}\,\mathfrak{A} + 2g^{\mu\nu}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x^\mu}\varphi_\nu .$$

Neben dem elektromagnetischen Potential φ ist ein Hilfspotential ψ eingeführt

$$\psi_\mu = (2\varphi_\varkappa f^{\varkappa\lambda} f_{\mu\lambda} - \mathfrak{f}^2\cdot\varphi_\mu)\cdot[\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2]^{-1/2}$$

und mit seiner Hilfe die Skalare ε und λ definiert:

$$\mathrm{Div}\,\varphi + \tfrac{1}{2}(\varphi_\nu\varphi^\nu) + \tfrac{1}{2}(\psi_\nu\psi^\nu) = \frac{\varkappa}{\varepsilon}(1+\varepsilon\lambda),$$

$$\mathrm{Div}\,\psi + (\varphi_\nu\psi^\nu) = \frac{\varkappa}{\varepsilon}(1-\varepsilon\lambda).$$

Diese gehen in die Gleichung ein, die den Verschiebungsvektor h auf den Feldvektor f zurückführt:

$$h = f\left[\frac{1+\varepsilon\lambda}{2\lambda} - \frac{1-\varepsilon\lambda}{2\lambda}\mathfrak{f}^2\{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2\}^{-1/2}\right] + f^*\frac{1-\varepsilon\lambda}{2\lambda}(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)\{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2\}^{-1/2}$$

und haben die physikalische Bedeutung von Dielektrizität und Permeabilität. Die Feldgleichungen der Elektrizität erhalten dann die Gestalt

$$\begin{aligned}\mathrm{Div}_\nu h = s^\nu = \Big\{&\left[\frac{1+\varepsilon\lambda}{2\lambda} - \frac{1-\varepsilon\lambda}{2\lambda}\mathfrak{f}^2\{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2\}^{-1/2}\right]\mathrm{Div}_\nu f \\ &+ \frac{1-\varepsilon\lambda}{2\lambda}[f^{\mu\nu}(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*) - f^{*\mu\nu}\mathfrak{f}^2]\cdot\left[(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)\frac{\partial\mathfrak{f}^2}{\partial x^\mu} - \mathfrak{f}^2\frac{\partial(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)}{\partial x^\mu}\right]\cdot[\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2]^{-1/2}\Big\} \\ &+ \Big\{f^{\mu\nu}\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{1+\varepsilon\lambda}{2\lambda} - \mathfrak{f}^2\{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2\}^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{1-\varepsilon\lambda}{2\lambda}\right] \\ &+ f^{*\mu\nu}(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)[\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2]^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{1-\varepsilon\lambda}{2\lambda}\Big\},\end{aligned}$$

wobei die Scheidung in Konvektions- und Leitungsstrom durch die Schleifenklammern angedeutet ist. Die Umrechnung auf

das natürliche Koordinatensystem des Elektromagnetismus gibt die Leitfähigkeit σ gleich der räumlichen Änderung $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x^1}$ der Dielektrizität ε.

Für den Fall des kugelsymmetrischen Feldes ergibt sich die Notwendigkeit, $\lambda = 0$ zu setzen, was auf die Nichtexistenz derartiger Felder, in völliger Genauigkeit genommen, schließen läßt.

Während der Erhaltungssatz der Elektrizität in der Weylschen Gestalt abgeleitet wird, ist für Energie- und Impulssatz auf die ältere Methode von Minkowski-Laue zurückgegriffen.

Die Feldgleichung n für Gravitation und Elektromagnetismus sind sowohl koordinaten- wie eichinvariant. Aber zur einfachen physikalischen Deutung der Materialkonstanten ε, λ, σ muß eine natürliche Eichung gewählt werden.

Wilhelmshaven, den 15. März 1920.

(Eingegangen 23. März 1920.)

3. *Zur Theorie der Hochvakuumentladung; von George Jaffé.*

Einleitung.

Die unipolare Leitfähigkeit, welche dem absoluten Vakuum durch Elektrizitätsträger eines Vorzeichens mitgeteilt werden kann, ist schon wiederholt Gegenstand theoretischer Untersuchung gewesen. J. J. Thomson[1]) hat zuerst die Gleichungen für diesen Fall aufgestellt und aus ihnen eine Methode zur Bestimmung der spezifischen Ladung der betreffenden Elektrizitätsträger abgeleitet. Später haben Child[2]) und Langmuir[3]) aus den gleichen Grundgleichungen unter vereinfachenden Anfangsbedingungen die Stromspannungscharakteristik abgeleitet, und Schottky[4]) hat den Einfluß der Anfangsgeschwindigkeiten und ihrer Verteilung nach dem Maxwellschen Gesetz einer eingehenden Analyse unterzogen. Dagegen ist dem Verfasser keine Arbeit bekannt, in welcher der Einfluß von Gasresten und die durch sie bedingten Abweichungen vom Verhalten des reinen Vakuums theoretisch behandelt würden. Eine solche Untersuchung scheint aber von Interesse, weil der Experimentator es naturgemäß niemals mit dem absoluten Vakuum zu tun hat und weil sich von vornherein nicht übersehen läßt, inwieweit die Verhältnisse, die im absolut leeren Raum herrschen würden, durch die Anwesenheit von Gasresten modifiziert werden. Im folgenden ist der Versuch gemacht, die Theorie in dieser Richtung zu vervollständigen, jedoch nur für den Fall, daß der Gasdruck außerordentlich gering bleibt.

1) J. J. Thomson, Conduction of Electricity through Gases, 2. Aufl. 1906, S. 228.

2) C. D. Child, Phys. Rev. 32. S. 492, 1912.

3) J. Langmuir, Phys. Rev. (2) 2. S. 450. 1913; Phys. Zeitschr. 15. S. 348. 681. 1914.

4) W. Schottky, Phys. Zeitschr. 15. S. 526, 624, 656, 872. 1914; Ann. d. Phys. 44. S. 1011. 1914; Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 16. S. 490. 1914.

§ 1. **Theorie der Hochvakuumentladung bei ebener Anordnung.**

Wir untersuchen zuerst die Leitfähigkeit zwischen zwei unendlich ausgedehnten parallelen Platten, deren eine Elektronen auszusenden vermag. Wir legen die x-Achse unseres Koordinatensystems senkrecht zu den beiden Ebenen; die emittierende Elektrode befinde sich bei $x = 0$ und sei Kathode, die Anode befinde sich bei x. Es möge sich ein Gas zwischen den Platten befinden, so daß Ionisation durch Stoß und Wiedervereinigung stattfindet; der Gasdruck soll aber so niedrig sein, daß die positiven Ionen wegen ihrer geringen Zahl und Geschwindigkeit keinen merklichen Beitrag zum Stromwerte liefern. Von der Anwesenheit negativer Ionen soll abgesehen werden. Unter diesen Annahmen tragen die positiven Ionen nur zur Verteilung des Potentials V bei; nach der Poissonschen Gleichung wird

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -4\pi e(p-n), \tag{1}$$

wenn unter e die Elementarladung, unter p und n die Zahl der positiven Ionen, bzw. Elektronen pro ccm verstanden wird. Die Stromdichte i wird unter den gemachten Annahmen

$$i = env, \tag{2}$$

wenn v die Geschwindigkeit der Elektronen bedeutet und der Strom Einfachheit halber positiv gerechnet wird, wenn die Elektronen sich in der Richtung der positiven x bewegen. Da die positiven Ionen keinen merklichen Beitrag zum Strom liefern sollen, erfordert der stationäre Zustand die Beziehung

$$Q - \alpha np = 0, \tag{3}$$

wo Q die Zahl der pro Sekunde und ccm erzeugten Ionen, und α der Wiedervereinigungskoeffizient ist.

Für die Geschwindigkeit v der Elektronen machen wir den gleichen Ansatz, wie ihn Langmuir für das absolute Vakuum macht

$$\frac{m}{2}v^2 = eV \tag{4}$$

(m = Elektronenmasse), d. h. wir beschränken die Betrachtung auf so hohe Werte von V, daß die Anfangsgeschwindigkeit vernachlässigt werden kann, und wir setzen weiter voraus, daß die Geschwindigkeit der Elektronen durch die anwesenden Gas-

moleküle nicht nennenswert modifiziert wird. Letztere Annahme steht natürlich, streng genommen, im Widerspruch mit der Berücksichtigung von Stoßionisation und Wiedervereinigung. Die Gleichung (4) ist auch nicht so zu deuten, als ob im Entladungsraume keine ungeordnete Bewegung stattfände, so daß die Elektronen in Form eines gerichteten Kathodenstrahles den Raum durcheilen; das dürfte nicht einmal im Vakuum in aller Strenge der Fall sein. Die Gleichung (4) ist lediglich ein Ausdruck dafür, daß bei genügend niedrigem Gasdruck die Geschwindigkeiten der Elektronen nicht merklich von denen verschieden sind, die im absoluten Vakuum herrschen würden. Dann wird es auch erlaubt sein, die seitlichen Komponenten der Geschwindigkeit gegenüber der Geschwindigkeit in Richtung des Potentialgefälles zu vernachlässigen und demnach die Zahl der wirksamen Stöße proportional der Stromdichte zu setzen. Es wird also

$$Q = q\,i, \tag{5}$$

wo nun q selbst noch proportional dem Gasdruck ist und im übrigen als konstant angesehen werden kann, wenn nur V hinreichend weit über der Ionisierungsspannung liegt.

Die Gleichungen (1) bis (5) stellen ein hinreichendes System dar, um bei gegebenen Grenzbedingungen für V und $\frac{dV}{dx}$ die Unbekannten V, n, p, Q und v als Funktionen von x und i zu bestimmen. Die Gleichungen gelten nur für hinreichend niedrige Werte des Gasdruckes und für hinreichend hohe Werte der Potentialdifferenz V zwischen den beiden Platten. Die Annahmen sind so gemacht, daß die Gleichungen das Mindestmaß von Abweichungen von den Verhältnissen des absoluten Vakuums darstellen; es ist ja im Grunde nur der Einfluß der positiven Ionen auf den Potentialverlauf berücksichtigt; aber gerade dieses Mindestmaß ist von Interesse.

Die Behandlung der aufgestellten Gleichungen läßt sich ohne Schwierigkeit durchführen. Eliminiert man v zwischen (2) und (4), so ergibt sich

$$n = i\sqrt{\frac{m}{2e^2V}}; \tag{6}$$

dieses und (5) in (3) eingesetzt, ergeben

$$p = \frac{q}{a}\sqrt{\frac{2e^3V}{m}}, \tag{7}$$

und aus (6), (7) und (1) erhält man schließlich die Differentialgleichung für V:

$$2\frac{d^2V}{dx^2} = a_1\left(\frac{V^{-1/2}}{2} - b_1\frac{3V^{1/2}}{2}\right), \tag{8}$$

wobei

$$\begin{cases} a_1 = ai; & a = 16\pi\sqrt{\frac{m}{2e}}, \\ b_1 = \frac{b}{i}; & b = \frac{2e^2q}{3m\,a} \end{cases} \tag{9}$$

gesetzt ist.

Multipliziert man (8) mit $\frac{dV}{dx}$ und integriert, so erhält man

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 - \left(\frac{dV}{dx}\right)^2_{x=0} = a_1(V^{1/2} - b_1V^{3/2}), \tag{10}$$

wenn V an der Kathode gleich Null gesetzt wird. Was den Wert des Potentialgradienten an der emittierenden Elektrode betrifft, so setzen Child und Langmuir $\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=0} = 0$, und Schottky hat gezeigt, daß diese Annahme statthaft ist, wenn die Anfangsgeschwindigkeit der Elektronen vernachlässigt werden darf, d. h. wenn so hohe beschleunigende Potentiale betrachtet werden, daß dagegen die verzögernden Potentiale verschwinden, welche die Elektronen vermöge ihrer Anfangsgeschwindigkeit überwinden können. Da wir uns auf diesen Fall beschränken, darf also die vereinfachende Annahme

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=0} = 0$$

gemacht werden. Trotzdem wird es sich als nötig erweisen, auch von Null verschiedene Werte des Anfangsgradienten in Betracht zu ziehen; um aber zu bequem übersichtlichen Resultaten zu gelangen, wollen wir den Einfluß der positiven Ionen und des Anfangsgradienten gesondert voneinander untersuchen.

a) Einfluß der positiven Ionen.

Wir setzen also zunächst $\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=0} = 0$ bei beliebigem b_1. Dann erhalten wir aus (10) durch Separation der Variablen:

$$\frac{dV}{\sqrt{V^{1/2} - b_1 V^{1/4}}} = \sqrt{a_1}\, dx. \tag{11}$$

Führen wir hier zwei neue Variable ein

$$\begin{cases} \eta = \sqrt[4]{b_1 V}, \\ \xi = \frac{\sqrt{2a_1}}{4} b_1^{3/4} x, \end{cases} \tag{12}$$

so ergibt sich

$$\frac{\sqrt{2}\,\eta^2 d\eta}{\sqrt{(1-\eta^3)(1+\eta^3)}} = d\xi, \tag{13}$$

und setzen wir nun noch

$$\eta = \cos\varphi, \tag{14}$$

so wird aus (13)

$$2\sqrt{1 - {}^1/_2 \sin^2\varphi}\, d\varphi - \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - {}^1/_2 \sin^2\varphi}} = d\xi. \tag{15}$$

Integrieren wir diese Gleichung und bestimmen die Integrationskonstante so, daß V für $x = 0$ verschwindet, d. h. also $\varphi = \frac{\pi}{2}$ für $\xi = 0$ wird, so ergibt sich

$$\begin{cases} 2\left[E\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{\pi}{2}\right) - E\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \varphi\right)\right] \\ \qquad - \left[F\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{\pi}{2}\right) - F\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \varphi\right)\right] = \xi, \end{cases} \tag{16}$$

wo in der üblichen Weise

$$\begin{cases} F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \quad \text{und} \\ E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} \end{cases} \tag{16a}$$

die elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung bedeuten.[1])

1) Tabellen der elliptischen Integrale findet man bei E. Jahnke und F. Emde: Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1909.

Die Gleichung (16) stellt zusammen mit den Definitionsgleichungen für die Hilfsvariablen φ und ξ (12) und (14) und für die Konstanten a_1 und b_1 (9) den gesuchten Zusammenhang zwischen V, i und x dar. Sieht man x als konstant an, so erhält man die Stromspannungskurve, und bei konstantem i ergibt sich der Feldverlauf zwischen den Elektroden. Es empfiehlt sich noch, die Abhängigkeit von i explizit zum Ausdruck zu bringen. Aus (12) und (9) findet man

$$\eta^4 = \frac{bV}{i},$$

und hieraus

$$\xi^4 = \frac{a^2 b^3 x^4}{64\ i}$$

(17)
$$\begin{cases} j = \dfrac{a^3 x^3}{64\,\xi^4} \\ V = \dfrac{a^3 x^3 \eta^4}{64\ \xi^4} \end{cases}$$

mit der Bedeutung

(17a) $$j = i x^3; \qquad \varkappa = b x^3.$$

Der „reduzierte Strom" j hängt also, außer von V und der universellen Konstante a, nur von dem einen Parameter $\varkappa$ ab. Der Gang der Rechnung ist der, daß zu gegebenen Werten von i, x und b aus der ersten Gleichung (17) zuerst ξ berechnet wird; dazu findet man das zugehörige $\eta = \cos\varphi$, indem man den Zusammenhang zwischen φ und ξ nach (16) graphisch oder tabellarisch aufstellt. V ergibt sich dann aus der zweiten Gleichung (17). (Sind nicht i und x beide vorgegeben, so ist es natürlich einfacher, zu zusammengehörigen Werten von ξ und η nach (17) j und V zu berechnen). Stromspannungskurven für verschiedene $\varkappa$-Werte gehen durch eine einfache Transformation auseinander hervor; will man von der Charakteristik für den Wert $\varkappa$ zu derjenigen mit dem Werte $\gamma\varkappa$ übergehen, so hat man — wie (17) zeigt — nur die j-Werte mit γ^3 und die V-Werte mit γ^2 zu multiplizieren, oder mit anderen Worten: $j/\varkappa^3$ ist universelle Funktion von $v/\varkappa^2$.

Für sehr kleine Werte des Stromes versagt die Gleichung (16); η darf nicht größer als 1 werden (wie sich am einfachsten aus (13) ergibt). Für $\eta = 1$ erreicht ξ seinen höchsen Wert

(18) $$\xi_{max} = 2E\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{\pi}{2}\right) - F\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}8471.$$

Folglich muß

$$j \geqq \frac{a^2 x^6}{64\, \xi^4_{max}} \tag{18a}$$

bleiben. Praktisch ist das für alle Potentialwerte erfüllt, die nicht schon durch die früheren Annahmen ausgeschlossen sind.

Für kleine Werte von b_1 kann man die linke Seite von Gleichung (11) nach Potenzen von b_1 entwickeln. Vernachlässigt man Glieder zweiter Ordnung, integriert und berücksichtigt (9), so erhält man die Näherungsgleichung

$$\frac{4 V^{3/4}}{3} + \frac{2 b V^{1/4}}{7 i} = \sqrt{a i}\, x. \tag{19}$$

Setzt man hier

$$V = V_0 + b V_1$$

ein, so ergibt sich nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten

$$V = (a_2 i x^2)^{2} \{1 - b_2 a_2^{1/2} i^{-1/2} x^{1/2}\} \tag{20}$$

mit der Bedeutung

$$a_2 = \frac{9a}{16} = 9\pi \sqrt{\frac{m}{2e}}; \quad b_2 = \frac{2b}{7} = \frac{4 e^2 q}{21 m a}. \tag{20a}$$

Setzt man in (20) $b_2 = 0$, so erhält man die Child-Langmuirsche Formel, und das zweite Glied gibt die Korrektion an, die infolge der Anwesenheit positiver Ionen an ihr anzubringen ist — hinreichend kleines b_2 und x und hinreichend großes i vorausgesetzt. Man erkennt, daß die prozentische Abweichung von der Grenzformel dem Produkt von b und $x^{1/2}$ proportional ist. Da nun b dem Gasdruck proportional ist (s. Formel (9) und S. 147), ergibt sich daraus, daß die Anforderungen an die Güte des Vakuums um so höher werden, je größer der Elektrodenabstand ist, wenn für einen gegebenen Stromwert die Grenzfunktion bis auf einen bestimmten Betrag erreicht werden soll. (Dasselbe folgt auch im allgemeinen Falle aus den Formeln (17), denen zufolge der reduzierte Strom außer von V nur von x, d. h. dem Produkt von b und x^3 abhängt).

Wir wollen nun noch den Fall behandeln, daß nach der Spannung, nicht zwischen Kathode und Anode, sondern zwischen zwei beliebigen Ebenen („Sonden") x_1 und $x_2 = x_1 + d$ gefragt wird. Bei strenger Berechnung hat man dann für jeden Strom-

wert i nach (16) und (17) die zu x_1 und x_2 gehörigen Potentiale V_1 und V_2 zu berechnen und die Differenz $V_2 - V_1$ zu bilden Bei kleinem b findet man aus (20)

$$V_2 - V_1 = (A_2\, i\, d^2)^{2/3}\{1 - B_2\, A_2^{2/3}\, i^{-1/3}\, d^{1/3}\} \tag{21}$$

wenn gesetzt wird

$$\left\{\begin{aligned} A_2 &= \frac{9A}{16} = \frac{9a}{16}\,\frac{(x_2^{4/3} - x_1^{4/3})^2}{d^2}, \\ B_2 &= \frac{2B}{7} = \frac{2b}{7}\,\frac{x_2^{2/3} - x_1^{2/3}}{(x_2^{4/3} - x_1^{4/3})^2}, \end{aligned}\right. \tag{21a}$$

d. h. die Näherungsformel (21) wird mit (20) gleichlautend, wenn man die Konstanten a_2 und b_2 durch A_2 und B_2, bzw. a und b durch A und B ersetzt. Das legt den Gedanken nahe, eine brauchbare Fortsetzung der Kurve (21) nach der Seite kleinerer i-Werte in der Weise zu gewinnen, daß man die Konstanten A, B und d statt a, b und x in (17) und (16) einsetzt. Diese Berechnungsart würde sich dann empfehlen, wenn x_1 und x_2 nicht einzeln bekannt sind, sondern nur ihr Abstand d; es wäre dann erlaubt, A und B einfach als empirisch zu bestimmende Konstante anzusehen.

Die numerische Prüfung ergibt, daß die angegebene Berechnungsart in der Tat mit guter Annäherung zum Ziel führt; wäre z. B. $x_1 = 20$ und $x_2 = 23$, so würde der Fehler im Potentialwert bei $i = 10^{-3}$ Amp. etwa 1 Proz., bei $i = 3 \cdot 10^{-3}$ nur noch 0,2 Proz. betragen (dabei ist für b der Wert $1{,}2 \cdot 10^{-6}$ eingesetzt). Wir können diese Betrachtung dahin zusammenfassen, daß die abgeleitete Strom-Spannungskurve auch für Sondenmessungen gelten muß, wenn die Konstanten in der angegebenen Weise abgeändert werden.

Der abgeleitete Zusammenhang zwischen reduziertem Strom $j = ix^2$ und Potential ist nach (16) und (17) für einige Werte des Parameters x berechnet und in Fig. 1 wiedergegeben worden. Es wurden technische Einheiten für die Stromdichte und die Potentiale verwendet; der Wert des Koeffizienten a_2 ist dann nach Langmuir[1]) $a_2 = {}^1/_{2{,}33 \cdot 10^{-6}} = 4{,}29 \cdot 10^5$. Als

1) J. Langmuir, Phys. Zeitschr. 15. S. 351. 1894.

Abszissen wurden die Werte von $V^{3/2}$, als Ordinaten die reduzierten Stromdichten $j = i x^2$ eingetragen; die Kurven 1—4 beziehen sich auf die Parometerwerte $\varkappa = 0$; $\varkappa = 1 \cdot 10^{-5}$; $\varkappa = 2 \cdot 10^{-5}$ und $\varkappa = 4 \cdot 10^{-5}$, die Kurve 1 stellt also die Langmuirsche Charakteristik für das absolute Vakuum dar und die zunehmenden $\varkappa$ bedeuten zunehmenden Gasdruck. Man

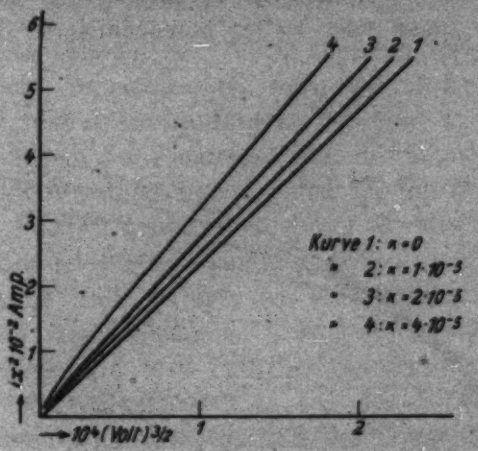


Fig. 1.

sieht, wie die Potentialwerte für gleiche Stromwerte mit steigendem Gasdruck abnehmen, ohne daß die lineare Beziehung zwischen i und $V^{3/2}$ wesentlich gestört würde — wenigstens für kleine Werte von $\varkappa$. Die Abweichungen vom Verhalten des reinen Vakuums sind, wie schon erwähnt, um so merklicher, je größer der Gasdruck und je größer der Elektrodenabstand (denn $\varkappa$ ist proportional x^3).

Ferner ist von Interesse der Verlauf des Potentialgradienten $\frac{dV}{dx}$. Für kleine b findet man aus (20)

$$\frac{dV}{dx} = \frac{2}{3}(a_2 i)^{2/3} x^{1/3}\{1 - 4 b_2 a_2^{2/3} i^{-1/3} x^{4/3}\}. \tag{22}$$

Im allgemeinen Falle ist erst V und dann mit Hilfe von (11) $\frac{dV}{dx}$ zu berechnen.

Der Verlauf von $\frac{dV}{dx}$ zwischen 0 und 60 cm ist bei dem Stromwert $i = 10^{-3}$ Amp.cm^{-2} für eine Reihe von b-Werten

nach (11) berechnet und in Fig. 2 eingezeichnet worden. Die Kurven 1—4 entsprechen den b-Werten $b = 0$, $b = 2{,}5 \cdot 10^{-8}$, $b = 5 \cdot 10^{-8}$ und $b = 1 \cdot 10^{-7}$. Der Einfluß der positiven Ionen ist hier noch auffälliger, als in der Strom-Spannungskurve. Der Potentialgradient, der schon im absoluten Vakuum in einiger Entfernung von der Kathode sehr langsam ansteigt, — ist er doch für $b_2 = 0$ nach (22) proportional $x^{1/4}$ — wird durch die positiven Ionen noch weiter homogenisiert. Aus (8) folgt,

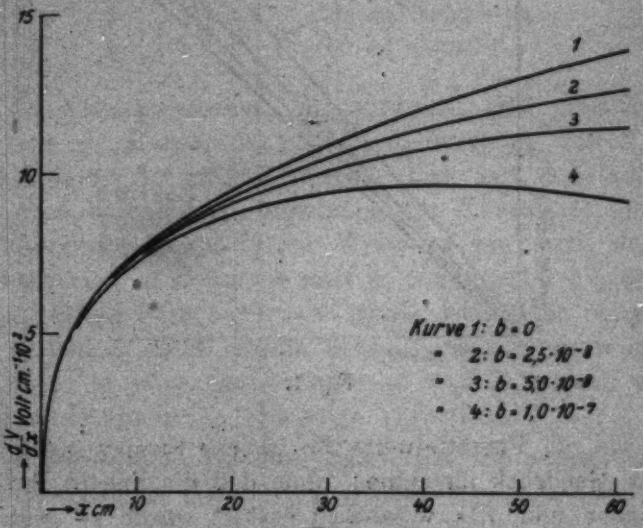


Fig. 2.

daß für $V = {}^1/_{3b_1}$ ein Maximum des Gradienten auftritt, und im berechneten Fall liegt bei Kurve 4 dieses Maximum schon in etwa 40 cm Entfernung von der Kathode, so daß das Feld zwischen 20 und 60 cm als praktisch homogen angesehen werden kann. Dabei ist der Einfluß auf den Feldverlauf sehr viel merklicher als auf die Charakteristik. Denkt man sich z. B. bei $x_1 = 30$ und $x_2 = 33$ zwei Sonden angebracht, so würde nach (21) bei $i = 10^{-2}$ und den b-Werten, welche den Kurven 2,3 und 4 der Fig. 2 zugrunde gelegt sind, die Abweichung der V-Werte vom Vakuumwert nur 2,8, 5,6 bzw. 12,5 Proz. betragen. Wäre der Abstand der Sonden noch kleiner, so würde die Beeinflussung der Charakteristik noch geringer; bei 1 cm Sondenabstand (in 30 cm Entfernung von

der Kathode) entspricht etwa Kurve 3 in Fig. 1 der Kurve 4 in Fig. 2.

Über den Zahlenwert von b für einen gegebenen Wert des Gasdrucks wird später (S. 161) das Nötige zu sagen sein.

b) Einfluß des Anfangsgradienten.

Es wurde schon erwähnt, daß die Annahme $\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=0}$ nur näherungsweise zulässig ist. Wenn man die Anfangsgeschwindigkeiten nicht vernachlässigt, tritt, wie Schottky[1]) nachgewiesen hat, von einem bestimmten Potential an ein Potentialminimum zwischen den Elektroden auf, das mit steigendem beschleunigenden Potential immer näher an die Kathode heranrückt. Der Potentialgradient an dieser ist also dann negativ, und der Strom ist für alle Potentialwerte unterhalb der Temperatursättigung (falls es sich um eine Glühkathode handelt) größer als bei verschwindender Anfangsgeschwindigkeit.

Das Umgekehrte wird natürlich zu erwarten sein, wenn sich dem Austritt der Elektronen aus der Kathode eine hindernde Kraft entgegensetzt, so daß der Gradient an ihr erst einen bestimmten positiven Wert erreichen muß, bevor überhaupt Elektronen in den Entladungsraum gelangen können. Solche Verhältnisse werden im allgemeinen nicht vorliegen, sie ließen sich aber z. B. verwirklichen, wenn unmittelbar vor der Kathode eine Gitterelektrode mit hinreichendem verzögernden Potential angebracht würde. Wir werden später sehen, daß auch unter anderen Bedingungen ein ähnlicher Effekt zustande kommt. Der Fall ist darum nicht ohne praktisches Interesse und soll im folgenden behandelt werden.

Wir setzen also jetzt in Gleichung (10) $b_1 = 0$ und

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=0}^2 = c^2, \tag{23}$$

wodurch wir erhalten:

$$\frac{dV}{\sqrt{a_1 V^{1/2} + c^2}} = dx. \tag{24}$$

Substituiert man hier

$$\sqrt{a_1 V^{1/2} + c^2} = y, \tag{25}$$

1) W. Schottky, Phys. Zeitschr. 15. S. 526 u. 624. 1914.

integriert und bestimmt die Integrationskonstante so, daß V für $x = 0$ verschwindet, so erhält man

$$\frac{4}{3a_1^2}(y^3 - 3c^2y + 2c^3) = x. \tag{26}$$

Unter Berücksichtigung von (9) und (25) ergibt diese Gleichung nach einiger Reduktion die gesuchte Beziehung zwischen i, V und x in der Form:

$$16aiV^{3/2} - 48c^2V = 9a^2i^2x^2 - 48c^3x. \tag{27}$$

Um die Strom-Spannungskurve zu erhalten, lösen wir (27) nach ix^2 auf und finden

$$j = ix^2 = \frac{8}{9a}\left\{V^{3/2} \pm \sqrt{V^3 - \frac{27}{4}(\varrho^2V - \varrho^3)}\right\}. \tag{28}$$

$$\varrho = cx. \tag{28a}$$

Die Beziehung zwischen V und dem reduzierten Strom hängt also nur von dem einen Parameter ϱ ab. Es ist zu beachten, daß $V^{3/2} > 0$ sein muß, weil sonst wegen $b_1 = 0$ aus (8) $\frac{d^2V}{dx^2} < 0$ folgen würde, was den Bedingungen des Problems widerspricht. Dagegen sind für c nach (23) positive und negative Werte zulässig. Unter diesen Umständen ergeben sich aus (28) drei verschiedene Charakteristiken; untersucht man aber den Potentialverlauf zwischen den Elektroden (indem man (27) bei konstantem i nach x auflöst), so zeigt sich, daß nur eine der drei Kurven den Anfangsbedingungen $V_{x=0} = 0$ und $\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=0} = +c$ genügt. Obgleich es nun nicht ohne Interesse ist, daß man durch Abänderung der Anfangsbedingungen auf sehr verschiedene Entladungsformen kommen kann (S. 165), wollen wir uns auf die so bestimmte Kurve beschränken. Sie ist in Fig. 3 für 4 verschiedene Werte des Parameters ϱ gezeichnet. Kurve 1 entspricht $\varrho = 0$, in welchem Falle (28) in die Langmuirsche Formel übergeht; die Kurven 2, 3 und 4 entsprechen den Werten $\varrho = 64{,}4$, $\varrho = \sqrt{2} \cdot 64{,}4 = 91{,}1$ und $\varrho = 2 \cdot 64{,}4 = 128{,}8$. Als Abszissen sind wiederum die Werte von $V^{3/2}$, als Ordinaten die reduzierten Stromdichten $j = ix^2$ aufgetragen, so daß die Langmuirsche Charakteristik als Gerade erscheint. Die Kurven schneiden die V-Achse für

$V = \varrho = cx$; für kleinere Werte des Potentials kann kein Strom übergehen, wie es ja nicht anders zu erwarten war. Für Potentialwerte, die nur einigermaßen größer sind als ϱ, gehen die Kurven einfach durch Parallelverschiebung in der j, $V^{3/2}$-Ebene aus der Kurve 1 hervor; so gewinnt man eine einfache Näherung, die für viele Zwecke genügen dürfte.

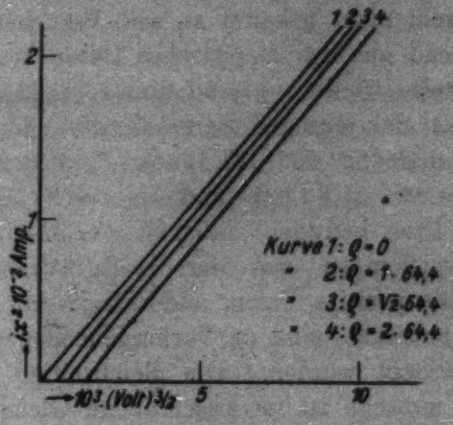


Fig. 3.

Soll die Potentialdifferenz wieder zwischen zwei Ebenen x_1 und $x_2 = x_1 + d$ gemessen werden, so muß die in $V^{1/2}$ kubische Gleichung (27) nach $V^{1/2}$ aufgelöst werden. Wir begnügen uns damit, die erste Näherung für kleine Werte von c anzugeben, die man auch direkt aus (27) nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten erhalten kann. Sie lautet

$$V = (a_2\, i\, x^2)^{1/3} \left\{1 + \frac{9c^2}{8} (a_2\, i)^{-4/3} x^{-2/3}\right\}, \tag{29}$$

wo a_2 die Bedeutung (20a) hat.

Demnach wird die Potentialdifferenz zwischen den Ebenen x_1 und x_2

$$V_2 - V_1 = (A_2\, i\, d^2)^{1/3} \left\{1 + \frac{9C^2}{8} (A_2\, i)^{-4/3} d^{-2/3}\right\}, \tag{30}$$

wenn A_2 wieder durch (21a) und C^2 durch

$$C^2 = c^2 \frac{(x_2^{4/3} - x_1^{4/3})(x_2^{2/3} - x_1^{2/3})}{d^2} \tag{30a}$$

definiert wird.

Die Näherung gilt für hinreichend kleine C und hinreichend große i bei gegebenem d. Man kann wiederum, wie oben (S. 152), versuchen eine angenäherte Darstellung der Charakteristik auch für kleine Werte von i zu gewinnen, indem man die abgeänderten Konstanten A, C und d an Stelle von a, c und x in die Gleichung (28) einsetzt. Die numerische Prüfung ergibt auch hier die Zulässigkeit dieser Berechnungsart, bei der x_1 und x_2 einzeln nicht bekannt zu sein brauchen, wenn man A und C passend aus den empirischen Daten bestimmt. Setzt man beispielsweise wieder $x_1 = 20$ und $x_2 = 23$, so wird die Abweichung von der strengen Berechnungsart (die, wie schon gesagt, die Auflösung von (27) nach V erfordert) bei $i = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ Amp. etwa 1,6 Proz. und bei $i = 3 \cdot 10^{-3}$ Amp. nur noch etwa 0,4 Proz. betragen; dabei ist $c = 22{,}8$ angenommen.

Die Abweichungen von der Langmuirschen Kurve, welche einerseits positive Ionen, andererseits ein positiver Anfangsgradient bewirken, sind im Vorhergehenden getrennt voneinander untersucht worden. Die gleichzeitige Berücksichtigung beider Umstände ist im Anschluß an Gleichung (10) mit Hilfe von elliptischen Integralen durchführbar; handelt es sich aber um relativ geringe Abweichungen, so genügt es die Korrektionsglieder in (20) und (29) (bzw. (21) und (30)) zu superponieren. Für viele Zwecke wird es auch genügen, die durch (16) und (17) dargestellte Charakteristik in der $j, V^{3/2}$-Ebene parallel mit sich zu verschieben. Schreiben wir den durch (16) und (17) gegebenen Zusammenhang in der Form

$$V^{3/2} = \Phi(a, b, i, x), \tag{31}$$

so kann der Einfluß eines positiven Anfangsgradienten näherungsweise durch

$$V^{3/2} = C_1 + \Phi(a, b, i, x) \tag{31a}$$

wiedergegeben werden, und wir erinnern nochmals daran, daß a, b und x durch A, B und d aus (21a) zu ersetzen sind, wenn das Potential zwischen den „Sonden" x_1 und x_2 gemessen wird.

§ 2. Theorie der Hochvakuumentladung bei zylindrischer Anordnung.

Wir betrachten nun den Fall, daß die beiden Elektroden konzentrische Kreiszylinder sind, und zwar sei die Kathode ein emittierender Draht vom Radius r_0, und der Durchmesser

des Anodenzylinders sei $2r$. Führen wir demgemäß Zylinderkoordinaten ein, so tritt an die Stelle der Gleichung (1)

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = -4\pi r\varepsilon(p-n). \tag{32}$$

Die Gleichungen (2) bis (5) behalten ihre Gültigkeit, nur ist zu berücksichtigen, daß die Stromdichte i nicht mehr konstant ist, sondern vermöge der Relation

$$i = \frac{J}{2\pi r} \tag{33}$$

durch J zu ersetzen ist, wo wir unter J den Gesamtstrom pro Längeneinheit des Kathodendrahtes verstehen wollen.

Die Elimination der übrigen Unbekannten zwischen (2) bis (5), (32) und (33) ergibt folgende Differentialgleichung für das Potential:

$$r\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{dV}{dr} = f\{V^{-1/2} - gr\,V^{1/2}\}. \tag{34}$$

Dabei ist gesetzt:

$$\begin{cases} f = \sqrt{\frac{2m}{e}}\,J \\ g = \frac{6\pi b}{J}, \end{cases} \tag{35}$$

wo b dieselbe Bedeutung hat, wie in (9).

Die strenge Behandlung von (34) dürfte auf Schwierigkeiten stoßen; wir begnügen uns damit, näherungsweise eine Lösung für kleine Werte von g zu suchen. Wir machen dafür den Ansatz

$$V = V_0 + gV_1, \tag{36}$$

führen diesen Ausdruck in die Differentialgleichung ein, entwickeln nach steigenden Potenzen von g und streichen alle Glieder, welche g in höherer als erster Potenz enthalten. Die von g freien Glieder liefern für V_0 die Gleichung

$$r\frac{d^2V_0}{dr^2} + \frac{dV_0}{dr} = fV_0^{-1/2}, \tag{37}$$

welche identisch ist mit der von Langmuir behandelten.[1]) Wir können darum auch die von Langmuir gegebene Lösung benutzen; es ist

1) J. Langmuir, Phys. Zeitschr. 15. S. 351. 1914. Gleichung (11).

$$(38)\qquad \begin{cases} V_0 = (f_1\, r\, \beta^2\, J)^{1/2} \\ f_1 = \frac{9}{4}\frac{f}{J} = \frac{9}{4}\sqrt{\frac{2m}{e}}, \end{cases}$$

wo β eine zwischen 0 und 1 veränderliche Größe ist, die von dem Verhältnis r/r_0 abhängt. Für hinreichend große Werte dieses Verhältnisses (r/r_0 größer als etwa 17), wird β sehr nahezu gleich 1. Wir beschränken uns im folgenden auf diesen Fall und setzen also

$$(39)\qquad V_0 = (f_1\, r\, J)^{1/2}.$$

Diejenigen Glieder, welche beim Einsetzen von (38) in (34) den Faktor g erhalten, ergeben die Differentialgleichung für V_1:

$$(40)\qquad r\frac{d^2 V_1}{dr^2} + \frac{d V_1}{dr} + \frac{f V_1 V_0^{-3/2}}{2} = -f r V_0^{1/2}$$

oder nach Substitution von (39)

$$(41)\qquad \frac{d^2 V_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d V_1}{dr} + \frac{2}{9}\frac{V_1}{r^2} = -\frac{4}{9}(f_1 J)^{1/2} r^{1/2}.$$

Das vollständige Integral dieser Gleichung lautet:

$$(42)\qquad V_1 = -\frac{4}{51}(f_1 J)^{1/2} r^{1/2} + c_1 r^{\sqrt{-2}/3} + c_2 r^{-\sqrt{-2}/3}.$$

Da nun V, also auch V_1 für $r = 0$ verschwinden soll (wir vernachlässigen ja jetzt r_0), müssen c_1 und c_2 verschwinden, so daß wir erhalten

$$(43)\qquad V_1 = -\frac{4}{51}(f_1 J)^{1/2} r^{1/2}.$$

Setzen wir nun noch (39) und (43) in (36) ein, so ergibt sich unter Berücksichtigung von (35)

$$(44)\qquad V = (f_1\, r\, J)^{1/2}\left\{1 - \frac{8\pi}{17} f_1^{1/2} b\, r^{1/2} J^{-1/2}\right\}.$$

Diese Gleichung ist durchaus analog der Näherungsformel (20), die wir für den Fall ebener Elektroden gewonnen hatten.

Führen wir wieder Volt-Ampere-Zählung ein, so erhält f_1 nach der Angabe von Langmuir den Wert

$$f_1 = 1/14{,}65 \cdot 10^{-6} = 6{,}83 \cdot 10^4.$$

§ 3. Vergleich mit der Erfahrung.

Es wäre von Interesse, festzustellen, für welchen Druckbereich die Gültigkeit der hier gegebenen Entwicklungen zu erwarten ist. Dafür wäre es erforderlich, die Stromspannungs-

charakteristik für eine Reihe von Druckwerten zu kennen — wobei alle Drucke noch hinreichend niedrig sein müßten — um daraus die Abhängigkeit unseres Koeffizienten b vom Druck zu ermitteln. Solche Versuche bei *gemessenen* Drucken liegen nicht vor, und dürften wohl auch außerordentlich schwierig sein, da in dem fraglichen Druckintervall die Methoden der Druckmessung zu versagen beginnen. Immerhin kann man auf Grund von Beobachtungen von Dushman[1]) eine Schätzung des Koeffizienten b vornehmen.

Zunächst ist zu bemerken, daß b dem Quotienten q/α proportional ist (s. Formel (9)), wo q und α die auf S. 3 und 4 eingeführten Größen sind. Von q wurde schon gesagt, daß es dem Gasdruck proportional sein muß, und von dem Wiedervereinigungskoeffizienten α wird man auf Grund kinetischer Überlegungen annehmen dürfen, daß er — wenigstens in erster Annäherung — unabhängig vom Druck ist. Demnach wäre b proportional dem Druck und wir setzen

$$b = b_0 p, \tag{45}$$

wo der Gasdruck p in mm Quecksilber gemessen werden soll.

Nun gibt Dushman eine Versuchsreihe an, bei welcher die beobachteten Werte im Bereiche $J = 2{,}23 \cdot 10^{-3}$ Amp. bis $1{,}89 \cdot 10^{-2}$ Amp. innerhalb der Versuchsfehler (1—2 Proz.) mit der Langmuirschen Formel (vgl. unsere Formel (39)) übereinstimmten. Der Druck wird bei dem Versuche von Dushman auf kleiner als $4 \cdot 10^{-7}$ mm Hg, gegen Schluß des Versuches auf kleiner als $2 \cdot 10^{-7}$ geschätzt, und zwar handelt es sich um Luft. Wir werden also jedenfalls keinen groben Fehler machen, wenn wir annehmen, daß bei einem Druck von $1 \cdot 10^{-7}$ und einem Strom von $2{,}23 \cdot 10^{-3}$ Amp. das Korrektionsglied in (44) kleiner als 0,02 ist. Setzt man die angegebenen Zahlenwerte ein (r ist gleich 1,27 cm zu setzen) und berücksichtigt (45), so erhält man als obere Grenze für b_0 den Wert $b_0 < 7{,}1$.

Eine untere Grenze gewinnen wir aus einer anderen Angabe desselben Autors. Bei einem Stickstoffdruck von etwa $1 \cdot 10^{-5}$ hat Dushman (a. a. O. S. 132) bei 15 Volt Spannung statt

1) S. Dushman, Phys. Rev. (2) 4. S. 121. 1914; Phys. Zeitschr. 15. S. 681. 1914.

des berechneten Wertes $J = 1{,}18 \cdot 10^{-3}$ Amp. einen mehr als dreimal so großen Wert beobachtet. Nun gilt unsere Formel (44) natürlich nicht mehr für so große Abweichungen, aber man wird jedenfalls soviel behaupten dürfen, daß unter den angegebenen Umständen das Korrektionsglied größer als 0,3 sein wird. Daraus berechnet sich als untere Grenze $b_0 > 0{,}86$, der wahre Wert dürfte aber für Luft der oberen Grenze näher liegen. Die Frage, inwieweit b_0 von der Natur des Gases abhängt, bleibt bei dieser Schätzung völlig offen, wir sehen aber, daß als Druckgebiet, für welches unsere Theorie Gültigkeit beansprucht, etwa das Intervall von 10^{-7} bis 10^{-5} mm Hg in Frage kommt.

Bei weitem das umfangreichste und sorgfältigste experimentelle Material über Hochvakuumentladung liegt in den Arbeiten von Lilienfeld[1]) vor. Dieser hat auch zuerst das oben (s. S. 153) abgeleitete Ansteigen des Potentialgefälles für konstanten Strom mit fortschreitender Gasverdünnung (unterhalb eines gewissen Gasdrucks) beobachtet und mit dem Auftreten von Raumladung in Zusammenhang gebracht. Die Lilienfeldschen Messungen sind fast ausnahmslos an Entladungsröhren ausgeführt, die aus einem langen und ziemlich engen zylindrischen Teil und einer kugelförmigen Erweiterung für die Aufnahme der Glühkathode bestehen. Die Stromspannungskurve wurde bei den älteren Beobachtungen (L I und L II) zwischen zwei Sonden aufgenommen, die sich im Abstande von 3 cm voneinander in der Mitte des etwa 30 cm langen zylindrischen Teils befanden. Auf die neueren Messungen (L III) kommen wir später zu sprechen.

Lilienfeld stellt den Zusammenhang zwischen Stromdichte i und Potentialdifferenz V durch eine empirische Relation

$$i = \lambda V^2 + \mu \tag{46}$$

dar, wo λ und μ Konstante sind. Die Beziehung gilt für hinreichend große Stromdichten (i größer als etwa $1{,}3 \cdot 10^{-3}$ Amp.

1) Zusammengefaßt in den drei Annalenarbeiten: J. E. Lilienfeld, Ann. d. Phys. 32. S. 675. 1910; 43. S. 24. 1914; 61. S. 221. 1920. Auf diese Veröffentlichungen wird im Text mit L I, L II und L III verwiesen.

cm $^{-2}$); für kleinere Stromdichten hat Lilienfeld als erster empirisch ein Anwachsen des Stromes proportional mit V^n festgestellt (L I, S. 719). In dem Gebiete der Gültigkeit von (46) ist nach Lilienfeld der Potentialverlauf linear. Trotzdem glaubt der Verfasser, daß sich die gesamten Lilienfeldschen Beobachtungen zwanglos und ohne neue Annahmen durch die oben entwickelte Theorie darstellen lassen.

Es kann natürlich zweifelhaft erscheinen, ob sich die Entwicklungen unseres ersten Paragraphen überhaupt auf die von Lilienfeld benutzte Form des Entladungsrohres anwenden lassen. Nun hat aber Lilienfeld experimentell gezeigt, daß die Charakteristik, unabhängig vom Röhrendurchmesser, nur von der Stromdichte abhängt (L I, S. 729). Das heißt aber gar nichts anderes, als daß die Röhrenwände ohne Einfluß sind, und daß zum mindesten im zylindrischen Teil des Entladungsrohres Verhältnisse wie zwischen sehr ausgedehnten ebenen Elektroden bestehen. Für die kugelförmige Erweiterung ist das natürlich nicht mehr der Fall, und man wird auf Abweichungen vom normalen Verhalten gefaßt sein müssen, die von der besonderen Röhrenform herrühren.

Was nun den linearen Verlauf des Potentials betrifft, so ist darauf hinzuweisen, daß Lilienfeld stets in möglichst großer Entfernung von der Kathode gemessen hat, um von dem störenden Einfluß des ersten Röhrenteils frei zu kommen. Nun wächst aber, wie schon oben (S. 154) ausgeführt wurde, in einigermaßen beträchtlicher Entfernung von der Kathode der Potentialgradient selbst im absoluten Vakuum sehr langsam nach der Anode zu an, und Gasreste, welche so gering sein können, daß sie die Charakteristik nicht merklich beeinflussen, gleichen das Potentialgefälle noch weiter aus.

Die einzigen von Lilienfeld veröffentlichten Messungen über den Verlauf des Potentialgradienten[1]) sind nicht mit Sonden, sondern mit einer verschiebbaren Anode gemacht und nicht unter den besten von ihm erreichten Vakuumbedingungen (L III, § 15, Tabellen 1a, 1b und 2). Sie beweisen nach Lilienfeld die Linearität des Potentialverlaufs, doch sind sie

1) Die Messungen bei variablem Röhrendurchmesser (L I, S. 720 u. folg.) scheiden hier aus, ergeben aber übrigens auch ein Anwachsen des Gradienten nach der Anode zu.

auch mit unserer Auffassung verträglich. Verstehen wir in der Bezeichnung von § 1 unter x_1, x_2 und x_3 drei Anodenlagen, unter V_1, V_2 und V_3 die zugehörigen Potentiale (gleiche Stromdichte vorausgesetzt), so haben wir nach Gleichung (20) im absoluten Vakuum, d. h. also für $b_2 = 0$,

$$R = \frac{V_3 - V_2}{V_2 - V_1} = \frac{x_3^{4/3} - x_2^{4/3}}{x_2^{4/3} - x_1^{4/3}}. \tag{47}$$

Der Quotient R ist also im absoluten Vakuum unabhängig von i. Bei der Anwendung auf die erwähnten Versuche darf natürlich x_1 nicht einfach gleich dem geometrischen Abstand der Anode von der Kathode bei ihrem kleinsten Abstand gesetzt werden, denn in diesem Falle ist ja die Strombahn nicht zylindrisch, man kann aber x so bestimmen, daß die tatsächliche Entladungsbahn einem zylindrischen Stück von der Länge x_1 äquivalent wird.

In den Versuchen von Lilienfeld ergibt sich das Verhältnis R nicht als unabhängig vom Strom; es zeigt einen deutlichen Gang von etwa 1,12 bei dem kleinsten Stromwert bis herab auf 1,00 (L III, Tab. 1 a). Da $x_3 - x_2 = x_2 - x_1 = 7{,}8$ cm zu setzen ist, würde ein Wert $R = 1{,}10$ schon durch einen Wert $x_1 = 20$ bei absolutem Vakuum erklärt werden.[1]) Das Sinken der R-Werte mit steigendem i ließe sich durch gesteigerte Gasabgabe von den Wänden, wie sie Lilienfeld selbst für den höchsten Stromwert als merklich hinstellt, deuten.

Unter diesen Umständen ist es zu bedauern, daß keine Messungen über den Potentialverlauf in möglichst langen Röhren bei dem besten erreichbaren Vakuum vorliegen. Erst solche Messungen würden zu entscheiden gestatten, ob die Gesetzmäßigkeiten, die von der Raumladung herrühren, zur Erklärung ausreichen, oder ob völlig neue Verhältnisse anzunehmen sind. Das Studium der Strom-Spannungscharakteristiken spricht allerdings mehr für die zuerst erwähnte Auffassung.

Es zeigt sich nämlich, daß sämtliche in den drei zitierten Arbeiten von Lilienfeld mitgeteilten Charakteristiken sich mindestens mit der gleichen Genauigkeit, wie durch die

1) Tatsächlich ist x_1 als wesentlich größer anzunehmen, wie der starke Potentialabfall im Anfangsteil der Röhre beweist.

Formel (46), und über einen größeren Bereich von Stromwerten, durch die empirische Relation

$$i = \lambda_1 V^{3/2} + \mu_1, \tag{48}$$

d. h. also auch durch die theoretischen Formeln (28) und (31a) darstellen lassen. Die Konstante μ_1 ist fast ausnahmslos positiv und für einigermaßen beträchtliche Stromdichten klein neben $\lambda_1 V^{3/2}$. In dem Auftreten der Konstanten μ_1 (bzw. c und C_1) glauben wir den Einfluß der besonderen Röhrenform zu erkennen. Es wurde ja oben (S. 155) gezeigt, daß der Anfangsgradient c überall dort positiv ist, wo sich dem Austritt der Elektronen aus der Kathode ein Widerstand entgegensetzt. Jeder Umstand, der in diesem Sinne wirkt und der demgemäß den Potentialanstieg im Anfangsteil der Röhre heraufsetzt, wird für die entfernteren Teile des Rohres wirken wie die Anfangsbedingung $\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=0} > 0$. Ein solcher Umstand ist bei der Lilienfeldschen Röhrenform in der Aufladung der Glaswände gegeben, an der Stelle, wo sich der weite Röhrenteil zu dem engen zylindrischen Teil verjüngt (L III, S. 225 und S. 248; man vgl. auch die Fig. 6, L I).

Macht man die einfache Annahme, daß diese Aufladung nur bis zu einem bestimmten, relativ niedrigen Stromwert i_0 wächst, so kann man — zum mindesten mit guter Annäherung — ihren Einfluß für Stromwerte oberhalb i_0 durch die Bedingung $\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=0} = c > 0$ in Rechnung setzen. Unterhalb des kritischen Stromwertes i_0 werden die Verhältnisse viel weniger einfach liegen; die Entladung wird dann sehr von den zufällig wechselnden Grenzbedingungen abhängen. Man kommt dort also in das Gebiet labiler Kurvenäste, wie sie Lilienfeld beobachtet hat (L I, S. 700 u. folg. L III, S. 233), und wie sie auch von der Theorie durch passende Abänderung der Grenzbedingungen errechnet werden könnten (s. oben S. 156). Diese Betrachtungen lassen es gerechtfertigt erscheinen, die Rechnungen von § 1b auf den vorliegenden Fall anzuwenden und machen es zugleich erklärlich, warum die Lilienfeldschen Charakteristiken oberhalb eines kritischen Wertes i_0 durchaus die Form der Kurven in Fig. 3 haben.

Tabelle 1.

10^3 (Volt)^2	$5{,}72 \cdot 10^{-5}$ Amp. bzw. $6{,}61 \cdot 10^{-5}$ Amp.cm^{-2}				
	i_1 beob.	i_2 ber. nach (46)	$i_1 - i_2$	i_3 ber. nach (28)	$i_1 - i_3$
15,5	11,8	—	—	—	—
21,5	24,3	—	—	—	—
31,0	36,8	—	—	[42,8]	[− 6,0]
36,0	49,3	—	—	49,3	± 0,0
45,5	61,8	[66,4]	[− 4,6]	61,1	+ 0,7
57,5	74,3	77,6	− 3,3	75,0	− 0,7
68,3	86,8	87,7	− 0,9	86,8	± 0,0
80,0	99,3	98,6	+ 0,7	99,1	+ 0,2
92,5	111,8	110,2	+ 1,6	111,7	+ 0,1
118,5	136,8	134,5	+ 2,3	136,6	+ 0,2
132,5	149,3	147,5	+ 1,8	149,4	− 0,1
147,0	161,8	161,05	+ 0,75	162,3	− 0,5
162,0	174,3	175,05	− 0,75	175,3	− 1,0
173,0	186,8	185,3	+ 1,5	184,7	+ 2,1
192,0	199,3	203,0	− 3,7	200,4	− 1,1
		$\lambda = 6{,}160 \cdot 10^{-3}$ $\mu = 1{,}584 \cdot 10^{-3}$		$A = 1{,}320 \cdot 10^5$ $C = 2{,}27 \cdot 10^1$	

Als Beispiel für das Gesagte betrachten wir diejenige Beobachtungsreihe von Lilienfeld, welche bei den besten Druckbedingungen ausgeführt wurde. Es ist das der Versuch *C* vom 15. Sept. 1911 (L II, Tab. II, S. 32), bei welchem das Entladungsrohr in flüssige Luft tauchte und zugleich flüssiger Wasserstoff um das Gasadsorptionsgefäß zum Gefrieren gebracht wurde. In Tab. I bedeuten die i_1 die beobachteten Stromwerte, die zu den angegebenen Werten von V^2 gehören. Die i_2 sind nach Formel (46) berechnet, die i_3 nach Formel (28), wobei A und C empirisch bestimmt sind, was ja nach der Bemerkung auf S. 156 zulässig ist. (Der Sondenabstand d betrug 3 cm). Bei der Berechnung der theoretischen Werte ist noch zu berücksichtigen, daß die von Lilienfeld angegebenen Stromwerte noch in Stromdichten umgerechnet werden müssen; dafür ist die lichte Weite des Rohres zu 1,05 cm angesetzt worden. Die bei der Berechnung benutzten Konstanten sind in Tab. 1 angegeben, und es sei noch bemerkt, daß A und C durch Probieren gefunden sind, während λ und μ nach der Methode der kleinsten Quadrate — unter Nichtberücksichtigung der fünf kleinsten Stromwerte — ermittelt wurden. In Fig. 4

sind die Beobachtungen in doppelter Darstellung wiedergegeben: links sind die Werte von $V^{1/2}$ als Abszissen abgetragen, rechts die Werte von V^2. Die eingezeichneten Kurven sind mit den Konstanten der Tab. 1 berechnet, links nach (28) rechts nach (46).

Sowohl die Fig. 4, wie die Tab. 1 zeigen die Überlegenheit der theoretischen Formel (28); sie stellt die Beobachtungen

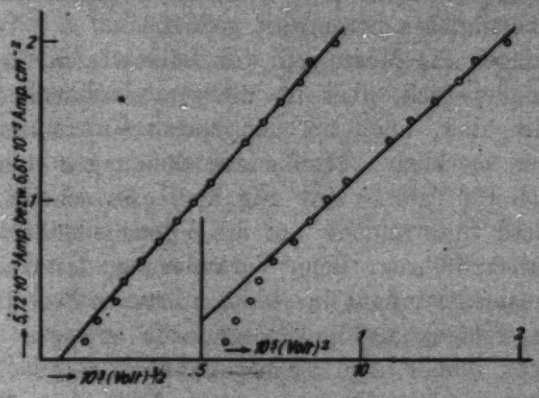


Fig. 4.

genauer und über einen größeren Bereich dar, als die empirische Formel (46). Aus Tab. 1 geht hervor, daß nicht nur die Differenzen $i_1 - i_2$ größer sind als die Differenzen $i_1 - i_3$, sondern auch einen systematischen Gang zeigen, in dem Sinne, daß die beobachteten i-Werte langsamer ansteigen als der Formel (46) entspricht. Ähnliches gilt für alle anderen Beobachtungsreihen bei sehr guten Vakuumbedingungen[1]); im allgemeinen reicht die Übereinstimmung mit der theoretischen Formel sogar bis zu noch niedrigeren Stromwerten, als bei dem eben diskutierten Fall.

Wir haben bei der Berechnung der Werte i_3 die Formel (28) zugrunde gelegt, d. h. den Gasdruck vernachlässigt; das scheint in der Tat gerechtfertigt, weil ja die von Lilienfeld beobachtete Strom-Spannungskurve den Charakter einer Grenzfunktion hat,

1) Nur der Versuch 20 (L I, S. 712) macht insofern eine Ausnahme, als hier für die höchsten Stromwerte eine geringe Überlegenheit der Formel (46) vorhanden ist; doch deckt Formel (28) auch hier einen wesentlich größeren Bereich.

die in weiten Grenzen von den Gasdruckverhältnissen unabhängig ist. Unter diesen Umständen hängt die Konstante A, welche im wesentlichen die Neigung der Charakteristik in der i, $V^{1/2}$-Ebene bestimmt (man vgl. Formel (30), außer vom Sondenabstand d auch von der Entfernung der ersten Sonde von der Kathode x_1 ab. Je weiter das Sondenpaar von der Kathode entfernt ist, desto größer wird A bei konstantem d (Formel 21a), d. h. desto größer ist die Potentialdifferenz, die zu einem bestimmten Stromwert gehört.

Nun zeigen die Messungen von Lilienfeld, die mit dem gleichen Sondenstück, aber im übrigen verschiedenen Rohren durchgeführt sind, auch bei den besten Vakuumbedingungen noch immer merklich verschiedene Neigungen der Charakteristiken (L II, Tab. 1 und Fig. 1).[1]) Es scheint nicht angängig, diese Unterschiede auf die Verschiedenheit des Gasdrucks zurückzuführen, denn Veränderung des Gasdrucks in weiten Grenzen beeinflußt in jedem einzelnen Fall die Charakteristik um weniger, als die Unterschiede betragen; auch entspricht nicht immer dem besten Vakuum der höchste Wert von A. Der im folgenden berechnete Versuch 3 (S. 169) ergibt einen Wert von A, der um 7 Proz. höher ist als bei Versuch 20, und um etwa 25 Proz. höher als bei Versuch 10, obgleich bei diesen beiden letzten Versuchen das Vakuum fraglos besser war. Diese Abweichungen lassen sich nach dem oben Gesagten zwanglos erklären, wenn man annimmt, daß x_1 nicht in allen Fällen gleich war. Ferner ist noch zu bemerken, daß bei verschiedener Form des Röhrenanfangs die Aufladungen an der Verjüngungsstelle sich verschieden ausbilden und dadurch die Konstante c verschieden ausfallen kann, wie es in der Tat der Fall ist.

Aber nicht nur die Beobachtungen bei den besten Vakuumbedingungen, bei denen es wohl statthaft sein dürfte die Konstante b gleich Null zu setzen, werden durch unsere Formeln dargestellt, sondern auch der nachweisbare Einfluß von Gasresten. Natürlich darf man nach dem soeben Ausgeführten

1) In der Darstellung von Lilienfeld ist V^2 als Abszisse gewählt; in der i, $V^{1/2}$-Ebene werden die Kurven mit sehr guter Annäherung zu Geraden; man vgl. unsere Fig. 4, welche die Beobachtung vom 15. IX. 1911 wiedergibt.

nur solche Versuchsreihen miteinander vergleichen, die unter völlig gleichen geometrischen Verhältnissen ausgeführt sind. Solche liegen z. B. in den Reihen 1, 2 und 3 (L. I, S. 104) vor; bei 1 hing das Entladungsrohr frei und erhitzte sich, bei 2 war das Vakuum durch lange Adsorption und anhaltende Entladung verbessert, und bei 3 tauchte das Entladungsgefäß in flüssige Luft. Die drei Reihen sind nach Formel (31a) berechnet worden und die berechneten Kurven in Fig. 5 ausgesogen; die Beobachtungen sind eingezeichnet, bei 1 und 2 nur die je 12 ersten, weil sich der Druck während der Versuchsdauer änderte. Die benutzten Konstanten sind in der kleinen Tabelle 2 zusammengestellt.

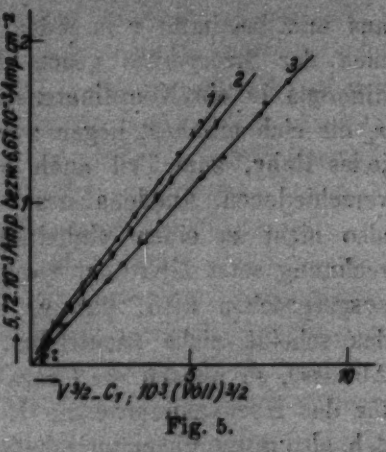


Fig. 5.

Tabelle 2.

	A	B	C_1
Kurve 1 . . .	$1{,}411 \cdot 10^5$	$1{,}54 \cdot 10^{-5}$	$8{,}0 \cdot 10^3$
Kurve 2 . . .	$1{,}411 \cdot 10^5$	$1{,}11 \cdot 10^{-5}$	$6{,}5 \cdot 10^3$
Kurve 3 . . .	$1{,}411 \cdot 10^5$	0	$5{,}0 \cdot 10^3$

Wie man sieht, ist für den Versuch 3 der Gasdruck 0 angenommen ($b = 0$); das kann in diesem Falle als zweifelhaft erscheinen, aber die Darstellung würde auch gelingen, wenn man für 3 einen von Null verschiedenen b-Wert annimmt, es würden sich dann nur etwas abweichende Konstanten ergeben. Ähnlich wie bei den Versuchsreihen 1, 2 und 3 liegen die Verhältnisse bei 17, 15, 10 und 21, 20, doch gelingt hier die Darstellung durch die theoretische Kurve weniger vollständig, offenbar weil sich bei 17, 15 und 21 der Gasdruck während der Messung änderte.

Wir kommen nun noch kurz auf die Charakteristiken zu sprechen, die von Lilienfeld in seiner neuesten Arbeit mitgeteilt werden (L III, S. 242 u. folg.) und die allerdings nicht

bei den allerbesten Vakuumbedingungen aufgenommen sind. Lilienfeld geht hier von der Darstellung

$$i = \lambda_2 V^{\nu} + \mu_2 \tag{49}$$

aus und bestimmt ν in jedem Falle, indem er die Logarithmen der Stromwerte gegen die Logarithmen der Potentialdifferenz in ein Koordinatensystem einträgt. Die Exponenten ν, die sich ergeben, liegen zwischen 1,3 und 2,0 und sind für jedes Rohr, zum Teil auch bei ein und demselben Rohr für verschiedenen Anodenabstand verschieden. Man gelangt so also nicht zu einem einheitlichen Gesetz. Die Art der Berechnung setzt allerdingt voraus, wie es auch von Lilienfeld ausgesprochen wird, daß μ_2 vernachlässigt werden darf, und das scheint nicht zuzutreffen. Wählt man nämlich $V^{3/2}$ als Abszisse, so werden die Charakteristiken ohne Ausnahme (auch für das Hochvakuumventil, L III, S. 250) durch eine Gerade, d. h. also durch die empirische Relation (48) oder die theoretische Formel (28) darstellbar. Je größer das μ_1 (bzw. c) ist, desto größer fällt der Exponent ν bei Lilienfeld aus.

Als Beispiel mögen nur die drei Versuchsreihen der Tab. 6 (L III, S. 263) und die erste Versuchsreihe der Tab. 4b (L III, S. 261) in der angegebenen Weise in Fig. 6 wiedergegeben werden; alle anderen Charakteristiken, ob zwischen Kathode und Anode gemessen, oder durch Subtraktion gewonnen, geben dasselbe Bild. Die Zahlen der Tab. 6 dürften nach Lilienfelds Angaben die zuverlässigsten sein.

In Fig. 6 entspricht Kurve 1 der Nahlage der Anode, Kurve 2 der Gesamtlänge des Rohres und Kurve 3 der durch Subtraktion beider Reihen gewonnenen Charakteristik; Kurve 4 gibt die mit einem anderen Rohre angestellte Versuchsreihe aus Tab. 4b wieder, bei welcher über die Gesamtlänge des Rohres gemessen wurde. Die ausgezogenen Kurven sind nach den Näherungsformeln (29) und (30) berechnet, die für den vorliegenden Fall ausreichen. Die Anwendung dieser Formeln setzt voraus, daß die Entfernung x_1 der Anode in ihrer Nahlage bekannt sei. Das ist nun einerseits nicht der Fall, andererseits würde die Kenntnis des geometrischen Abstandes nichts nützen, weil nicht er in Frage kommt (man vgl. S. 164). Man kann aber x_1 als eine der zu bestim-

menden empirischen Konstanten ansehen, die leicht zu ermitteln ist, da ja nach (29) die Koeffizienten von $i^{3/2}$ in Fall 1 und 2 sich verhalten wie x^2_1 zu $(x_1 + d)^2$, wo $d = 60$ cm zu

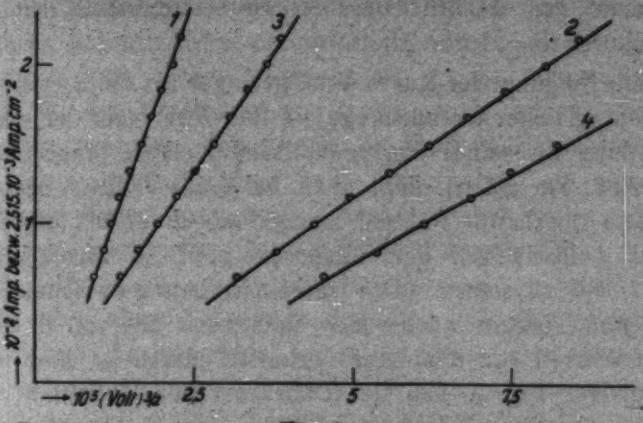


Fig. 6.

setzen ist. Auf diese Weise wurde die Berechnung vorgenommen, und zwar für die Kurven 1—3 einheitlich mit folgenden Werten der Konstanten

$$x_1 = 60{,}6, \qquad a = 1{,}823 \cdot 10^4, \qquad c = 13{,}3.$$

Für die Umrechnung der Lilienfeldschen Stromwerte auf die Stromdichten wurde als Durchmesser des Rohres der Wert 2,25 cm zugrunde gelegt. Kurve 4 ist mit den Konstanten

$$a x^3 = 3{,}43 \cdot 10^8 \quad \text{und} \quad c x = 2{,}28 \cdot 10^3$$

berechnet, wobei der Wert von x noch offen gelassen ist, aber vermutlich mit mindestens 110 cm anzusetzen ist.

Sämtliche Beobachtungen sind eingetragen mit Ausnahme des jeweils niedrigsten Stromwertes der offenbar einem anderen Kurvenzweig angehört. Die Übereinstimmung von Beobachtung und Rechnung ist sehr befriedigend. Von besonderem Interesse ist der Vergleich von Kurve 2 mit 4. Die beiden Entladungsröhren unterschieden sich durch die Form der Verjüngungsstelle (L III, S. 247), die bei dem älteren Exemplar der Ausbildung von Wandladungen günstiger war und darum einen sehr viel stärkeren Potentialanstieg im Anfangsteil des Rohres bewirkte. Das sind aber die Voraussetzungen für einen großen Wert von c, wenn unsere Deutung

richtig ist, und in der Tat ist c bei Kurve 4 viel größer als bei 1, wie sich schon in der Verschiebung der ganzen Kurve nach rechts zu erkennen gibt. Dieser hohe Wert von c täuscht auch bei der Lilienfeldschen Berechnungsart den hohen Exponenten $\nu = 2$ vor.[1])

Die Neigung der Kurve 4 ist geringer als bei 2, weil — bei ziemlich gleicher Gesamtlänge — das Rohr mit der stärkeren Aufladung an seiner Verjüngungsstelle einem längeren Rohre äquivalent ist, sofern nicht auch bei 4 das Vakuum besser war. Es kann überhaupt fraglich erscheinen, ob es bei diesen Versuchen zulässig ist, den Gasdruck ganz zu vernachlässigen, d. h. $b = 0$ zu setzen. Die Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie würde sich auch noch mit von 0 verschiedenen Werten von b aufrecht erhalten lassen — man sieht ja aus unserer Fig. 1, daß der Charakter der Kurven in einiger Entfernung vom O-Punkt gewahrt bleibt — es würden sich nur andere Werte für die Konstanten ergeben.

Wenn nun auch nach den Ausführungen dieses Paragraphen die vorgetragene Theorie in Übereinstimmung mit dem gesamten vorliegenden Beobachtungsmaterial ist, so bleibt doch in einem wesentlichen Punkte ein Widerspruch bestehen: die auf Grund der Beobachtungen ermittelten Werte der Konstanten a ergeben nicht den von der Theorie geforderten Wert. Nach Gleichung (9) hängt a lediglich von der spezifischen Ladung der Elektronen ab; legen wir das technische Maßsystem zugrunde und benutzen den von Langmuir angegebenen Wert für a_3 (vgl. S. 152), so müßte nach (20a) $a = 7{,}64 \cdot 10^5$ sein. Aus den Beobachtungen wurden für A die Werte $1{,}320 \cdot 10^5$ und $1{,}411 \cdot 10^5$ gewonnen (vgl. Tab. 1 und 2). Nun kann A nach seiner Definition [Gl. (21)] nur größer sein als a; nimmt man an, daß x_1 zwischen 20 und 50 cm liegt, so gelangt man auf Grund der angegebenen Werte von A zu Zahlenwerten von a, die zwischen $2{,}2 \cdot 10^4$ und $3{,}4 \cdot 10^4$ liegen, die also viel zu niedrig sind. Noch niedriger liegt der aus den letzten Versuchen von Lilienfeld unmittelbar berechnete

1) Umgekehrt sind die Werte von c bei dem Hochvakuumventil, wo nur ein geringerer Einfluß der Glaswände zu erwarten ist, klein und demzufolge die Exponenten ν niedrig.

Wert von a (vgl. S. 171), aber auf diesen letzten Wert ist wegen der schlechteren Vakuumbedingungen weniger Gewicht zu legen.

Wir kommen also zu dem Ergebnis, daß bei den Lilienfeldschen Messungen ein bestimmter Strom von einer viel niedrigeren Potentialdifferenz unterhalten wird, als die Theorie voraussehen läßt. Diese Tatsache ist um so überraschender, als sich bei den Messungen von Dushman[1]) mit cylindrischer Anordnung der von der Theorie geforderte Zahlenwert mit großer Genauigkeit ergeben hat. Nun haben wir allerdings bei unserer Berechnung von a den Gasdruck völlig vernachlässigt, d. h. $b = 0$ gesetzt. Je größere Werte von b wir zugelassen hätten, zu um so höheren Werten von a wären wir gelangt; aber dieser Ausweg erscheint mit dem experimentellen Befund unvereinbar. Denn Änderung des Gasdruckes in den weitesten Grenzen bewirkt bei weitem noch nicht eine solche Änderung in der Neigung der Charakteristik, wie sie hier verlangt wird. Viel wahrscheinlicher erscheint dem Verfasser, daß eine andere Voraussetzung der Rechnung bei den Lilienfeldschen Messungen nicht erfüllt ist, nämlich die Unabhängigkeit der Charakteristik vom Röhrendurchmesser. Denn gerade die Versuche, aus denen Lilienfeld geschlossen hat, daß die Charakteristik nur von der Stromdichte abhängt (L I, S. 720 ff.), sind nicht bei den besten Vakuumbedingungen ausgeführt und sind auch nicht unbedingt beweisend. Es wäre dringend zu wünschen, daß ähnlich sorgfältige Messungen, wie sie Lilienfeld für einen Röhrenquerschnitt durchgeführt hat, auch für andere Querschnitte gemacht würden. Solche Messungen dürften sich allerdings nicht auf die Aufnahme der Charakteristik zwischen zwei Sonden beschränken, sondern es müßte mindestens noch für jeden Stromwert die Spannung zwischen Kathode und erster Sonde gemessen werden, damit in der oben angegebenen Weise der in Betracht kommende Wert von x_1 bestimmen werden kann. Die Aufnahme der Charakteristik zwischen Kathode und erster Sonde läuft ja im Grunde darauf hinaus, daß die Anfangsbedingungen für die Messung zwischen den beiden Sonden den Bedingungen des Versuchs entsprechend bestimmt

1) S. Dushman, Phys. Rev. (2) 4. S. 121. 1914; Phys. Ztschr. 15. S. 681. 1914.

werden. — Von dem Ausfall solcher Messungen müßte — wie bei der Frage des Potentialverlaufes — die Entscheidung zu erwarten sein, ob man mit den in dieser Arbeit gemachten Annahmen auskommt, oder etwas wesentlich Neues anzunehmen hat.

Nachwort.

Der Verfasser hat die vorliegenden Rechnungen Hrn. Lilienfeld mitgeteilt, der dazu in der folgenden Bemerkung Stellung genommen hat. Dem Verfasser scheinen die darin mitgeteilten Gedanken Hrn. Lilienfelds in jeder Beziehung beachtenswert zu sein. Insbesondere ist die Beobachtung, daß die Anodentemperatur von der Anodenentfernung unabhängig ist, schwer mit unserer Grundannahme (4) zu vereinigen. Aber die Theorie läßt sich auch in der Richtung weiter entwickeln, daß man die Annahme (4) fallen läßt und durch eine andere ersetzt — das ist sogar für höhere Gasdrucke geboten —, ohne daß man von den sonstigen Grundlagen der Rechnung etwas aufzugeben braucht.

Trotz dieser Bedenken hat der Verfasser geglaubt, daß auch die Untersuchungen des § 3 nicht ohne Interesse sind, weil es ihm gerade darauf ankam, zu zeigen, inwieweit man das vorliegende Beobachtungsmaterial ohne wesentlich neue Annahme erklären kann.

Zusammenfassung.

Die Child-Langmuirsche Raumladungstheorie wurde nach zwei Richtungen vervollständigt:

§ 1. Bei ebener Anordnung wurde der Einfluß
a) positiver Ionen,
b) eines positiven Anfangsgradienten untersucht.

§ 2. Bei zylindrischer Anordnung wurde der Einfluß positiver Ionen untersucht.

§ 3. Der Vergleich mit der Erfahrung ergab, daß sich sämtliche vorliegenden Stromspannungscharakteristiken durch die gewonnenen Formeln wiedergeben lassen; die wesentliche Konstante hat jedoch einen viel kleineren Wert, als die Theorie verlangt.

Leipzig, im März 1920.

(Eingegangen 4. April 1920.)

4. *Bemerkung zu Herrn G. Jaffés vorstehender Arbeit: „Zur Theorie der Hochvakuumentladung"; von J. E. Lilienfeld.*

Gegen meine Hochvakuumuntersuchungen liegen zurzeit zweierlei Einwände vor. Der eine stammt von Hrn. Langmuir und geht dahin, daß die von mir beobachtete Charakteristik mitsamt den beschriebenen Entladungserscheinungen nur unter der Annahme verständlich sei, daß ich in einem sehr ungenügenden Vakuum gearbeitet hätte. Hätte ich hinreichend gutes Vakuum gehabt, so wäre es überhaupt unmöglich gewesen, mit den technisch erreichbaren Spannungen eine Entladung in der von mir benutzten Röhrenform zu erzeugen. Der zweite Einwand stammt von Hrn. Schottky, welcher es bedenklich findet, daß ich in meinem Entladungsgebilde die Methode der Sondenmessung anwandte. Dieser letztere Einwand ist von mir kürzlich widerlegt worden, indem ich zeigte, daß mit anderen Meßmethoden im wesentlichen die gleichen Ergebnisse gefunden werden.

Hr. Jaffé beanstandet hingegen weder die Methode der Sondenmessung, noch die Güte meines Vakuums. Ihm zufolge steht der Verlauf der von mir experimentell im besten Vakuum beobachteten Charakteristiken im Einklang mit den Forderungen der Theorie, insbesondere mit der Funktion, welche sich ergibt, wenn in den von Hrn. Jaffé errechneten Formeln die *Gasdichte gleich Null* gesetzt wird. Auch mein anderes Beobachtungsresultat und die von mir dafür gegebene — auf Betrachtung der Raumladung und der Stoßionisation der Gasreste fußende — Erklärung, daß die für die Aufrechterhaltung einer bestimmten Stromdichte erforderliche Spannung mit abnehmendem Gasdrucke erst abnimmt, dann wächst und sich schließlich einem Grenzwerte nähert, wird durch Hrn. Jaffés Rechnung bestätigt. Es besteht nur teilweise eine Unstimmigkeit zwischen mir und Hrn. Jaffé hinsichtlich der Art und Weise, wie die im höchsten Vakuum beobachteten Kurven von beiden Seiten *gedeutet* werden.

Der Zweck meiner vorliegenden Notiz ist, zur Kennzeichnung des beiderseitigen Standpunktes auf folgendes aufmerksam zu machen. Hrn. Jaffés Betrachtungen liefern sehr wohl eine Funktion, welche dem Verlauf meiner Kurven angepaßt werden kann — zum Teil sogar in einem größeren Bereiche als die von mir gegebene empirische Formel. Nichtsdestoweniger kann es keinem Zweifel unterliegen, daß eine der Grundgleichungen (1) bis (5), aus welchen Hr. Jaffé seine Funktion errechnet, sich unter den Bedingungen meines Experiments auch nicht in erster Annäherung bestätigt findet. Es ist dies die Gleichung (4), welche besagt, daß die kinetische Energie der Elektronen in einem Querschnitt durch die Potentialdifferenz dieses Querschnittes gegenüber der Glühkathode bestimmt ist. Wäre das in Wirklichkeit auch nur ungefähr der Fall, so müßte die Anode einen bei weitem überwiegenden Teil der Energie in Gestalt von Elektronenstoß empfangen. Die an der Anode freiwerdende Wärme müßte ferner mit der durch das Produkt von Strom und Spannung gegebenen Gesamtenergie der Entladung zunehmen. Daß dieses *nicht* zutrifft, lehrt einerseits der bloße Anblick der Entladung; bei weitem der größte Teil der Energie wird an die zylindrische Glaswand abgegeben, vergleichsweise wenig an die Anode. Andererseits zeigt eine Temperaturmessung, daß die Erhitzung der Anode — eine *konstante* Stromstärke vorausgesetzt — unabhängig vom Spannungsabfall — also unabhängig von der gesamten umgesetzten Energie — ist.[1])

1) Die Änderung der Spannung wird dabei dadurch bewirkt, daß man in einem Rohre gegebener lichter Weite mehrere gleiche Anoden in verschiedenen Entfernungen von der Glühkathode anordnet; es entspricht dann einer weiter entfernten Anode naturgemäß stets ein bedeutend größerer Spannungsabfall als einer nahe gelegenen.

Das Ergebnis der Temperaturmessung an der Anode ist gleichzeitig — außer den Sondenmessungen sowie den Spannungsmessungen an einer verschiebbaren Anode — ein weiterer Beweis für das Bestehen einer zum mindesten sehr angenähert *linearen Verteilung des Gefälles längs der Achse*, welche mit Hrn. Jaffés Betrachtungen für $b = 0$ ebenfalls nicht verträglich ist. Doch glaubt Hr. Jaffé Entscheidendes in dieser Hinsicht erst aus mit größerer Genauigkeit auszuführenden Messungen folgern zu können. Ich persönlich kann dem zwar nicht unumwunden beipflichten, will aber fürs erste diese Dinge dahingestellt sein lassen.

Widerspricht demnach der Ansatz (4) bereits als solcher hervorragend charakteristischen Merkmalen der Erscheinung, so ist offenbar auch nicht zu verlangen, daß weitere Folgerungen aus den Grundgleichungen mit diesen Merkmalen in Einklang stehen. Das ist denn auch tatsächlich nicht der Fall: Hrn. Jaffés Betrachtung liefert zwar die Kurven*form* meiner Charakteristiken, nicht aber ein den übrigen hervorstechenden Merkmalen der Erscheinung gerecht werdendes Bild, auch nicht annähernd den zahlenmäßigen Wert der zur jeweiligen Stromdichte gehörenden Spannung.

Der nächstliegende Gedanke wäre der, daß es selbst für das beste von mir gehabte Vakuum nicht gerechtfertigt ist, die Gasdichte gleich Null zu setzen, daß also die Abweichungen von der Theorie durch eine Ionisation der Gasreste bedingt sind. Eine solche Annahme würde zwar die Theorie mit mancher Beobachtung in Übereinstimmung zu bringen gestatten, würde andererseits aber als unabwendbare Konsequenz fordern, daß bei *abnehmender Gasdichte:*

a) die Erwärmung der Glaswände abnehme,
b) die Erwärmung der Anode zunehme, solange bis
c) schließlich die gesamte Entladungsenergie an der Anode frei würde.

Diesen Folgerungen widerspricht aber die von mir 1910 erstmalig mitgeteilte Tatsache, daß alle Erscheinungen von der Gasdichte unabhängig werden, wenn nur diese letztere unterhalb eines gewissen Grenzwertes bleibt.

Zur Vermeidung eines Widerspruches mit dieser letzteren Tatsache habe ich die Annahme vorgeschlagen, daß im Entladungsgebilde positive, unabhängig von einer Stoßionisation der Gasreste durch einen besonderen Dissoziationsvorgang entstandene Elektrizität sich befindet.[1]) Auch aus Hrn. Jaffés Rechnungen geht hervor, daß die beobachteten Erscheinungen unter der Annahme positiver Ladungen begrifflich abgeleitet werden können, ohne daß man zunächst gezwungen wäre, es festzulegen, ob die positiven Ladungen durch Stoßionisation

1) Ob bis zur annähernden Aufhebung der Raumladung, wie ich es neuerdings meine (L. 1914, S. 42) — oder in einem geringeren Maße, wie in meinen ältesten Arbeiten angenommen wird, darf für den Zweck vorliegender Auseinandersetzung dahingestellt bleiben.

oder sonstwie erzeugt zu denken sind. Denn es ist — und dieser Umstand verdient ganz besondere Aufmerksamkeit — weder in den Ansätzen (1) bis (5) noch im weiteren Verlaufe der Rechnungen irgendeine Annahme eingeführt, welche bindend auf Stoßionisation hinweisen würde. Die Beziehungen (1) bis (5) sind vielmehr so allgemeiner Art, daß recht verschiedene Vorstellungen von der physikalischen Beschaffenheit der positiven Elektrizität sich mit ihnen vereinbaren lassen. Wenn man beispielsweise an Stelle der Raumdichte positiver Elektrizität p in Hrn. Jaffés Gleichungen $p + p_0$ schreiben und — sehr hohes Vakuum vorausgesetzt — bestimmen würde, daß p mit abnehmender Gasdichte verschwindet, während p_0 sich mit der Gasdichte nicht mehr ändert — (wohl aber mit der Elektronendichte etwa nach Art von Gleichung (5)) — so würde man vermutlich ein theoretisches Bild erhalten, welches manche Beobachtungen widerzuspiegeln gestatten würde. Dabei könnte gegebenenfalls für p_0 ein anderes Rekombinationsgesetz angenommen werden als für p. Freilich ließe sich mit bedeutenden Werten von p_0 die Beziehung (4) schwerlich vereinbaren, so daß neben der Einführung von p_0 noch eine andere Modifikation des Gleichungssystemes (1) bis (5) vorgenommen werden müßte.

Was schließlich möglicherweise in entscheidender Weise bei der Erklärung meiner Beobachtungen zukünftig mit zu berücksichtigen sein wird, das ist — wie ich es wiederholt in der letzten Zeit hervorhob — das eigenartige Verhalten der Isolatoren im Hochvakuum dem Elektronenstoß gegenüber. Und zwar die von mir dargetane Tatsache, daß die Isolatoren sich auch nicht annähernd auf das volle der Elektronengeschwindigkeit entsprechende Potential aufladen.

Leipzig, Physikal. Inst. d. Univ., 29. März 1920.

(Eingegangen 4. April 1920.)

5. *Eine neue Bestimmung der absoluten elektrischen Widerstandseinheit;*

von E. Grüneisen und E. Giebe.[1])

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

1. Die Vereinbarungen über die internationale Quecksilbereinheit sind aus dem Bedürfnis nach einer praktischen Widerstandseinheit hervorgegangen, welche der im absoluten elektromagnetischen Maßsystem definierten, als absolutes Ohm zu bezeichnenden Einheit von 10^9 cm/sec möglichst nahekommen, aber genauer reproduzierbar sein sollte. Dieser Wunsch war sehr berechtigt. Denn die bis zum Jahre 1908 vorliegenden Versuche, die absolute Widerstandseinheit zu verwirklichen, zeigen, daß dies nur auf einige Zehntausendstel gelang, d. h. etwa mit dem zehnten Teil der Genauigkeit, welche bei der Herstellung des internationalen Ohm erreicht wurde. Dies geht aus einem kritischen Bericht Dorns[2]) über die bis zum Jahre 1894 vorliegenden Messungen des absoluten Ohmwertes hervor, sowie aus einer auch die späteren Messungen berücksichtigenden Zusammenstellung von F. E. Smith.[3])

Nun liegen die meisten Untersuchungen über das absolute Ohm zeitlich mehrere Jahrzehnte zurück. Seitdem ist aber die Meßtechnik, insbesondere die elektrische, derart vervollkommnet worden, daß das auf jenen älteren Arbeiten beruhende Urteil über die mäßige Reproduzierbarkeit des absoluten Ohm vom heutigen Standpunkt aus nicht mehr als maßgebend angesehen werden kann. Dies war der Grund, warum auf An-

1) Nach einem am 5. März 1920 in der D. Phys. Ges. gehaltenen Vortrage. Eine ausführlichere Mitteilung soll in den Wissensch. Abh. der Phys.-Techn. Reichsanstalt erscheinen.

2) E. Dorn, Wiss. Abh. der Phys.-Techn. Reichsanstalt, Bd. 2. S. 257. 1895.

3) F. E. Smith, Phil. Trans. Roy. Soc. London (A) 214. S. 27—108. 1914.

regung von Lord Rayleigh gelegentlich der internationalen Konferenz für elektrische Einheiten und Normale zu London (1908) sowohl das National Physical Laboratory wie auch die Reichsanstalt neue absolute Widerstandsmessungen in Angriff nahmen. Das Ziel war, festzustellen, ob nicht mit den heutigen Hilfsmitteln die absolute Widerstandseinheit sich mit ähnlicher Genauigkeit verwirklichen lasse wie die internationale Quecksilbereinheit. Bejahendenfalls würde sich vielleicht die umständliche und zeitraubende gesetzlich vorgeschriebene Wiederholung des Anschlusses der Drahtwiderstandsnormale an die Hg-Einheit durch eine bequemere Absolutmessung der Drahtwiderstände ersetzen lassen. Eine Veränderung des Betrages der gesetzlich festgelegten praktischen Widerstandseinheit würde damit nicht einzutreten brauchen.

Auch von anderen Gesichtspunkten aus ist eine absolute Widerstandsmessung von Bedeutung. Zur Bestimmung des mechänischen Wärmeäquivalents bedient man sich vielleicht am besten der Methode der elektrischen Energiemessung. Will man das Resultat in absoluten Einheiten $\left(\frac{\text{erg}}{\text{g-cal}}\right)$ haben, so muß man die benutzten internationalen elektrischen Einheiten in absolute umrechnen, z. B. den Widerstand in $\left(\frac{\text{cm}}{\text{sec}}\right)$. Dies kommt bei der heute erreichbaren Genauigkeit der kalorimetrischen Messungen bereits in Betracht.

Ferner besteht bekanntlich eine der besten Methoden zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit darin, irgendeine elektrische Größe sowohl im elektromagnetischen, wie im elektrostatischen Maßsystem zu messen.[1]) Dabei muß man die im internationalen elektromagnetischen Maßsystem gemessene Größe in die absolute umrechnen. Benutzt man als solche Größe eine Spannung, einen Widerstand oder eine Kapazität, so geht in die Umrechnung das Verhältnis der internationalen zur absoluten Widerstandseinheit ein. Auch hier kommen Fehler dieses Verhältnisses von einigen Zehntausendsteln bereits in Betracht.[2])

Die für die Neubestimmung der absoluten Widerstands-

1) F. Kohlrausch, Lehrbuch d. prakt Physik; Abschn. 116a.
2) Vgl. E. B. Rosa u. N. E. Dorsey, Bull. Bur. of Stand. 3. S. 433. 1907.

einheit von den beiden Staatslaboratorien gewählten Methoden sind grundverschieden. Während im National Physical Laboratory mit großem Kostenaufwand ein Apparat gebaut wurde[1], der auf dem Lorenzschen Prinzip der im Magnetfeld rotierenden Scheibe beruht und es gestattet, eine Normalwiderstandsbüchse niedrigen Betrages (0,001 bis 0,1 Ω) unmittelbar in absoluten Einheiten zu messen, wurde in der Reichsanstalt eine andere Methode gewählt, welche die bei Präzisionsmessungen mit Induktivitäten und Kapazitäten von Giebe[2] bereits gemachten Erfahrungen ausnutzte. Da das Produkt aus Induktivität und Frequenz von der Dimension eines Widerstandes ist, kann man statt des Verhältnisses der internationalen zur absoluten Widerstandseinheit auch das Verhältnis einer absoluten in 10^9 cm ausgerechneten Induktivität zu der in int. Henry (= int. Ohm × sec) gemessenen bestimmen. Dieser Weg ist bereits früher mehrfach beschritten, wobei als Induktivität eine Wechselinduktion diente.[3] Im Gegensatz hierzu wählten wir Selbstinduktionen, da Giebes Erfahrungen sich hauptsächlich auf solche beschränkten, und weil Selbstinduktionen zweifellos einfacher nach ihren Längendimensionen auszuwerten sind als Wechselinduktionen.

Unsere Aufgabe bestand nach dem Gesagten also darin, eine oder mehrere Selbstinduktionen — Ohmspulen — herzustellen und diese einerseits aus ihren Dimensionen zu berechnen, andererseits elektrisch auszuwerten. Die experimentellen Arbeiten begannen im Herbst 1909 und wurden noch kurz vor Ausbruch des Krieges abgeschlossen. Die endgültige Durcharbeitung konnte erst jetzt erfolgen, während die parallel gehende Untersuchung von F. E. Smith im National Physical Laboratory bereits im Jahre 1914 zur Veröffentlichung kam. Es würde zu weit führen, alle Einzelheiten der Untersuchung hier vorzubringen, zumal teilweise bekannte Methoden zur Anwendung kamen. Wir möchten uns darauf beschränken, hier den Gang der Untersuchung kurz zu skizzieren, wobei

1) F. E. Smith, s. a. O.

2) E. Giebe, Zeitschr. f. Instr. Kunde. 29. S. 269. 1909; 31. S. 6. 1911.

3) Vgl. besonders F. Himstedt, Wied. Ann. 54. S. 305. 1895; A. Campbell, Proc. Roy. Soc. London A 87. S. 391. 1912.

bisher unbekannte Methoden oder Gesichtspunkte hervorgehoben werden sollen.

2. Wir gehen zunächst auf die Ohmspulen selbst ein. Fig. 1 zeigt die drei von uns hergestellten Spulen *A*, *B*, *C*. Die Marmorkerne von 35,5 cm Durchmesser und 18 bzw. 38 cm Länge sind mit Nuten von 1 mm Ganghöhe bei *A*, $^3/_4$ mm Ganghöhe bei *B* und *C* versehen, in denen blanker Kupferdraht von 0,5 mm Durchmesser unter einem konstanten Zug von 1,3 kg Gewicht verlegt ist. Die Enden des Drahtes sind an kleinen Konstantanklemmen befestigt. Die Marmorkerne sind von Feuchtigkeit befreit[1]) und hinsichtlich Leitfähigkeit und Magnetisierbarkeit einwandfrei. Spule *A* hat 162 Windungen und eine S.-I. von etwa 0,01 Henry; die Spulen

Fig. 1.

B und *C* haben je 447 Windungen und eine S.-I. von etwa 0,05 Henry. Durch Anbringung von Zuleitungen auf $^1/_3$ bzw. $^2/_3$ der Spulenlänge von *B* und *C* entstanden die Unterabteilungen B_I, B_{II}, B_{III}, C_I, C_{II}, C_{III} von je etwa 0,01 Henry, von denen auch je zwei benachbarte zu einer Spule von etwa 0,029 Henry zusammengefaßt werden konnten (B_{I+II}, B_{II+III}, C_{I+II}, C_{II+III}). Im ganzen standen uns demnach 13 verschiedene Selbstinduktionen zur Verfügung von viererlei Spulenform, wenn auch von nahe gleichem Durchmesser.

3. Für die Berechnung der Selbstinduktionen einlagiger

1) Sie wurden von der Firma Siemens-Schuckert nach dem dort üblichen Verfahren imprägniert.

Spulen müssen folgende Bestimmungsstücke bekannt sein: der Windungsradius R, d. h. der Abstand der Mittelfaser des Drahtes von der Spulenachse, die Ganghöhe g, der Drahtdurchmesser d und die Windungszahl N.

Das sieht man z. B. aus der von uns benutzten Lorenzschen Formel mit einer von Rosa angegebenen Korrektion[1])

$$L = \frac{8\pi}{3} R N^2 Q\left(\frac{R}{Ng}\right) - 4\pi R N\left[A\left(\frac{d}{g}\right) + B(N)\right].$$

Q ist lediglich Funktion von R/Ng, A Funktion von d/g, B Funktion von N. Q enthält vollständige elliptische Integrale I. und II. Art, für welche Legendre Tafeln berechnet hat. Es sei gleich hier bemerkt, daß an der Gültigkeit dieser Formel bis auf ein Milliontel für die von uns benutzten Spulenformen nicht zu zweifeln ist.[2])

Wichtig ist die Frage nach dem Einfluß der Beobachtungsfehler von R, g, d. Die Fehlergleichung für L lautet

$$\frac{\Delta L}{L} = \varrho\frac{\Delta R}{R} + \gamma\frac{\Delta g}{g} + \vartheta\frac{\Delta d}{d}.$$

Die Koeffizienten ϱ, γ, ϑ hängen etwas von der Spulenform ab. Sie betragen z. B. für

		ϱ	γ	ϑ
Spule	B	+ 1,672	− 0,670	− 0,002
	$\frac{1}{3}B$	+ 1,456	− 0,4526	− 0,0032

Soll der Einzelfehler in L auf 1/100 000 beschränkt werden, so muß R auf etwa 0,6/100 000, g auf 1,5/100 000, d auf etwa 3/1000 genau bestimmt sein.

4. Der Drahtquerschnitt wurde teils aus Gewicht, Länge und Dichte, teils aus dem elektrischen Widerstand, Länge und spez. Leitfähigkeit bestimmt. Die letztgenannte Methode war für die Unterabteilungen von B und C die einzig mögliche, da man ja den Draht nicht für die Wägung zerschneiden konnte. Wo eine Prüfung möglich war, stimmten beide Me-

1) L. Lorenz, Wied. Ann. 7. S. 161. 1879; E. B. Rosa und L. Cohen, Bull. Bur. of Stand. 5. S. 41. 1908.

2) Legendre, Traité des Fonctions Elliptiques Bd. 2. Tab. I, VIII; E. B. Rosa u. L. Cohen, a. a. O.; E. B. Rosa u. F. W. Grover, Bull. Bur. of Stand. 8. S. 1. 1911; Tabellen und Beispiele.

thoden gut überein. Auch die Konstanz des Querschnittes längs des Drahtes war gut.

5. Für die Ganghöhenmessung wurde die zu messende Spule unmittelbar hinter den Tisch einer Teilmaschine gebracht, auf dem der Vergleichsmaßstab lag. Spulenachse und Maßstab waren parallel zum Führungszylinder orientiert, der auf diesem bewegliche Schlitten trug einen Aufbau, an dem erstens ein Mikroskop mit Okularschraubenmikrometer zur Ablesung des Maßstabes befestigt war und zweitens die zur Einstellung der einzelnen Drahtwindungen bestimmte Vorrichtung. Als solche diente bei den endgültigen Messungen ein zweites Mikroskop mit Okularschraubenmikrometer und ein Tasträdchen mit Nut, das, ähnlich wie bei Kohlrauschs bekannter Walzenbrücke, mit sehr geringer Reibung längs seiner Achse verschiebbar an die gewünschte Drahtwindung federnd angelegt wurde. An der Nabe des Rädchens befand sich eine Ringmarke, auf welche das Mikroskop eingestellt wurde. Wenn sich der Schlitten der Teilmaschine gegen die Spule ein wenig verschob, so blieb das Rädchen, durch die Nut festgehalten, am Ort der Drahtwindung, die Marke verschob sich im Mikroskop. Das Verfahren bei der Messung war nun so, daß der Schlitten der Teilmaschine um ganze Maßstabintervalle verschoben und alsdann nach Anlegung des Rädchens an die gewünschte Drahtwindung das zweite Mikroskop auf die Ringmarke des Rädchens eingestellt wurde. Was die Anzahl der einzustellenden Drahtwindungen betrifft, so haben wir nicht jede einzelne Windung eingestellt, sondern haben die Messungen an Spule *B* und *C* in Stufen zu je acht Gängen durchgeführt, nachdem wir uns überzeugt hatten, daß eine Unterteilung in Stufen zu vier Gängen die Genauigkeit nicht in einem für uns wesentlichen Maße erhöhte. Bei Spule *A* wurden wegen der geringen Windungszahl Stufen von vier Gängen gewählt. Ein Ausgleich gegen die Vernachlässigung der zwischenliegenden Windungen wurde dadurch geschaffen, daß nicht in einer, sondern in acht über den Umfang gleichmäßig verteilten Mantellinien Messungsreihen gemacht und in verschiedenen Mantellinien auch verschiedene Windungen gemessen wurden, so daß bei dem Mittel der Messungen in acht Mantellinien tatsächlich alle Windungen in gleicher Weise

berücksichtigt sind. Das Ergebnis der Ganghöhenmessung ist in Tab. 1 enthalten. Die Berechnung der wirksamen Ganghöhe g für eine Mantellinie erfolgte unter Berücksichtigung der Ungleichmäßigkeiten längs der Spule, worauf einzugehen hier zu weit führen würde. Die in den meisten Fällen gute Übereinstimmung der Mittelwerte aus Mantellinie 1, 3, 5, 7 (Spalte 2) mit denen aus Mantellinie 2, 4, 6, 8 (Spalte 3) beweist, daß sowohl die Gleichmäßigkeit der Ganghöhe als auch die Zahl der Messungen ausreichend gewesen ist; nur Spule C steht

Tabelle 1.

Bezeichnung der Spule	$\frac{1}{4}(g_1+g_3+g_5+g_7)$ mm	$\frac{1}{4}(g_2+g_4+g_6+g_8)$ mm	g Schlußwert mm
A	0,998 59$_5$	0,998 59$_5$	0,998 59$_5$
B	0,749 40$_3$	0,749 40$_1$	0,749 40$_2$
B_{I+II}	38$_2$	37$_9$	38$_0$
B_{II+III}	44$_8$	44$_6$	44$_7$
B_I	15$_9$	16$_1$	16$_0$
B_{II}	50$_3$	51$_0$	50$_6$
B_{III}	41$_0$	39$_5$	40$_0$
C	0,749 41$_9$	0,749 42$_1$	0,749 42$_0$
C_{I+II}	41$_5$	46$_1$	43$_8$
C_{II+III}	43$_2$	41$_8$	42$_5$
C_I	41$_7$	40$_7$	41$_2$
C_{II}	44$_8$	54$_9$	49$_9$
C_{III}	43$_8$	40$_3$	42$_0$

hinsichtlich der Gleichmäßigkeit der Ganghöhe hinter Spule B zurück, was mit der weniger gut gelungenen Herstellung der Nut im Marmorkern zusammenhängen mag.

6. Der Windungsdurchmesser, auf dessen genaue Bestimmung nach der Fehlergleichung besonders viel ankommt, sollte nach zwei voneinander unabhängigen Methoden bestimmt werden; einmal durch Messung einzelner Durchmesser mit Hilfe eines Komparators, zweitens durch Messung der gesamten aufgewundenen Drahtlänge. Da ein geeigneter Komparator weder in der Phys.-Techn. Reichsanstalt noch in der Reichsanstalt für Maß und Gewicht vorhanden war, hat Hr. Göpel einen Apparat in der Werkstatt der Reichsanstalt bauen lassen, über dessen Einzelheiten er selbst vor längerer Zeit berichtet hat.[1]) Die

1) F. Göpel, Zeitschr. f. Instrumentenkunde **34**. S. 180. 1914.

Messungen ließen sich mit diesem Apparat auf wenige μ genau bequem ausführen und lieferten uns aus den zahlreichen an jeder achten Windung in 4 um 45° gegeneinander geneigten Axialebenen gemachten Einstellungen einen Spulendurchmesser, der sich von dem gesuchten Windungsdurchmesser um die Drahtdicke unterscheidet. Bei der Berechnung des für die S.-I. wirksamen Windungsdurchmessers wurde wieder, wie bei der Ganghöhenberechnung, den Ungleichmäßigkeiten in der Weise Rechnung getragen, wie es die Theorie der Lorenz-Rosaschen Formel verlangt.

Die Drahtlängenmessung erfolgte bereits bei der Bewicklung der Spulen. Den mittleren Durchmesser einer Drahtspule aus der Länge des aufgewundenen Drahtes und der Windungszahl zu bestimmen, ist eine häufig angewandte Methode[1]), welche jedoch in der üblichen Form — nämlich bei Unterteilung der gesamten Drahtlänge in mehrere mit einem Maßstab zu vergleichende Abschnitte — nicht leicht die von uns angestrebte Meßgenauigkeit von 1/100 000 hätte erreichen lassen. Wir änderten deshalb die Methode dahin ab, daß wir als Vergleichsmaß statt des Maßstabes eine, bzw. nacheinander mehrere leicht drehbar gelagerte Meßscheiben benutzten, über deren Umfang hin der Draht mit konstanter Spannung auf die Spule auflief. Fig. 2 läßt das wesentliche der Versuchsanordnung erkennen: rechts die Marmorwalze X, auf einer Drehbank zwischen Spitzen gelagert; von hier läuft der Draht über die Meßscheibe S und durch die Nut eines Führungsrädchens f_1 zur Flaschenzugrolle F, an welcher eine Wagschale mit Belastungsgewichten von 2 kg hängt. Von F läuft der Draht wieder hinauf und über die Führungsrolle f_2 zur Vorratswalze W. Der Support der Drehbank, welcher Meßscheibe und Führungsrollen trägt, wird automatisch während einer Walzenumdrehung um den Betrag einer Ganghöhe weitergeführt, so daß sich der über die Meßscheibe laufende Draht von selbst ohne besondere Führung in die Nut der Marmorwalze einlegt. Die Anzahl der Spulenwindungen wird

1) Vgl. z. B. F. Himstedt, Wied. Ann. 26. S. 547. 1885; P. Janet, F. Laporte, R. Jouaust, Bull. de la Soc. int. des Electriciens 8. S. 459. 1908.

so gewählt, daß auch die Meßscheibe nach Abschluß der Bewicklung möglichst nahe eine volle Zahl von Umdrehungen gemacht hat, was mittels Libellen L_X und L_S an den Rotationskörpern erkannt wird. Die kleine positive oder negative Strecke Δ, um welche der mit Marken versehene Draht noch zurück- oder vorgeführt werden muß, um die Zahl der Scheibenumdrehungen voll zu machen, kann mit einer gewöhnlichen Millimeterteilung (in Fig. 2 angedeutet) nachgemessen werden.

Ist D_X der Durchmesser des Spulenkerns, D_S der der Meßscheibe, d die Drahtdicke, N_X, N_S die Umdrehungszahl des

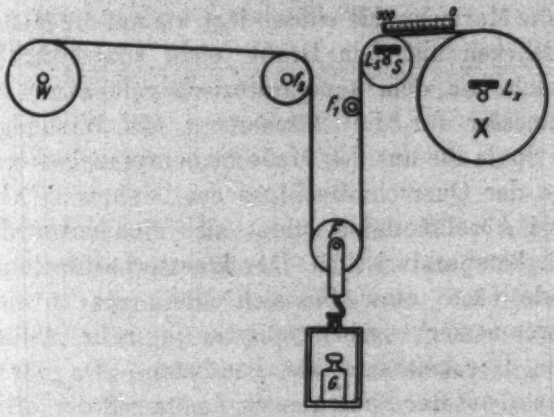


Fig. 2.

Spulenkerns bzw. der Meßscheibe, so ist die Drahtlänge der voll bewickelten Spule

$$\pi (D_X + d) N_X = \pi (D_S + d) N_S + \Delta ,$$

also

$$D_X + d = (D_S + d) \frac{N_S}{N_X} + \frac{\Delta}{\pi N_X} .$$

$D_X + d$ gibt den mittleren Windungsdurchmesser der Spule bzw. den Durchmesser der Zylinderfläche, auf der die Mittelfaser des Drahtes liegt. Auf die Kenntnis dieses Durchmessers kommt es aber gerade an. Als Fehler gehen in die Bestimmung ein die Fehler im Meßscheiben- und Drahtdurchmesser; N_X, N_S sind fehlerfrei, Δ praktisch ebenfalls.

Die Messungen nach dieser Methode ließen sich außer-

ordentlich genau reproduzieren, solange man mit derselben Meßscheibe arbeitete, jedoch stimmten die mit verschieden großen Meßscheiben gefundenen Drahtlängen nur dann überein, wenn man den Drahtdurchmesser etwas kleiner in Rechnung setzte, als er sich unter Annahme kreisförmigen Querschnitts nach den früher genannten Methoden ergab. Wir mußten hieraus schließen, daß der Draht elliptischen Querschnitt hat und sich beim Laufen über die Meßscheibe flach auflegt, so daß die kleine Achse der Querschnittsellipse anstatt des Kreisdurchmessers für die Drahtlängenberechnung in Betracht kommt. Insofern sich nun der Draht beim Aufwickeln auf die Marmorwalze ebenso legt wie auf die Meßscheibe, was durch Marken auf dem Draht leicht kontrolliert werden kann, ist auch von dem komparatorisch gefundenen äußeren Spulendurchmesser für die Berechnung des Windungsdurchmessers der Spule die aus den Meßscheibenversuchen ermittelte kleine Achse der Querschnittsellipse des Drahtes in Abzug zu bringen. Die Abrollmethode bildet also eine notwendige Ergänzung der komparatorischen Durchmesserbestimmung. Die Abrollmethode hätte zwar für sich allein um so richtigere Windungsdurchmesser ergeben müssen, je mehr Meßscheiben verschiedenen Durchmessers wir benutzten. Da wir jedoch beim Bewickeln unserer Spulen noch nichts von der Elliptizität des Drahtquerschnitts wußten, benutzten wir bei Spule *A* und *B* nur zwei, bei Spule *C* sogar nur eine Meßscheibe. Wir waren daher genötigt, für die Aufstellung der endgültigen Draht- und Windungsdurchmesser folgende Regel festzusetzen, die sich darauf gründet, daß eine zu klein genommene Drahtdicke bei der Abrollmethode zu einem zu niedrigen, bei der Komparatormethode zu einem zu hohen Windungsdurchmesser führt, ein Fehler im Drahtdurchmesser also beide Methoden im entgegengesetzten Sinne beeinflußt: *Wir wählen den Drahtdurchmesser so, daß die komparatorische Messung des Windungsdurchmessers übereinstimmt mit dem Resultat aus den Abrollversuchen.* Ein Beispiel, bei dem zwei Meßscheiben (*S* 100 und *S* 150) von 100 bzw. 150 mm Durchmesser benutzt wurden, wird dieses deutlicher machen.

Für den Windungsdurchmesser von Spule *A* wurde an verschiedenen Tagen mit $d = 0{,}515_2$ mm gefunden (bei 18° C)

aus $S\,100$ mm	$S\,150$ mm	kompar. mm
$354{,}907_6$	$354{,}897_1$	
908_8	896_9	
909_7	898_1	
	897_4	
Mittel: $354{,}908_7$	$354{,}897_4$	$354{,}882_1$

Der Gang der Zahlen stimmt mit der Annahme, daß die wirksame Drahtdicke kleiner ist, als die aus der Annahme kreisförmigen Querschnitts berechnete. Wählen wir entsprechend der obigen Regel

$$d = 0{,}509_9 \text{ mm},$$

so ergibt sich

aus $S\,100$ mm	$S\,150$ mm	kompar. mm
$354{,}890_0$	$354{,}884_9$	$354{,}887_4$

Jetzt stimmt der komparatorische Wert mit dem Mittel aus den Meßscheiben überein. Die in dieser Weise eindeutig definierten Windungsdurchmesser wurden der Berechnung der Selbstinduktion zugrunde gelegt. Die Zahlen sind in Tab. 5 unter $2R_{\text{komp.}}$ mitgeteilt, wobei sich Gelegenheit bietet, sie nach einer vollständig anderen, von der bisherigen unabhängigen Methode nachzuprüfen.

7. Aus den bisher besprochenen Messungen ergeben sich die nötigen Daten, um nach der Lorenz-Rosaschen Formel die Selbstinduktionen der Spulen *A*, *B*, *C* und ihrer Unterabteilungen zu berechnen. Die Ergebnisse der Berechnung sind in Tab. 4 angegeben, wo sie gebraucht werden, um das Verhältnis der berechneten zur international gemessenen Selbstinduktion zu bilden.

8. Wir wenden uns nunmehr zur Messung der Selbstinduktion in internationalen elektrischen Einheiten. Nach mancherlei Vorversuchen wählten wir folgenden Weg. Die Selbstinduktion L wird nach einer modifizierten Maxwellschen Brückenmethode in Beziehung gesetzt zu einer Kapazität C und zum Produkt zweier Widerstände nach der Gleichung

$$[L] = [C r_1 r_4] = [\text{Farad Ohm}^2].$$

Die Kapazität wird absolut im int. elektromagnetischen Maßsystem nach der Maxwellschen Unterbrechermethode bestimmt, entsprechend der Gleichung

$$[C] = \left[\frac{1}{n r}\right] = \left[\frac{\text{sec}}{\text{Ohm}}\right],$$

wo n die Zahl der Kondensatorladungen/sec, r einen Widerstand bedeutet. Durch Kombination beider Methoden findet sich

$$[L] = \left[\frac{r_1 r_4}{n r}\right] = [\text{int. Ohm sec}].$$

Als Widerstände dienten Wolffsche Normalwiderstandsbüchsen oder auch, bei den Wechselstrommessungen, aus bifilar ausgespanntem Manganindraht besonders hergestellte Widerstände von möglichst geringer Kapazität und Selbstinduktion. Sämtliche Widerstände wurden so häufig an die Drahtwiderstandseinheit der Reichsanstalt angeschlossen, daß ihr Wert jederzeit auf wenige Milliontel bekannt war.

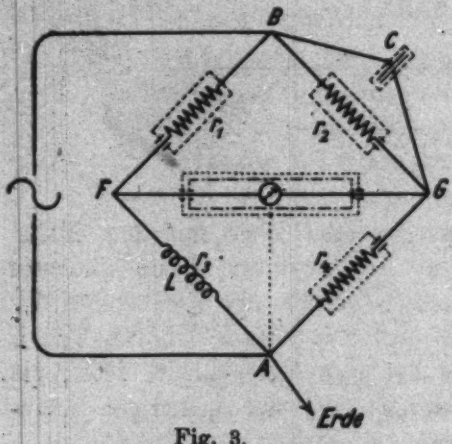


Fig. 3.

Als Kondensatoren dienten die teils von Giebe, teils von Schering und Schmidt[1]) aus kreisförmigen Platten einer Aluminiumlegierung gebauten Luftkondensatoren, die insgesamt eine Kapazität von 0,2 μF darstellten. Die absolute Messung der Kapazität erfolgte nach der Maxwellschen Unterbrechermethode. Die hierfür an der Reichsanstalt ständig vorhandene Meßeinrichtung ist früher schon von Giebe[2]) beschrieben und nur durch einen anderen Motor und Tourenregler verbessert worden. Die Genauigkeit der Messung beträgt etwa 1/100 000.

9. Die Maxwellsche Brückenmethode zur Bestimmung des Verhältnisses $L:C$ wird durch Fig. 3 veranschaulicht. In

1) E. Giebe, a. a. O. 1909; H Schering u. R Schmidt, Zeitschr. f. Instrumentenkunde. 32. S. 253. 1912.

2) E. Giebe, a. a. O. 1909.

Zweig 3 liegt die Ohmspule mit der Selbstinduktion L und dem kleinen Widerstand r_3; r_1, r_2, r_4 sind Wechselstromwiderstände kleiner Kapazität und Selbstinduktion. C ist eine große Kapazität von 0,1 bzw. 0,2 μF aus Luftkondensatoren. Bei A und B ist ein Wechselstrom zugeführt, dessen Frequenz 332, 500 bzw. 720/sec betrug. Zwischen F und G liegt ein auf die Frequenz des Wechselstromes abgestimmtes Vibrationsgalvanometer, das die Stromstärke 10^{-8} bei Frequenz 300 noch anzeigt. Die ursprünglichen Maxwellschen Bedingungen für die Stromlosigkeit des Galvanometerzweiges sind

$$r_1 r_4 = r_2 r_3,$$
$$L = r_1 r_4 C.$$

Beide Bedingungen lassen sich offenbar unabhängig voneinander erfüllen, wenn man r_3 und C verändert. In Wirklichkeit sind diese Gleichungen deshalb nicht streng richtig, weil in den Brückenzweigen störende Induktivitäten und Kapazitäten vorhanden sind, die sich nicht vermeiden lassen. Wenn man diese berücksichtigt, erhält man die zweite Gleichgewichtsbedingung in folgender Form:

$$L = r_1 r_4 (C + c_a) - \frac{r_1 r_4}{r_2}(r_1 k_1 + r_4 k_4 - r_2 k_2),$$

wo C die Kapazität fester Luftkondensatoren, c_a die eines kleinen Drehkondensators bedeutet, $k_1 k_2 k_4$ aber aus Kapazität und Induktivität der Zweige 1, 2, 4 zusammengesetzte, kapazitiv wirkende Größen sind. Diese einzeln zu bestimmen würde sehr umständlich sein und wahrscheinlich nicht zu der gewünschten Genauigkeit führen. Wir haben deshalb einen Kunstgriff angewendet, durch den das ganze Korrektionsglied eliminiert wird.

Wir ersetzen die Spule durch einen dünnen Bifilardraht gleichen Widerstandes von berechenbarer kleiner Selbstinduktion l und schalten die Kapazität C ab. Dann müssen wir, um das Gleichgewicht der Brücke herzustellen, die Einstellung c_a des Drehkondensators ein wenig verändern auf c_l. Im übrigen bleibt alles unverändert, daher gilt

$$l = r_1 r_4 c_l - \frac{r_1 r_4}{r_2}(r_1 k_1 + r_4 k_4 - r_2 k_2).$$

Durch Kombination beider Gleichungen folgt

$$L - l = r_1 r_4 (C + \Delta c).$$

Die kleine Kapazitätsänderung $\Delta c = c_a - c_i$ wird der Eichtabelle des Drehkondensators entnommen, l wird nach der bekannten Formel für Bifilardrähte berechnet, das Produkt $r_1 \cdot r_4$ und C werden unmittelbar im Anschluß an die vorigen Brückeneinstellungen gemessen. Damit sind alle Stücke für die Berechnung von L bekannt. Die störenden Einflüsse sind durch unsere Hilfsmessung eliminiert, die Einfachheit der Maxwellschen Gleichgewichtsbedingung ist wieder hergestellt.

Nicht eliminiert wird natürlich die Wirkung der Spulenkapazität selbst, welche sich darin äußert, daß man für verschiedene Frequenzen etwas verschiedene L findet. Die Umrechnung auf die Frequenz Null ist in Anbetracht der höchstens 15 Milliontel betragenden Korrektion einwandfrei.

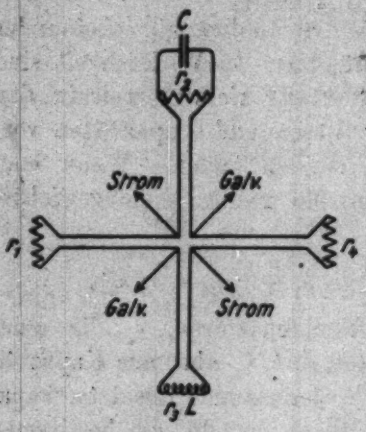


Fig. 4.

10. Das Verfahren wird nur Erfolg haben bei wohldefinierten Kapazitäten und Induktivitäten der Brückenzweige. Wie solche nach Giebes früheren Untersuchungen zu schaffen sind, zeigen die Figg. 3 und 4, deren eine die elektrische Abschützung und Erdung der Brücke, deren andere die bifilare Leitungsführung schematisch skizziert.

11. Die beschriebene Methode ist nun auch zum Vergleich zweier Selbstinduktionen gleichen oder verschiedenen Betrages besonders gut geeignet. Die Selbstinduktionen werden nacheinander in die Brücke eingeschaltet. Haben sie verschiedene Größenordnung, so wird das Widerstandsprodukt $r_1 r_4$ ungefähr im Verhältnis der Selbstinduktionen verändert. Schließlich wird die Nulleinstellung der Brücke mittels des kleinen Drehkondensators bewirkt. C bleibt unverändert, so daß sich eine absolute Kapazitätsmessung erübrigt. In Tab. 2 sind einige Vergleichsmessungen angeführt, die sich über einen weiten Zeitraum verteilen. Die Abweichungen Δ der Einzelmessungen vom Mittel betragen nur wenige Milliontel. Etwa die gleiche Genauigkeit wurde beim Vergleich der Unterabteilungen mit

Tabelle 2.

Messungen des Verhältnisses zweier S.-I.

Datum	$B:C$	Δ
6. 11. 13	$1{,}000416_5$	$-1{,}0 \cdot 10^{-6}$
7. 11. 13	418_3	$+0{,}4$
16. 12. 13	417_1	$-0{,}7$
16. 12. 13	419_1	$+1{,}3$
17. 12. 13	416_5	$-1{,}5$
21. 4. 14	418_4	$+0{,}6$
14. 5. 14	419_6	$+1{,}2$

Mittel $= 1{,}000417_3$

Datum	$C:A$	Δ
6. 12. 13	$5 \cdot (1 - 13466{,}8 \cdot 10^{-6})$	$-1{,}8 \cdot 10^{-6}$
30. 1. 14	$5 \cdot (1 - 13465{,}2 \cdot 10^{-6})$	$-0{,}2$
15. 5. 14	$5 \cdot (1 - 13462{,}9 \cdot 10^{-6})$	$+2{,}1$

Mittel $= 5 \cdot (1 - 13465{,}0 \cdot 10^{-6})$

Tabelle 3.

Messungen der S.-I. von Spule *B*.

1914	L $0{,}05 \times$	Δ
20. April	$1 + 66 \cdot 10^{-6}$	$-7 \cdot 10^{-6}$
28. „	$1 + 82 \cdot 10^{-6}$	$+9 \cdot 10^{-6}$
29. „	$1 + 72 \cdot 10^{-6}$	$-1 \cdot 10^{-6}$
1. Mai	$1 + 87 \cdot 10^{-6}$	$+14 \cdot 10^{-6}$
2. „	$1 + 91 \cdot 10^{-6}$	$+18 \cdot 10^{-6}$
4. „	$1 + 67 \cdot 10^{-6}$	$-6 \cdot 10^{-6}$
5. „	$1 + 78 \cdot 10^{-6}$	$+5 \cdot 10^{-6}$
7. „	$1 + 69 \cdot 10^{-6}$	$-4 \cdot 10^{-6}$
8. „	$1 + 73 \cdot 10^{-6}$	$\pm 0 \cdot 10^{-6}$
12. „	$1 + 67 \cdot 10^{-6}$	$-6 \cdot 10^{-6}$
13. „	$1 + 65 \cdot 10^{-6}$	$-8 \cdot 10^{-6}$
14. „	$1 + 66 \cdot 10^{-6}$	$-7 \cdot 10^{-6}$
23. „	$1 + 70 \cdot 10^{-6}$	$-3 \cdot 10^{-6}$
25. „	$1 + 74 \cdot 10^{-6}$	$+1 \cdot 10^{-6}$

Mittel: $L = 0{,}05\,(1 + 73 \cdot 10^{-6})$ int. H.

den ganzen Spulen B und C erreicht. Aus dieser großen Genauigkeit werden wir nachher Nutzen ziehen.

12. Weniger genau sind natürlich die *absoluten* Bestimmungen der Selbstinduktionen, deren jede eine absolute Messung der Kapazität C einschließt. Das sieht man aus Tab. 3, welche

sämtliche Absolutmessungen von Spule B wiedergibt. Für Spule A und C ergaben sich aus 6 bzw. 16 Einzelmessungen mit Fehlern, der gleichen Größenordnung wie in Tab. 3 die Mittelwerte:

Spule A: $L = 0{,}010\,133\,11$ int. H.
„ C: $L = 0{,}049\,983\,3$ „ „

Mit Hilfe der Verhältniszahlen $B:C$ und $C:A$ sind die für A und B erhaltenen Zahlen auf C umgerechnet. Dann ergeben sich für Spule C die gut übereinstimmenden Werte:

direkt: $L = 0{,}05\,(1 - 334 \cdot 10^{-6})$ H.
aus A u. C/A: $L = 0{,}05\,(1 - 333 \cdot 10^{-6})$ „
aus B u. B/C: $L = 0{,}05\,(1 - 345 \cdot 10^{-6})$ „

Aus allen auf diese Weise für C gefundenen Zahlen ist das Mittel

$$L = 0{,}05\,(1 - 338 \cdot 10^{-6})\ \text{H.}$$

gebildet, aus dem wiederum mit Hilfe der genau bekannten Verhältniszahlen die endgültigen Selbstinduktionswerte für Spule A, B und alle Unterabteilungen von B und C in intern. elektr. Einheiten abgeleitet sind (vgl. Tab. 4).

Tabelle 4.

Verhältnis V der S.-I.-Werte im absoluten und internationalen Maße.

Spule	L in 10^9 cm	L in int. Henry	$L_{abs.} : L_{int.}$	Mittel für jede Spulenform
A	0,010 188 20_1	0,010 133 06	1,000 50_7	1,000 50_7
B	0,050 029 66	0,050 004 0	1,000 51_3	1,000 51_3
B_{I+II}	0,028 681 96_3	0,028 667 24_2	1,000 51_3	1,000 51_3
B_{II+III}	0,028 684 07_6	0,028 669 39_0	1,000 51_3	
B_I	0,010 261 05_5	0,010 255 89_4	1,000 50_3	1,000 50_5
B_{II}	0,010 261 09_9	0,010 255 80_0	1,000 51_6	
B_{III}	0,010 262 03_9	6,010 256 95_3	1,000 49_5	
C	0,050 009 65	0,049 983 1	1,000 53_1	1,000 53_1
C_{I+II}	0,028 672 28_4	0,028 656 77_7	1,000 54_1	1,000 52_0
C_{II+III}	0,028 672 68_3	0,028 658 32_7	1,000 49_0	
C_I	0,010 257 73_3	0,010 251 98_6	1,000 56_1	1,000 52_1
C_{II}	0,010 258 06_9	0,010 252 88_9	1,000 50_3	
C_{III}	0,010 257 60_7	0,010 252 50_3	1,000 49_8	

Gesamtmittel 1,000 51_4

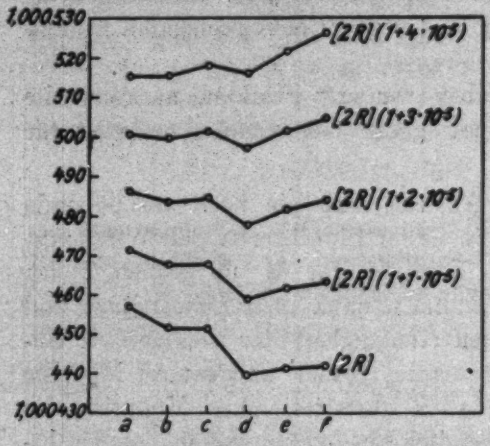
13. Indem man die früher in absolutem Maße berechneten Selbstinduktionswerte durch die jetzt im internationalen Maße erhaltenen dividiert, erhält man die in Tab. 4 zusammengestellten Verhältniszahlen, welche zugleich das Verhältnis des internationalen Ohm zum absoluten Ohm darstellen.

Die Übereinstimmung der Ergebnisse aus den drei verschiedenen Ohmspulen ist in anbetracht der mancherlei Fehlermöglichkeiten ausgezeichnet. Bei Spule *B* ist auch die innere Übereinstimmung zwischen der ganzen und den Teilspulen ausgezeichnet, bei Spule *C* ist diese weniger gut. Es macht den Eindruck, als habe sich in dem ersten Drittel ein Fehler eingeschlichen, der auch auf C_{I+II} und *C* entsprechenden Einfluß nimmt.

Das Gesamtmittel haben wir erst gebildet, nachdem die Teilspulen gemäß ihrer geringeren Genauigkeit zunächst für sich gemittelt waren.

14. Wir waren der Ansicht, daß die noch verbleibende Unsicherheit dieser Zahl in erster Linie durch den Windungsdurchmesser bedingt ist. Deshalb war es von großem Wert, daß wir bei den Spulen *B* und *C* dank ihrer Unterteilung und dank der außerordentlichen Genauigkeit der elektrischen Relativmessungen eine interessante, bisher unbekannte Methode anwenden konnten, welche es gestattet, ohne Kenntnis des Windungsdurchmessers, lediglich aus der Ganghöhe, dem Drahtdurchmesser und den elektrischen Messungen sowohl den Windungsdurchmesser wie das Verhältnis $V = \frac{\text{int. H.}}{\text{abs. H.}}$ zu berechnen. *Das Prinzip der Methode besteht darin, daß man in die Formeln zur Berechnung der Selbstinduktionen der ganzen Spule und ihrer Teile für den Windungsdurchmesser einen solchen Wert einsetzt, daß das Verhältnis der berechneten Selbstinduktionen übereinstimmt mit dem Verhältnis der elektrisch gemessenen*, oder, was dasselbe ist, daß das aus der ganzen Spule und ihren Teilen berechnete Verhältnis *V* konstant herauskommt. Wie eingangs erwähnt, sind die Koeffizienten der Fehlergleichung für die Formen der ganzen Spule und ihrer Teile nur wenig verschieden. Dieser geringe Unterschied genügt aber, um bei falscher Wahl des Durchmessers um $^1/_{100\,000}$ eine Unstimmigkeit zwischen dem Verhältnis der berechneten S.-I. und dem

elektrisch gemessenen Verhältnis zweier Spulenformen hervortreten zu lassen. Wie man so ein Urteil über den richtigen Durchmesserwert gewinnen kann, erkennt man aus der graphischen Darstellung in Fig. 5. Diese zeigt, wie das Verhältnis V von Spulenform zu Spulenform bei verschiedenen Annahmen über den Windungsdurchmesser sich ändert. Von Kurvenzug zu Kurvenzug steigt der Durchmesser von einem beliebigen Näherungswert aus um $^1/_{100\,000}$ seines Wertes an. Der Einfluß des Durchmessers nimmt entsprechend dem wachsenden Koeffizienten in der Fehlergleichung (Abschnitt 3)



a gilt für Mittel aus C_{I}, C_{II}, C_{III}
b gilt für Mittel aus $C_{\mathrm{I+II}}$, $C_{\mathrm{II+III}}$
c gilt für ganze Spule C
d gilt für Mittel aus $2(C_{\mathrm{I}}, C_{\mathrm{II}})$, $2(C_{\mathrm{II}}, C_{\mathrm{III}})$
e gilt für $2[(C_{\mathrm{I}}, C_{\mathrm{II}}) + (C_{\mathrm{II}}, C_{\mathrm{III}}) + (C_{\mathrm{I}}, C_{\mathrm{III}})]$
f gilt für Mittel aus $2(C_{\mathrm{I+II}}, C_{\mathrm{III}})$, $2(C_{\mathrm{II+III}}, C_{\mathrm{I}})$

Fig. 5.
Elektrische Bestimmung des Windungsdurchmessers und des Verhältnisses V für Spule C.

von links nach rechts zu. Die ersten drei Punkte beziehen sich auf die unter *a*, *b*, *c* angegebenen Selbstinduktionen, die drei nächsten Punkte auf die unter *d*, *e*, *f* angegebenen Wechselinduktionen verschiedener Spulenteile aufeinander. Die letztgenannten Punkte sind von den ersten abhängig, ergeben also nichts neues, sie sind nur mit aufgeführt, weil bei ihnen eine Durchmesseränderung verhältnismäßig viel ausmacht.

Aus der Fig. 5 geht deutlich hervor, daß eine Erhöhung des ursprünglich angenommenen Durchmessers um etwa $^3/_{100\,000}$ am wahrscheinlichsten ist, indem dann die V-Werte der verschiedenen Induktionen die beste Konstanz zeigen.

Durch Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate erhält man als wahrscheinlichste Werte für V

$$\text{aus Spule } B \quad V = 1{,}00050_1,$$
$$\text{aus Spule } C \quad V = 1{,}00049_9,$$

beide Zahlen in vorzüglicher Übereinstimmung mit unserem früheren Mittelwert $1{,}00051_8$ (Tab. 4). Dies beweist schon, daß auch die nach der elektrischen Methode gefundenen Windungsdurchmesser der Spulen B und C ziemlich gut mit den komparatorischen übereinstimmen müssen. Tab. 5 gibt die Werte von $2R_{komp.}$ und $2R_{el.}$ sowie ihre Differenz in μ an. Der Unterschied liegt bei B durchweg unterhalb $^1/_{100\,000}$, bei C finden sich größere Abweichungen, die wieder auf einen Fehler in C_I hinweisen, den zu vermuten wir schon oben Anlaß hatten. Eine Aufklärung können wir hierfür nicht geben.

Tabelle 5.

Vergleich der direkt gemessenen wirksamen Windungsdurchmesser mit den aus den elektrischen Relativmessungen in Verbindung mit den Ganghöhewerten abgeleiteten Durchmessern.

Spule	$2R_{komp.}$	$2R_{el.}$	Differenz	Spule	$2R_{komp.}$	$2R_{el.}$	Differenz
	cm	cm	μ		cm	cm	μ
B	35,480 8_7	35,480 6_0	+ 2,7	C	35,471 7_9	35,471 0_4	+ 6,6
B_{I+II}	35,479 7_6	35,479 4_9	+ 2,7	C_{I+II}	35,471 8_6	35,470 9_8	+ 8,8
B_{II+III}	35,482 5_3	35,482 3_8	+ 1,5	C_{II+III}	35,472 0_5	35,471 9_5	+ 1,0
B_I	35,477 0_9	35,477 0_3	+ 0,2	C_I	35,470 7_5	35,469 2_2	+15,3
B_{II}	35,482 2_7	35,481 9_4	+ 3,3	C_{II}	35,472 9_3	35,472 7_4	+ 1,9
B_{III}	35,482 7_6	35,482 8_2	− 0,6	C_{III}	35,471 1_6	35,471 1_6	− 1,6

15. Fassen wir unsere gesamten Resultate zusammen, so würden wir am wahrscheinlichsten halten:

$$1 \text{ int. Ohm} = 1{,}00051 \text{ abs. Ohm.}$$

Die Länge der Quecksilbersäule von 0° und dem gesetzlich vorgeschriebenen Querschnitt, welche ein absolutes Ohm darstellt, beträgt demnach

106,246 cm,

während die Dornsche Zusammenstellung zu der Zahl $106{,}28_5 \pm 0{,}03$ cm führte.

Nach der einzigen mit der unsrigen vergleichbaren Untersuchung, der eingangs erwähnten Bestimmung von F. E. Smith, ist

$$1 \text{ int. Ohm} = 1{,}00052 \text{ abs. Ohm.}$$

Beim Vergleich mit unserer Zahl ist jedoch zu beachten, daß die internationalen Widerstandseinheiten der beiden Staatslaboratorien nicht genau einander gleich sind. Nach den im Juni und Juli 1914 an einer Normalbüchse von 0,1 Ω der Reichsanstalt in Teddington und in Charlottenburg ausgeführten Messungen ist

$$1 \text{ int. Ohm}_{\text{P.T.R.}} = 1{,}00003_2 \text{ int. Ohm}_{\text{N.P.L.}}.$$

Ältere Vergleiche[1]) vom Jahre 1910 ergaben für dieses Verhältnis $1{,}00002_8$. Rechnet man mit 1,00003, so folgt

$$1 \text{ abs. Ohm}_{\text{P.T.R.}} = 1{,}00004 \text{ abs. Ohm}_{\text{N.P.L.}}.$$

Dieser Unterschied folgt auch unmittelbar aus der im Juli 1914 in Teddington vorgenommenen absoluten Messung unserer 0,1 Ω-Widerstandsbüchse im Vergleich mit unserer absoluten Messung. Die beiden absoluten Widerstandsmessungen stimmen also auf $^4/_{100\,000}$ überein. Smith schätzt den Fehler seiner Absolutmessung auf $\pm\,^2/_{100\,000}$. Wir glauben einen Fehler der Absolutmessung von $\pm\,^3/_{100\,000}$ zulassen zu müssen. Der Unterschied beider Messungen liegt daher innerhalb der möglichen Fehlergrenzen. Die absolute Widerstandseinheit läßt sich also heute tatsächlich mit ähnlicher oder gleicher Genauigkeit reproduzieren wie die internationale Hg-Einheit.

16. Die Konsequenzen unserer Messungen für die eingangs erwähnten Wärmeäquivalent- und Lichtgeschwindigkeitsmessungen stellen sich folgendermaßen dar:

Nach einer vor wenigen Jahren von Jaeger und von Steinwehr[2]) durchgeführten Untersuchung beträgt

$$1 \text{ g-cal}\,(15^0) = 4{,}184_2\,[\text{Joule} = A^2_{\text{int.}}\,\Omega_{\text{int.}}\,\text{sec}].$$

1) W. Jaeger u. H. v. Steinwehr, Zeitschr. für Instrumentenkunde **33**. S. 304. 1913.

2) W. Jaeger u. H. v. Steinwehr, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1915, S. 424; Verh. d. D. Phys. Ges. **21**. S. 25. 1919.

Nun stimmt nach unserer heutigen Kenntnis das internationale Ampere sehr nahe, d. h. auf wenige Hunderttausendstel mit 0,1 [CGS] überein. Daher kommt für die Umrechnung des Wärmeäquivalents in Erg wesentlich nur der Unterschied des internationalen und absoluten Ohm in Betracht. Da das internationale Ohm um $^{5}/_{10\,000}$ zu groß ist, muß die oben angegebene Zahl um den gleichen Betrag erhöht werden. Man erhält demnach

$$1\ \text{g-cal}\,(15^{0}) = 4{,}186_{8} \cdot 10^{7}\ [\text{Erg}].$$

Was die Lichtgeschwindigkeit betrifft, so wurde im Bureau of Standards von Rosa und Dorsey[1]) für die Quadratwurzel aus dem Verhältnis der elektrostatischen zur elektromagnetischen Kapazität eines Luftkondensators gefunden

$$c = 2{,}9971 \cdot 10^{10}\left[\frac{\text{cm}\,\Omega}{\text{sec}}\right]^{1/2}.$$

Führen wir statt des internationalen das absolute Ohm ein, so erhöht sich die Zahl um $^{2{,}5}/_{10\,000}$ auf

$$c = 2{,}9979 \cdot 10^{10}\ [\text{cm/sec}] = 299\,790\ [\text{km/sec}] \pm 30,$$

während die besten neueren Lichtgeschwindigkeitsmessungen folgende Zahlen ergaben:

Michelson[2]):	$c = 299\,850$ [km/sec]	± 60,
Newcomb[2]):	$c = 299\,860$ „	± 50,
Perrotin[3]):	$c = 299\,880$ „	± 50.

Durch die Berücksichtigung des absoluten Ohmwertes werden demnach die beiden Methoden innerhalb ihrer Fehlergrenzen so ziemlich in Übereinstimmung gebracht.

Zum Schluß möchten wir unserem Dank für die mancherlei Hilfe durch Rat und Tat Ausdruck geben, durch die uns die zeitraubende und mühsame Arbeit erleichtert wurde. Der

1) a. a. O. S. 601.

2) Vgl. A. Winkelmann, Handbuch der Physik, 2. Aufl. Bd. 6. S. 478. 1906.

3) Perrotin, Compt. rend. 135. S. 883. 1902.

wertvollen Mitarbeit unseres Kollegen, Prof. Göpel, haben wir bereits gedacht. Bei der Zurückführung unserer Längenmessungen auf das Normalmeter halfen uns unser Kollege Dr. Werner und der verstorbene Dr. Reimerdes von der Reichsanstalt für Maß und Gewicht. Dauernde Unterstützung fanden wir endlich durch Hrn. Schuster, der von Beginn bis zum Schluß der Arbeit uns zur Hand war, und bei den Hrn. Keßner und Gutmann, die uns einen Teil der mühsamen Messungen und Rechnungen abnahmen.

(Eingegangen 4. April 1920.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

gehalten vor der Königl. Schwedischen Akademie der Wissenschaften zu Stockholm am 2. Juni 1920

von

Max Planck

Professor der theoretischen Physik an der Universität Berlin

32 Seiten. 1920. M. 4.80

Der Vortrag des bedeutenden Physikers, der jetzt den Nobelpreis erhalten hat, dürfte weitere Kreise interessieren.

Max Kohl A.G. Chemnitz

Physikalische Apparate

Hörsaal- und Laboratoriums-Einrichtungen

Funken-Induktoren

Projektions-Apparate

1920. № 19.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 63.

Das Spektrum des Neon (Nachtrag[1]*);* *von F. Paschen.*

In der früheren Arbeit wurde das Neonspektrum dargestellt als Kombinationsspektrum. Eine Reihe von Nebenserientermen und von Hauptserientermen bilden miteinander Kombinationsserien, welche fast alle Linien umfassen. Einige Serien von Termen befolgen die Serienformel von Ritz genau oder angenähert. Es sind die Termserien:

der I. Nebenserie $m\,d_1'$ $m\,d_1''$ $m\,d_2$ $m\,d_3$ $m\,d_4$ $m\,d_4'$ $m\,d_5$ $m\,d_6$,
der II. Nebenserie $m\,s_4$ und $m\,s_5$,
der Hauptserie $m\,p_3$ $m\,p_6$ $m\,p_7$ $m\,p_8$ $m\,p_9$ $m\,p_{10}$.

Aus einigen der Nebenserien wurden die Grenzen nach der Ritzschen Formel berechnet und dem Werte nach als Termwerte $2\,p_i$ angenommen. Ebenso wurden aus einigen der Hauptserien die Grenzen berechnet und als Termwerte $1{,}5\,s_i$ angenommen. Dies vollzog sich ohne Widerspruch nach dem Kombinationsprinzipe. Die Werte der a. a. O. gegebenen Terme beruhen auf dieser Berechnung der Grenzen nach der Ritzschen Formel.

Außer diesen Serien von Termen kommen andere Termserien im Neonspektrum vor, welche die Formel von Ritz nicht befolgen, wenn man die Werte ihrer Terme nach folgender Überlegung auf Grund des Kombinationsprinzipes festlegt. Jeder Nebenserienterm dieser Art gibt ein Seriengebilde mit den Schwingungsdifferenzen $2\,p_i - 2\,p_{i-\nu}$, $i = 1{,}2 \ldots 10$; $\nu = 1{,}2 \ldots 9$. Jeder Hauptserienterm dieser Art gibt ein Liniengebilde mit den Schwingungsdifferenzen $1{,}5\,s_i - 1{,}5\,s_{i-\nu}$. Dies ist nach dem Kombinationsprinzip so zu verstehen, daß als Grenzen auch dieser abweichenden Serien die aus obigen Serien

1) Zu F. Paschen, Ann. d. Phys. 60. S. 405. 1919, zitiert mit a. a. O.

bestimmten Werte $2p_i$ bzw. $1{,}5s_i$ anzunehmen sind. Dies geschah. Die dadurch festgelegten Werte der Terme einer Serie, welche im folgenden „Kombinationsterme" heißen mögen, folgen nicht dem Gesetz von Ritz, sondern können roh dargestellt werden durch eine Interpolationsformel, welche wesentlich von der Ritzschen abweicht.

Die Termserien dieser Art sind:

der I. Nebenserie ms_1' ms_1'' ms_1''' ms_1''''
(a. a. O. als II. N.-S.-Terme geführt),

der II. Nebenserie ms_2 und ms_3,

der Hauptserie mp_1 mp_2 mp_4 mp_5.

Einige der hieraus entstehenden Nebenserien hat Meißner[1]) angegeben. Er fand ihre Glieder auf Grund der Tatsache, daß bei gleicher Seriennummer Gebilde derselben Schwingungsdifferenzen vorkommen, wie es auch bei den anderen Nebenseriengliedern der Fall ist. Meißner hat weiter bemerkt, daß man auch diese Serien nach der Formel von Ritz berechnen kann, wenn man ihnen nicht die Grenzen $2p_i$ zuweist, wie es das Kombinationsprinzip verlangt, sondern erheblich von diesen Werten abweichende Grenzen. Da die Glieder dieser Serien nicht genau beobachtet waren, konnte Meißner diese Tatsache nicht strenge beweisen und nicht verfolgen. Soll das Kombinationsprinzip in seiner bisher bekannten Bedeutung gelten, so ist eine solche Auffassung der abweichenden Serien abzulehnen, wie a. a. O. näher begründet wurde. Aber dies Prinzip ist ein durchaus empirisches. Neuere theoretische Begründungen haben es zwar verständlich gemacht, werden sich aber empirisch sicher gestellten Modifikationen anzupassen wissen.

Es ist daher interessant, die von Meißner gefundene Tatsache weiter zu verfolgen, wie es bei der erweiterten Kenntnis der Linien dieses Spektrums und ihrer Serien nunmehr möglich ist. Im folgenden wird diese zweite Möglichkeit der Auffassung der abweichenden Neonserien behandelt. Sie ergibt sich dabei als möglich, und das Kombinationsprinzip erhält eine interessante Modifikation.

Vergrößert man die Kombinationswerte aller Terme aller abweichenden Serien um eine Konstante A von dem Betrage

1) K. W. Meißner, Ann. d. Phys. 58. S. 333. 1919.

782 ± 2, so folgen die so „reduzierten" Werte der Terme dem Gesetze von Ritz genauer als der von mir a. a. O. für sie gegebenen Formel und vielfach so genau, wie irgendeine sonst bekannte Serie. Hiervon kommen nur bei den Hauptserien in 2 Fällen Ausnahmen vor.

Zum Beweise dieser Tatsache wird im folgenden das Resultat einer Neuberechnung aller a. a. O. nicht durch die Ritzsche Formel dargestellten Serien angegeben. Für jede Serie besonders wurde derjenige Wert von A bestimmt, mit dem sie dem Gesetz von Ritz möglichst genau folgt. Dieser Wert von A, die Konstanten der Formel von Ritz und der durch sie erzielte Anschluß an die Beobachtungen wird im folgenden mitgeteilt.

Bezeichnung für die Nebenserienterme:

$$m s_i + A = (m s_i)_{\text{red.}} = \frac{109694{,}8}{(m + s_i + \sigma_i (m s_i)_{\text{red.}})^2},$$

$m s_i$ bedeutet den a. a. O. auf Grund des Kombinationsprinzipes berechneten „Kombinationsterm".

$(m s_i)_{\text{red.}}$ ist der durch die Formel von Ritz dargestellte „reduzierte" Termwert.

Die II. Nebenserie $m s_2$:

$A = 781{,}346 \qquad s_2 = 0{,}1931593 \qquad \sigma_2 = -3{,}14623 \times 10^{-7}$

$m =$	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
$(m s_2)$ beob.	38040,73		7272,96	4201,81	2605,42
$(m s_2)_{\text{red.}}$ ber.	38822,08	15177,62	8053,58	4983,63	3385,65
beob.-ber.	0,00		+0,78	−0,48	+1,12

$m =$	6,5	7,5	8,5	9,5
$(m s_2)$ beob.	1667,67	1072,45	670,01	386,17[1])
$(m s_2)_{\text{red.}}$ ber.	2449,20	1853,71	1451,70	1167,58
beob.-ber.	−0,18	+0,06	−0,35	−0,06

Die II. Nebenserie $m s_3$:

$A = 780{,}80 \qquad s_3 = 0{,}1845927 \qquad \sigma_3 = -6{,}591 \times 10^{-7}$

$m =$	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
$(m s_3)$ beob.	39110,81		7323,13	4223,47	2616,58	1675,10
$(m s_3)_{\text{red.}}$ ber.	39889,71	15335,78	8103,40	5005,58	3397,26	2456,10
beob.-ber.	+1,90		+0,53	−1,31	+0,11	−0,20

	λ Luft	ν
1) Dies entspricht der neu gefundenen Linie (0)	4442,243	22504,83
nicht der a. a. O. angegebenen stärkeren (3)	4444,978	22490,99

welche die Kombination $2 p_4 - 8{,}5\ s_1''''$ ist.

m =	7,5	8,5	9,5
$(m\,s_2)$ beob.	1077,33	674,19	389,45 [1]
$(m\,s_3)$ red. ber.	1858,16	1454,78	1169,75
beob.-ber.	−0,03	+0,23	+0,50

$9{,}5\,s_2$ und $9{,}5\,s_3$ sind nur aus den Serien $2\,p_2$—$m\,s_2$ und $2\,p_2$—$m\,s_3$ ermittelt. Die a. a. O. gegebene Formel ließ berechnen $9{,}5\,s = 399{,}084$, $9{,}5\,s = 402{,}62$. Diese Werte entsprechen der Beobachtung schlecht, wie aus der Anm. folgt. Die neuen Werte führen auf 2 Linien, die auf einer stark exponierten Aufnahme zwar schwach, aber deutlich sind. Da hier die Abweichung der früheren von der jetzigen Formel bedeutend wird, ist dies wichtig (vgl. S. 214).

Die erste Nebenserie $m\,s_1'$:

$A = 780{,}646$ $\quad s_1' = -0{,}0173500$ $\quad \sigma_1' = 5{,}540 \times 10^{-7}$

m [2] =	3	4	5	6	7
$(m\,s_1')$ beob.	11493,78	6121,69	3633,43	2284,565	1468,40
$(m\,s_1')$ red. ber.	12274,49	6902,52$_5$	4414,07	3063,04	2249,00$_5$
beob.-ber.	−0,07	−0,19	+0,01	+2,17	+0,04

m =	8	9	10	11 [3])
$(m\,s_1')$ beob.	940,43	578,64	319,94	128,67$_5$
$(m\,s_1')$ red. ber.	1721,03	1359,27	1100,63	909,35
beob.-ber.	+0,05	+0,02	−0,04	−0,03

Diskontinuität für $m = 6$ wie in der ersten Nebenserie $m\,d_i$ für $m = 7$.

Die erste Nebenserie $m\,s_1''$:

$A = 780{,}50$ $\quad s_1' = -0{,}0228320$ $\quad \sigma_1'' = 7{,}643 \times 10^{-7}$

m =	3	4	5	6	7
$(m\,s_1'')$ beob.	11509,50	6132,50$_5$	3640,11	2287,29	1471,00
$(m\,s_1'')$ red. ber.	12289,97	6913,00	4420,36	3066,97	2251,59
beob.-ber.	+0,03	+0,01	+0,25	+0,82	−0,08$_5$

m =	8	9	10	11 [3])
$(m\,s_1'')$ beob.	942,30	579,98	320,98	129,12
$(m\,s_1'')$ red. ber.	1722,80$_5$	1360,54	1101,57	910,06
beob.-ber.	−0,01	−0,05	−0,09	−0,44

Diskontinuität für $m = 6$ wie in der ersten Nebenserie $m\,d_i$ für $m = 7$.

		λ Luft	ν
1) Entspricht der neu gefundenen Linie	(0,5)	4442,89	22501,55
nicht der a. a. O. angegebenen	(0)	4445,671	22487,49

welche sehr schwach und fraglich ist.

2) a. a. O. um 0,5 niederer numeriert.

3) Vgl. S. 214.

Die erste Nebenserie $m\,s_1'''$:

$A = 780{,}40 \qquad s_1''' = -0{,}0209608 \qquad \sigma_1''' = 5{,}974 \times 10^{-7}$

$m =$	3	4	5	6	7
$(m\,s_1''')$ beob.	11519,26	6133,56	3639,75	2287,02	1470,82
$(m\,s_1''')_{red.}$ ber.	12299,67	6913,98	4420,12	3066,60	2251,20$_5$
beob.-ber.	−0,01	−0,02	+0,03	+0,82	+0,02

$m =$	8	9	10	11
$(m\,s_1''')$ beob.	942,21	579,92	320,90	129,10
$(m\,s_1''')_{red.}$ ber.	1722,55	1360,34	1101,42	909,94
beob.-ber.	+0,05$_5$	−0,02	−0,12	−0,44

Diskontinuität für $m = 6$ wie in der ersten Nebenserie $m\,d_1$ für $m = 7$.

Die erste Nebenserie $m\,s_1''''$:

$A = 780{,}30 \qquad s_1'''' = -0{,}0214363 \qquad \sigma_1'''' = 6{,}200 \times 10^{-7}$

$m =$	3	4	5	6	7
$(m\,s_1'''')$ beob.	11520,82	6134,47	3640,47	2289,45	1471,55
$(m\,s_1'''')_{red.}$ ber.	12301,30	6915,09	4420,79	3067,01	2251,54
beob.-ber.	−0,18	−0,32	−0,02	+2,74	+0,31

$m =$	8	9	10	11
$(m\,s_1'''')$ beob.	942,35	579,93	320,93	129,10
$(m\,s_1'''')_{red.}$ ber.	1722,74	1360,46	1101,51$_5$	910,02
beob.-ber.	−0,09	−0,22$_5$	−0,28	−0,62

Diskontinuität für $m = 6$ wie in den ersten Nebenserien $m\,d_1$ für $m = 7$.

Die letzten 4 Serien, a. a. O. und hier $m\,s_1^{\,i}$ bezeichnet, haben alle Eigenschaften der ersten Nebenserien $m\,d_1$ des Neonspektrums. Nach der Größe und dem Vorzeichen der Konstanten $s_1^{\,i}$ und $\sigma_1^{\,i}$ ordnen sie sich unter jene ein. Dazu ist die Diskontinuität vorhanden. Diese bestand bei den Serien $m\,d_1$ darin, daß der Term $m = 6$ etwas, $m = 7$ stark erniedrigt war. Bei den Serien $m\,s_1^{\,i}$ ist der Term $m = 6$ über die Ritz-Kurve hinaus erhöht. Nimmt man dazu, daß nach Meißners[1]) Diskussion der Beobachtungen von H. Nyquist[2]) der Stark-Effekt der Linien dieser Serien von der Größe des Effektes der ersten Nebenserienlinien des Neon ist, so folgt, daß diese

1) K. W. Meißner, Mitt. d. Phys. Ges. Zürich, Nr. 19. S. 64. 1919.
2) H. Nyquist, Phys. Review 10. S. 237. 1917.

4 Serien solche erster Nebenserienterme sind. Rechnet man d_4 und d_4', ferner d_1' und d_1'' je als einen einzigen in 2 Satelliten zerspaltenen Term, so wäre die Zahl Termserien der I. Nebenserie 10, die gleiche, wie die der Termserien der H.-S. des Neonspektrums.

Die Regel, daß die Zahl der Mannigfaltigkeiten (Triplets bzw. Dublets) im Hauptserienterm und im I. Nebenserienterm die gleiche ist, gilt also auch für diese hohe Mannigfaltigkeitszahl. Die Bemerkung von K. A. Nissen[1]), daß diese Mannigfaltigkeitszahl bei den Spektren der Edelgase mit der Nummer des Elementes im periodischen Systems übereinstimmt, trifft daher bei Helium (Hel. und Parhel) und beim Neon zu, wenn man beim Helium die Duplizität des einen Seriensystems und bei Neon diejenige in d_4 und d_4' und zugleich die in d_1' und d_1'' vernachlässigt.

Bezeichnung für die Hauptserienterme:

$$m p_i + A = (m p_i)_{\text{red.}} = \frac{109\,694{,}8}{(m + p_i + \pi_i (m p_i)_{\text{red.}})^2};$$

$m p_i$ bedeutet den a. a. O. auf Grund des Kombinationsprinzipes berechneten „Kombinationsterm".

$(m p_i)_{\text{red.}}$ ist der durch die Formel von Ritz dargestellte „reduzierte" Term.

Die Hauptserie $m p_1$:

$A = 730{,}0 \qquad p_1 = 0{,}255\,468 \qquad \pi_1 = -\,3{,}280 \times 10^{-7}$

$m =$	2	3	4	5	6	7
$(m p_1)$ beob.	20958,72	9643,51	5342,45	3240,04	2015,95	1264,31
$(m p_1)_{\text{red.}}$	21699,84	10372,17	6063,15	3973,55	2804,10	2084,19
beob.-ber.	−11,12	+1,39	+9,30	−3,51	−58,15	−89,88

Diese Serie ist durch die Formel von Ritz nicht darstellbar. Die Interpolation durch die a. a. O. gegebene Formel gestattete, weitere Glieder bis $m = 11$ als möglich anzugeben. Diese Glieder würden nach obiger Interpolation unmöglich, $m = 6$ und $m = 7$ würden bereits fraglich erscheinen.

1) K. A. Nissen, Phys. Zeitschr. 21. S. 25. 1920.

Die Hauptserie $m\,p_2$:

$A = 763{,}0 \quad p_2 = 0{,}1654588 \quad \pi_2 = -\,5{,}0574 \times 10^{-7}$

$m =$	2	3	4	5	6
$(m\,p_2)$ beob.	22891,00	10221,69	5570,75	3350,98	2126,25
$(m\,p_2)_{red.}$ ber.	23653,61	10985,37	6331,82	4114,51	2887,10
beob.-ber.	− 0,61	− 1,28	+ 1,93	− 0,53	+ 2,15

Die Hauptserie $m\,p_3$:

$A = 40{,}0 \quad p_3 = 0{,}256638 \quad \pi_3 = -\,3{,}2524 \times 10^{-6}$

$m =$	2	3	4	5	6	7	8
$(m\,p_3)$ beob.	23012,01	10528,10	6062,15	3952,65	2780,61	2015,95	1602,1
$(m\,p_3)_{red.}$ ber.	23046,79	10564,85	6110,99	3989,50	2810,44	2087,03	1611,21
beob.-ber.	+ 5,22	+ 3,24	− 8,84	+ 3,16	+ 10,18	− 31,08	+ 30,89

$(m\,p_3)_{red.}$ folgt Ritz' Gesetz schlecht $6\,p_3$, früherer Formel noch gut angeschlossen, würde nach obiger Rechnung zweifelhaft sein; $7\,p_3$ und $8\,p_3$ sind nach beiden Rechnungen zweifelhaft.

Die Hauptserie $m\,p_4$:

$A = 780{,}4 \quad p_4 = 0{,}168945 \quad \pi_4 = -\,1{,}02273 \times 10^{-6}$

$m =$	2	3	4	5	6	7
$(m\,p_4)$ beob.	23070,94	10220,82	5550,65	3332,15	2101,4	1356,0
$(m\,p_4)_{red.}$ ber.	23851,34	11001,34	6331,17	4112,34	2885,22	2135,70
beob.-ber.	0,00	− 0,12	− 0,12	+ 0,21	− 3,42	+ 0,70

Die Hauptserie $m\,p_5$:

$A = 783{,}4 \quad p_5 = 0{,}158203 \quad \pi_5 = -\,7{,}3590 \times 10^{-7}$

$m =$	2	3	4	5	6	7	8
$(m\,p_5)$ beob.	23157,34	10272,13	5573,90	3344,46	2107,1	1355,8	864,0
$(m\,p_5)_{red.}$ ber.	23939,83	11054,69	6358,47	4127,63	2894,53	2141,75	1648,54
beob.-ber.	+ 0,91	+ 0,84	− 1,17	+ 0,23	− 4,03	− 2,55	− 1,24

Die Hauptserie $m\,p_7$:

$A = 0 \quad p_7 = 0{,}185051 \quad \pi_7 = -\,1{,}3803 \times 10^{-6}$

$m =$	2	3	4	5	6
$(m\,p_7)$ beob.	23807,05	10916,78	6289,81	4089,95	2871,44
$(m\,p_7)$ ber.	23678,43	10916,17	6289,10	4089,08	2872,10
beob.-ber.	+ 129,42	+ 0,61	+ 0,71	+ 0,87	− 0,66

$m =$	7	8	9	10
$(m\,p_7)$ beob.	2126,25	1638,0	1299,2	1057,5
$(m\,p_7)$ ber.	2126,58	1638,26	1300,75	1057,75
beob.-ber.	− 0,33	− 0,26	− 1,55	− 0,25

Diese Serie, durch die frühere Formel besser dargestellt, folgt Ritz' Gesetz von $m = 3$ an und kann entweder durch Hinzunahme von $A = -10$ zur Ritzschen Form oder besser durch Hinzunahme eines quadratischen Gliedes $\pi_7'(mp_7)^2$ unter der Wurzel des Nenners der Ritzschen Form besser dargestellt werden.

Die Hauptserie mp_{10}:

$A = 10 \quad p_{10} = 0{,}125417 \quad \pi_{10} = -2{,}2822 \times 10^{-6}$

$m =$	2	3	4	5	6	7
(mp_{10}) beob.	25671,65	11411,49	6479,93	4181,29	2920,09	2156,4
(mp_{10}) red. ber.	25679,57	11419,45	6491,94	4191,81	2929,97	2163,56
beob.-ber.	+ 2,08	+ 2,04	− 2,02	− 0,02	+ 0,12	+ 2,84

Bessere Darstellung durch Fl. II a. a. O.

Die Resultate der Berechnung beweisen, daß die Hauptserien mp_3, mp_7, mp_{10} angenähert (kleine Werte von A) vom Ritztypus sind, und daß die Serien mp_1, mp_2, mp_4, mp_5 durch Vermehrung der Terme um A den Ritztypus angenähert oder genau annehmen. Für die Serien mp_4 und mp_5 hat A wieder denselben Wert, wie für die Nebenserien. Für die schwieriger darzustellenden Serien mp_1 und mp_2 berechnete man niedere Werte. Sie folgen indessen der Formel von Ritz nur roh. Für sie trifft demnach die hier behandelte neue Möglichkeit nicht völlig zu. Diese Abweichungen, sowie auch die Abweichungen in p_3 und p_{10} beeinträchtigen die jetzt behandelte Möglichkeit der Auffassung der abweichenden Serien wie a. a. O. in der Anmerkung S. 408 ausgeführt wurde.

Tabelle I.

Die Kombinationsterme der ersten Nebenserien.

m	ms_1'	ms_1''	ms_1'''	ms_1''''	md_1'	md_1''	m
3	11 493,78	11 509,50	11 519,26	115 20,82	12 228,05	12 229,8	3
4	6 121,69	6 132,50$_5$	6 133,56	61 34,47	6 880,79	6 881,85	4
5	3 633,43	3 640,11	3 639,75	36 40,47	4 402,56	4 403,13	5
6	2 284,56$_5$	2 287,29	2 287,02	22 89,45	3 056,20	3 056,56	6
7	1 468,40	1 471,00	1 470,82	14 71,55	2 243,92	2 244,17	7
8	940,43	942,30	942,21	9 42,35	1 718,22	1 718,37	8
9	578,64	579,98	579,92	5 79,93	1 357,22	1 357,33	9
10	319,94	320,98	320,90	3 20,93	1 099,19	1 099,25	10
11	128,67	129,12	129,10	1 29,10	908,17	908,49	11
12					762,93	763,29	12
13					646,48		13

m	$m\,d_2$	$m\,d_3$	$m\,d_4$	$m\,d_4'$ [1])	$m\,d_5$	$m\,d_6$	m
3	12 292,85	12 322,26	12 337,32	12 339,15	12 405,28	12 419,87$_5$	3
4	6 902,48$_5$	6 917,92	6 928,37	6 929,46	6 954,13	6 961,80	4
5	4 412,44	4 420,89	4 427,15	4 427,77	4 441,03$_5$	4 446,44	5
6	3 061,51	3 066,46	3 070,55	3 070,96	3 078,13	3 081,24	6
7	2 246,58	2 248,11	2 253,70	2 254,01	2 257,52$_5$	2 260,27	7
8	1 720,35	1 722,66	1 724,17	1 724,34	1 727,57	1 729,07$_5$	8
9	1 358,59	1 360,06	1 361,43	1 361,57	1 363,53	1 364,54$_5$	9
10	1 100,15	1 101,55	1 102,21	1 102,31	1 103,98	1 104,86	10
11		909,37	910,56	910,56	911,54	912,03	11
12		764,34	764,96	764,96	765,84		12
13		649,30	651,29	651,37	651,94		13

1) Von $m = 7$ an Zahlen $m\,d_4'$ zu klein, $m\,d_4$ zu groß, da Mittel aus d_4 und d_4' gemessen.

Tabelle Ia.

Die reduzierten Terme (beob.) der verschobenen ersten Nebenserien.

m	$m\,s_1' + 780{,}646$	$m\,s_1'' + 780{,}5$	$m\,s_1''' + 780{,}4$	$m\,s_1'''' + 780{,}3$	m
3	12 274,42	12 290,00	12 299,66	12 301,12	3
4	6 902,33	6 913,00$_5$	6 913,96	6 914,77	4
5	4 414,08	4 420,61	4 420,15	4 420,77	5
6	3 065,21	3 067,79	3 067,42	3 069,75	6
7	2 249,04$_5$	2 251,50	2 251,22	2 251,85	7
8	1 721,07	1 722,80	1 722,61	1 722,65	8
9	1 359,28	1 360,48	1 360,32	1 360,23	9
10	1 100,59	1 101,48	1 101,30	1 101,28	10
11	909,32	909,62	909,50	909,40	11
	ähnlich $m\,d_2$	$m\,d_3$	$m\,d_4$	$m\,d_5$	

Tabelle Ib.

Konstanten und Kombinationen der Termserien der ersten Nebenserien.

I. N.-S.	A	d_i (resp. s_1^i)	δ_i (resp. σ_1^i)	Ist kombiniert mit
$(m\,s_1')$	+780,646	−0,0173500	$+5{,}510 \times 10^{-7}$	$p_1\ p_2\ p_3\ p_4\ p_5\ p_6\ p_7\ p_8\ \ p_{10}$
$(m\,s_1'')$	+780,5	−0,0228320	$+7{,}648 \times 10^{-7}$	$p_2\ \ p_4\ p_5\ p_6\ p_7\ p_8\ p_9\ p_{10}$
$(m\,s_1''')$	+780,4	−0,0209603	$+5{,}974 \times 10^{-7}$	$\ \ \ p_4\ \ p_6\ \ p_8\ p_9$
$(m\,s_1'''')$	+780,3	−0,0214363	$6{,}200 \times 10^{-7}$	$p_2\ \ p_4\ p_5\ p_6\ p_7\ p_8\ \ p_{10}$
$(m\,d_1')$	0	−0,010387	$4{,}545 \times 10^{-7}$	$\ \ \ p_4\ \ p_6\ \ p_8\ p_9$
$(m\,d_1'')$	0	−0,010701	$4{,}577 \times 10^{-7}$	$\ \ \ p_4\ p_5\ \ p_7\ p_8\ p_9\ p_{10}$
$(m\,d_2)$	0	−0,014658	$1{,}524 \times 10^{-7}$	$p_1\ p_2\ p_3\ p_4\ p_5\ p_6\ p_7\ p_8\ \ p_{10}$
$(m\,d_3)$	0	−0,020055	$3{,}004 \times 10^{-7}$	$p_2\ \ p_4\ p_5\ p_6\ p_7\ p_8\ p_9\ p_{10}$
$(m\,d_4)$	0	−0,0245621	$5{,}179 \times 10^{-7}$	$\ \ \ p_4\ \ p_6\ p_7\ p_8\ p_9$
$(m\,d_4')$	0	ähnlich $m\,d_4$		$\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ p_9$
$(m\,d_5)$	0	−0,031600	$4{,}352 \times 10^{-7}$	$p_2\ p_3\ p_4\ \ p_6\ \ p_8\ \ p_{10}$
$(m\,d_6)$	0	−0,035200	$5{,}749 \times 10^{-7}$	$p_2\ \ \ \ p_5\ \ p_7\ \ \ p_{10}$

Die Kombinationstermserien $m s_1^i$ sind danach Satellitserien mit konstanter Schwingungsdifferenz $A = 780{,}5$ gegenüber Serien $(m s_1^i)_{\text{red.}}$ vom Ritztypus. Letztere sind nach der Größe ihrer Termwerte und nach ihrem Verlauf ähnlich den Kombinationsserien $m d_2$, $m d_3$, $m d_4$ und $m d_5$. Die hiernach einander entsprechenden Termfolgen, nämlich:

$m s_1'$ und $m d_2$, $m s_1''$ und $m d_3$, $m s_1'''$ und $m d_4$, $m s_1''''$ und $m d_5$

bilden zugleich mit wenigen Ausnahmen Serien mit derselben Auswahl von Grenztermen $2p_i$, wie aus Tab. Ib und Tab. IV ersichtlich ist.

Tabelle II.

Die Kombinationsterme der zweiten Normalserien.

m	$m s_2$	$m s_3$	$m s_4$	$m s_5$	m
1,5	38 040,73	39 110,81	39 470,16	39 887,61	1,5
2,5	(14 396,28)[1]	(14 554,98)[1]	(15 141,50)	(15 332,17)	2,5
3,5	7 272,96	7 323,13	8 016,68	8 101,29	3,5
4,5	4 201,81	4 223,47	4 962,10	5 004,81	4,5
5,5	2 605,42	2 616,58	3 372,37	3 396,71	5,5
6,5	1 667,67	1 675,10	2 439,97	2 456,12	6,5
7,5	1 072,45	1 077,33	1 848,55	1 858,06$_5$	7,5
8,5	670,01	674,19	1 447,59	1 454,14	8,5
9,5	386,17	389,45	1 164,91	1 169,61	9,5
10,5			957,06	960,90	10,5
11,5			800,66	803,40	11,5

Die reduzierten Terme (beob.) der verschobenen zweiten Nebenserien.

m	$m s_2 + 781{,}346$	$m s_3 + 780{,}80$
1,5	38 822,08	39 891,61
2,5	(15 177,62)[1]	(15 335,78)[1]
3,5	8 054,31	8 103,93
4,5	4 983,15	5 004,27
5,5	3 386,77	3 397,38
6,5	2 449,02	2 455,90
7,5	1 853,80	1 858,13
8,5	1 451,35	1 455,00
9,5	1 167,516	1 170,25
	ähnlich $m s_4$	sehr ähnlich $m s_5$

1) Berechnet aus $(m s_i)_{\text{red.}}$ nach Ritzscher Formel.

Tabelle IIa.

Konstanten und Kombinationen der Termserien der zweiten Nebenserien.

II. N.-S.	A	s_i	σ_i	Ist kombiniert mit
$(m s_2)$	+781,346	+0,1931593	$-3{,}14623 \times 10^{-7}$	$p_1\ p_2\ p_3\ p_4\ p_5\ p_6\ p_7\ p_8\ \ p_{10}$
$(m s_3)$	+780,8	+0,1845927	$-6{,}591 \times 10^{-7}$	$p_2\ \ p_5\ \ p_7\ \ p_{10}$
$(m s_4)$	0	+0,206777	$-1{,}00568 \times 10^{-7}$	$p_1\ p_2\ p_3\ p_4\ p_5\ p_6\ p_7\ p_8\ \ p_{10}$
$(m s_5)$	0	+0,1850705	$-6{,}699 \times 10^{-7}$	$p_2\ \ p_4\ p_5\ p_6\ p_7\ p_8\ p_9\ p_{10}$

$m s_2$ und $m s_3$ sind danach Satellitserien gegenüber den Serien $(m s_2)_{red.}$ und $(m s_3)_{red.}$ Letztere sind nach Größe ihrer Termwerte und nach ihrem Verlauf ähnlich den Termserien $m s_4$ und $m s_5$.

$m s_2$ und $m s_4$ sind Termfolgen derselben Auswahl von Grenztermen $2 p_i$. Die Grenzterme $2 p_i$, mit welchen $m s_3$ Serien bildet, sind auch solche, mit denen $m s_5$ Serien bildet. $m s_5$ bildet außerdem noch mit weiteren der Grenzterme $2 p_i$ Serien.

Tabelle III.

Die Kombinationsterme der Hauptserien.

m	$m p_1$	$m p_2$	$m p_3$	$m p_4$	$m p_5$	m
2	20 958,72	22 891,00	23 012,01	23 070,94	23 157,34	2
3	9 643,51	10 221,69	10 528,10	10 220,82	10 272,13	3
4	5 342,45	5 570,75	6 062,15	5 550,65	5 573,90	4
5	3 240,04	3 350,98	3 952,65	3 332,15	3 344,46	5
6	2 015,95	2 126,25	2 780,61	2 101,4	2 107,1	6
7	1 264,31		2 015,95	1 356,0	1 355,8	7
8	747,9		1 602,1		864,0	8
9	422,9					9
10	232,8					10
11	115,4					11

m	$m p_6$	$m p_7$	$m p_8$	$m p_9$	$m p_{10}$	m
2	23 613,59	23 807,85	24 105,23	24 272,41	25 671,65	2
3	10 891,04	10 916,78	11 030,29	11 098,71	11 411,49	3
4	6 280,71	6 289,81	6 338,15	6 370,29	6 479,93	4
5	4 085,59	4 089,95	4 114,71	4 132,28	4 181,29	5
6	2 869,15	2 871,44	2 885,75	2 896,54	2 920,09	6
7	2 126,25	2 126,25	2 137,8	2 142,4	2 156,4	7
8	1 638,0	1 638,0	1 642,6	1 647,2		8
9	1 299,2	1 299,2		1 306,2		9
10	1 057,5	1 057,5				10

Tabelle IIIa.

Die reduzierten Terme (beob.) der verschobenen Hauptserien.

m	$(m p_1) + 730$	$(m p_2) + 763$	$(m p_4) + 780{,}4$	$(m p_5) + 783{,}4$	m
2	21 688,72	23 653,00	23 851,34	23 940,74	2
3	10 373,51	10 984,69	11 001,22	11 055,53	3
4	6 072,45	6 333,75	6 381,05	6 357,30	4
5	3 970,04	4 113,98	4 112,55	4 127,86	5
6	2 745,95	2 889,25	2 881,8	2 890,5	6
7	1 994,31		2 136,4	2 139,2	7
8				1 647,4	8

Tabelle IIIb.

Konstanten und Kombinationen der Termserien der Hauptserien.

H.-S.	A	p_i	π_i	Kommt vor kombiniert mit
$(m\,p_1)$	+730,0	0,255468	$-3{,}280 \times 10^{-7}$	s_2 s_4
$(m\,p_2)$	+763,0	0,1654588	$-5{,}0574 \times 10^{-7}$	s_2 s_3 s_4 s_5
$(m\,p_3)$	+ 40,0	0,256638	$-3{,}2524 \times 10^{-6}$	s_2 s_4
$(m\,p_4)$	+780,4	0,168945	$-1{,}02273 \times 10^{-6}$	s_2 s_4 s_5
$(m\,p_5)$	+783,4	0,158203	$-7{,}3590 \times 10^{-7}$	s_2 s_3 s_4 s_5
$(m\,p_6)$	0	0,1861075	$-1{,}0225 \times 10^{-6}$	s_2 s_4 s_5
$(m\,p_7)$	0	0,185051	$-1{,}3803 \times 10^{-6}$	s_2 s_3 s_4 s_5
$(m\,p_8)$	0	0,169166	$-1{,}31045 \times 10^{-6}$	s_2 s_4 s_5
$(m\,p_9)$	0	0,1572927	$-1{,}14584 \times 10^{-6}$	s_5
$(m\,p_{10})$	+10	0,125417	$-2{,}2822 \times 10^{-6}$	s_2 s_3 s_4 s_5

Nach Größe der Termwerte und Serienverlauf sind einander ähnlich: $mp_1 + 730$ und mp_3, $mp_2 + 763$ und mp_7, $mp_4 + 780{,}4$ und mp_8, $mp_5 + 783{,}4$ und mp_9 (mp_7).

Die drei ersten dieser Paare bilden mit der gleichen Auswahl von Grenztermen $1{,}5\,s_i$ Kombinationen. mp_5 ist kombiniert mit denselben Grenzen wie mp_{10} und ist dieser Serie wohl zuzuordnen.

Tabelle IV.

$2p_i$ kombiniert mit folgenden Termserien der ersten und zugleich der zweiten Nebenserie.

	Erste Nebenserie											Zweite Nebenserie			
$2p_1$	s_1'						d_2			d_5?[1]		s_2		s_4	
$2p_2$	s_1'	s_1''		s_1''''			d_2	d_3		d_5	d_6	s_2	s_3	s_4	s_5
$2p_3$	s_1'						d_2			d_5		s_2		s_4	
$2p_4$	s_1'	s_1''	s_1'''	s_1''''	d_1'	d_1''	d_2	d_3	d_4	d_5		s_2		s_4	s_5
$2p_5$	s_1'	s_1''		s_1''''		d_1''	d_2	d_3			d_6	s_2	s_3	s_4	s_5
$2p_6$	s_1'	s_1''	s_1'''	s_1''''	d_1'		d_2	d_3	d_4	d_5		s_2		s_4	s_5
$2p_7$	s_1'	s_1''		s_1''''		d_1''	d_2	d_3	d_4		d_6	s_2	s_3	s_4	s_5
$2p_8$	s_1'	s_1''	s_1'''	s_1''''	d_1'	d_1''	d_2	d_3	d_4	d_5		s_2		s_4	s_5
$2p_9$		s_1''	s_1'''		d_1'	d_1''		d_3	d_4	d_4'					s_5
$2p_{10}$	s_1'	s_1''		s_1''''		d_1''	d_2	d_3		d_5	d_6	s_2	s_3	s_4	s_5

1) Die von Meißner angegebenen, nicht eingeordneten Linien:

	$2p_1 - 4d_5$		$2p_1 - 4d_4$	
λ	(3) 7 138,70	und	(3) 7 125,37	beob.
ν	14 004,29		14 030,49	

sind wohl die oberhalb genannten Kombinationen:

ber. λ 7 138,54 7 125,44

Die hier vertretene Auffassung der abweichenden Neonserien erscheint aus folgenden Gründen als eine mögliche:

1. Die Serien werden durch die bekannte Formel von Ritz genauer dargestellt als durch die a. a. O. gegebene Formel sonst unbekannten Serienverlaufes. Die experimentelle Entscheidung zwischen den beiden Möglichkeiten würde durch die Beobachtung höherer Glieder dieser Serien zu erzielen sein. Denn nach der früheren Auffassung müßten die Kombinationsterme $2p_i$ resp. $1{,}5s_i$ die Grenzen dieser Serien sein. Nach der hier vertretenen müßten die reduzierten Termwerte $2p_i + A$ resp. $1{,}5s_i + A$ ihre Grenzen sein, wie im nächsten Abschnitt bewiesen wird. Schon die vorliegenden Beobachtungen, besonders über ms_2 und ms_3 würden für die letzteren Grenzen günstig sein (vgl. S. 204). Hätte man es nur mit diesen abweichenden Serien zu tun, so würde man ihnen als Grenzen die reduzierten Terme zuweisen, wie es Meißner tat.[1]) Das heißt: Man erhielte die Zahlenwerte ihrer Grenzen und damit auch die aller ihrer Terme um A größer als die Kombinationsterme. Dafür würden in diesem Falle die anderen Serien als abweichende erscheinen.

Aus einer stark exponierten Aufnahme konnte folgender Beweis für die Grenzen $2p_i + A$ abgeleitet werden: Die Glieder $10{,}5s_1^{\,i}$ nach früherer, $11s_1^{\,i}$ nach jetziger Bezeichnung der ersten Nebenserie konnten a. a. O. auf Grund der dort gegebenen Serienformel nicht gefunden werden, obwohl das vorhergehende Glied noch nicht allzu schwach war. Die neue Formel führt in mehreren Fällen auf schwache, aber deutlich erkennbare Linien. Es sind gerade die Fälle, in denen man wegen der Lichtstärke des vorhergehenden Gliedes dieses Serienglied erwartete:

Auf meinen Aufnahmen ist vorhanden (0) 7138,27 und die zu dieser Serie gehörige $2p_1 - 5d_5$ ber. 6052,440 beob. (0) 6052,41. Die Linie $2p_1 - 5d_4$ ber. 6047,356 ist nicht sicher zu erkennen. Eine sehr schwache und unsichere Linie bei 6047,18 kommt dafür wohl nicht in Frage. Es ist daher oben nur angegeben, daß d_5 möglicherweise eine schwache Kombinationsserie mit $2p_1$ bildet.

1) Meißner gibt als Grenze für einige dieser Serien 26442,5 bis 26449,4 an Stelle des Kombinationstermes $2p_{10} = 25671{,}654$.

	$2p_3 - 11s_1'$	$2p_4 - 11s_1'''$	$2p_5 - 11s_1''$
		$2p_4 - 11s_1''''$	$2p_5 - 11s_1''''$
λ_{Luft} beob.	(0) 4 368,766	(0) 4 357,613	(0) 4 341,298
ν	23 012,015	22 941,89	23 028,12
$11s_1'$	128,675	129,05	129,22

	$2p_6 - 11s_1'''$	$2p_7 - 11s_1''$	$2p_8 - 11s_1'''$
	$2p_6 - 11s_1''''$	$2p_7 - 11s_1''''$	$2p_8 - 11s_1''''$
λ_{Luft} beob.	(0) 4 256,935	(0) 4 221,992	(0) 4 169,642
ν	23 484,47	23 678,84	23 976,11
$11s_1'$	129,12	129,01	129,12

Es folgt im Mittel:

	$11s_1'$	$11s_1''$	$11s_1'''$	$11s_1''''$
beob.	$128{,}67_5$	129,12	129,10	129,10
ber. neu	$128{,}70_5$	129,56	129,54	129,72
ber. a. a. O.	186,11			186,65

Diese Beobachtungen entscheiden bereits für die Grenze $(2p_i)_{\text{red.}}$ und gegen die a. a. O. gegebene Formel, sowie gegen den unreduzierten Wert $2p_i$ als Grenze infolge der guten Übereinstimmung mit der jetzigen und der großen Abweichung von der früheren Berechnung.

2. Das Kombinationsprinzip ist noch nicht völlig bekannt. Es kommen in den Spektren von Mg, Ca, Sr, Ba, Al Gruppen vor (die der $^3/_2$-normalen magnetischen Aufspaltung), in welchen die Schwingungsdifferenzen der Triplets genau auftreten. Die Linien dieser Gruppen können aber nicht einfache Kombinationen der $2p_i$-Terme der Triplets sein, da die Werte der dazu gehörigen Kombinationsterme zu klein wären. Dieses ist auch die neue charakteristische Schwierigkeit in der Einordnung der abweichenden Neonserien.

Es ergibt sich nun aus der neuen Auffassung der abweichenden Serien folgendes:

Die a. a. O. und in den Tabellen I, II, III geführten Kombinationsterme geben alle Linien aller Serien, auch der abweichenden nach dem Schema:

Hauptserie	$\nu = 1{,}5s_i - mp_i$
Zweite Nebenserie	$\nu = 2p_i - ms_i$
Erste Nebenserie	$\nu = 2p_i - md_i$
	bzw. $2p_i - ms_1^i$

Nach der Formel von Ritz darstellbar und durch dieses Schema mit richtigen Seriengrenzen beschrieben sind die S. 207 angegebenen Serien.

Für die abweichenden Serien (S. 202 angegeben) sind die rechtsstehenden subtraktiven Termfolgen nicht nach Ritz darstellbar. Der Formel von Ritz folgen die reduzierten Termwerte:

$$(m\,p_i)_{\text{red.}} = m\,p_i + A$$
$$(m\,s_i)_{\text{red.}} = m\,s_i + A$$
$$(m\,s_1{}^i)_{\text{red.}} = m\,s_1{}^i + A$$

Wenn nun diese reduzierten Termwerte als die richtigen angenommen und in das obige Schema eingeführt werden, wird das Schema der abweichenden Serien und ihrer Linien folgendes:

Hauptserie	$\nu = (1{,}5\,s_i + A) - (m\,p_i)_{\text{red.}}$	$= (1{,}5\,s_i)_{\text{red.}} - (m\,p_i)_{\text{red.}}$
Zweite Nebenserie	$\nu = (2\,p_i + A) - (m\,s_i)_{\text{red.}}$	$= (2\,p_i)_{\text{red.}} - (m\,s_i)_{\text{red.}}$
Erste Nebenserie	$\nu = (2\,p_i + A) - (m\,s_1{}^i)_{\text{red.}}$	$= (2\,p_i)_{\text{red.}} - (m\,s_1{}^i)_{\text{red.}}$

Die subtraktiven Termfolgen sind neue, für sich gegebene, im einzelnen zahlenmäßig oben ausgeführte. Sie werden jetzt als die richtigen behandelt, weil sie der Formel von Ritz folgen. Dann folgt, daß sämtliche Termwerte der Grenzen für diese Serien um den konstanten Wert A erhöht auftreten. Die Grenzen der Serien sind also durch das erste Schema nur für die Serien richtig beschrieben, welche unreduziert der Formel von Ritz folgen. Für die zweite Art Serien, deren unreduzierte Terme der Formel von Ritz nicht folgen, und deren um A vermehrte (reduzierte) Termwerte erst diese Formel befolgen, gelten nicht die gleichen Grenzen, sondern um den konstanten Betrag A erhöhte. Für diese Serien sind daher alle Kombinationsterme (auch die der Grenzen) um A zu vermehren. Das letzte Schema allein entspricht der physikalischen Art dieser Serien, das erste Schema ist für sie ein unrichtiges.

Es ist zu beachten, daß die Terme $1{,}5\,s_2$ und $1{,}5\,s_3$ unreduziert bei den Hauptserien vom Ritztypus, aber reduziert bei den anderen auftreten, während die Terme höherer Nummer m $m\,s_2$ und $m\,s_3$ nur reduziert in den zweiten Nebenserien auftreten und eine physikalische Bedeutung haben sollen. Ebenso-

sind die Terme $1{,}5\,s_4$ und $1{,}5\,s_5$ unreduziert Grenzen der Hauptserien vom Ritztypus und reduziert Grenzen der abweichenden Hauptserien, während die Terme $m\,s_4$ und $m\,s_5$ höherer Nummer m, nur unreduziert auftreten. Hierin liegt ein Widerspruch. Denn, wenn nur zuzulassen ist, was Ritz' Formel befolgt, so wären $1{,}5\,s_3$ und $1{,}5\,s_3$ als unreduzierte Terme zu verwerfen, ebenso $(1{,}5\,s_4)_{\text{red.}}$ und $(1{,}5\,s_5)_{\text{red.}}$, da diese Werte nicht aus der Formel von Ritz berechnet werden. Dasselbe ist für die Terme $2\,p_i$ zu erörtern, und es entsteht dabei ein analoger Widerspruch. Alle diese Terme kommen als Grenzen doppelt vor: bei den Nebenserien vom Ritztypus mit unreduzierten Werten, bei den abweichenden mit reduzierten Werten, während sie doch Serien angehören, die entweder nur reduziert oder nur unreduziert als solche zugelassen sind. Wenn die unreduzierten Kombinationsterme $1{,}5\,s_2$ und $1{,}5\,s_3$ tatsächlich auftreten (als Grenzen der Hauptserien vom Ritztypus), so sollte auch die physikalische Möglichkeit der unreduzierten Terme $m\,s_2$ und $m\,s_3$ zu erwarten sein.[1]) Das war einer der Gründe, die mich veranlaßten, a. a. O. die Kombinationsterme dieser Serien anzunehmen, obwohl ihr Gesetz weit vom Ritzschen entfernt ist. Soll die hier erörterte Möglichkeit bestehen bleiben, so führt dieser Widerspruch zu einer Modifikation des Kombinationsprinzipes.

Wir haben für alle Grenzterme, also für $2\,p_i$ und $1{,}5\,s_i$ zwei verschiedene Werte, die Kombinationswerte und die um A größeren „reduzierten" Werte, während sämtliche Termfolgen festliegen. Die Konstanz der Differenz A der Grenzterme unabhängig von der Art des Terms (p oder s) tritt als interessante Neuheit auf.

Nun zeigt sich, daß, wenigstens in einiger Annäherung, die reduzierten Terme einer abweichenden Serie mit den Kombinationstermen einer anderen Serie übereinstimmen, welche letztere unreduziert der Formel von Ritz folgt. Es ist z. B. nahezu:

$$m\,s_3 + A = m\,s_5.$$

Außerdem gehen diese beiden so einander zugeordneten Serien meistens dieselben Kombinationen ein.

---

1) Die unreduzierten Terme $2{,}5\,s_2$ und $2{,}5\,s_3$ als Grenzen werden wohl bei im Ultrarot verlaufenden Serien vorkommen.

Würde dies allgemein genau zutreffen, so ergäbe sich ein besonders einfaches, aber völlig neues Bild, welches erst an einem Beispiel und dann allgemein in folgender Weise dargelegt werden kann:

Der im folgenden unter I stehende Satz von vier verschiedenen Hauptserien entspricht dem Schema S. 214. Die Linien dieser Serien sind a. a. O. in den Tabellen aufgeführt. Unter der Annahme:

$$1.\ 1{,}5s_5 = 1{,}5s_3 + \mathrm{A} \qquad 2.\ mp_7 = mp_3 + A$$

werden aus diesen Serien diejenigen des Satzes II. Dieser enthält drei Serien: 2 und 3 bedeuten die gleiche Serie. Ihr parallel mit konstanter Schwingungsdifferenz $\pm A$ für alle Linien gleicher Nummer m und für die Grenzen

	I	II	III
1.	$\nu = 1{,}5s_3 - mp_7$	$= (1{,}5s_5 - A) - mp_7$	$= 1{,}5s_5 - (mp_7 + A)$
2.	$\nu = 1{,}5s_5 - mp_7$	$= 1{,}5s_5 - mp_7$	$= 1{,}5s_5 - mp_7$
3.	$\nu = 1{,}5s_3 - mp_3$	$= 1{,}5s_5 - mp_7$	$= 1{,}5s_5 - mp_7$
4.	$\nu = 1{,}5s_5 - mp_3$	$= (1{,}5s_5 + A) - mp_7$	$= (1{,}5s_5 + A) - mp_7$

laufen zwei Satellitserien 1 und 4. Dies wäre das physikalisch beobachtbare Bild. Tatsächlich fallen die gleichnummerierten Linien der beiden Serien 2 und 3 nahe zusammen, und es liegen nahe im Abstand A oberhalb und unterhalb von ihnen die Linien der Serien 4 und 1.

Unter III ist eine weitere Darstellung dieser vier Serien gegeben, nach der diese Serien sich auch auffassen lassen als Übergänge von den Niveaus mp_7 und $mp_7 + A$ zu den Niveaus $1{,}5s_5$ und $1{,}5s_5 + A$. Die drei parallelen Serien entsprechen allen möglichen Übergängen zwischen diesen zwei Niveaupaaren. Hier kämen nicht allein die Grenzterme, sondern alle vorhandenen Terme auch um A vermehrt vor, aber dann nur vermehrt und nicht auch vermindert. Analog ließe sich ein vierter Satz angeben, der allen Übergängen zwischen den Niveaus mp_7 und $mp_7 - A$ einerseits und denen $1{,}5s_5$ und $1{,}5s_5 - A$ entspräche. Diese verschiedenen Möglichkeiten würden zu verschiedenen theoretischen Auffassungen führen und sind deshalb herausgestellt.

Nach dem Schema des Satzes II geschrieben wären alle hierher gehörigen Serien die folgenden:

	Hauptserie	II. Nebenserie	I. Nebenserie
2. 3.	$\nu = 1{,}5\, s_k - m\, p_i$	$\nu = 2\, p_i - m\, s_k$	$\nu = 2\, p_i - m\, d_k$
4.	$\nu = (1{,}5\, s_k + A) - m\, p_i$	$\nu = (2\, p_i + A) - m\, s_k$	$\nu = (2 p_i + A) - m\, d_k$
1.	$\nu = (1{,}5\, s_k - A) - m\, p_i$	$\nu = (2\, p_i - A) - m\, s_k$	$\nu = (2 p_i - A) - m\, d_k$
	$i = 3, 7, 8, 10;\quad k = 4{,}5$		$i = 3, 7, 8, 10$ $k = 2, 3, 4, 5$

Es hat den Anschein, als ob dies der ursprüngliche Plan dieses Teiles des Spektrums wäre, der nur in gestörter Form in die Erscheinung getreten ist.

Nicht in dieses Bild eingeschlossen sind die Serien vom Ritztypus der Kombinationsterme:

der I. Nebenserie	$m\, d_1'$,	$m\, d_1''$,	$m\, d_4'$,	$m\, d_6$
der Hauptserie		$m\, p_6$		$m\, p_9$

In Wirklichkeit bestehen die 4 Hauptserien des Beispiels gesondert in folgender Gestalt:

1. $\nu = 1{,}5\, s_3 - m\, p_7$
2. $\nu = 1{,}5\, s_5 - m\, p_7$
3. $\nu = (1{,}5\, s_3 + A) - (m\, p_3)_{\text{red.}}$
4. $\nu = (1{,}5\, s_5 + A) - (m\, p_3)_{\text{red.}}$

da weder $1.5\, s_5 = 1{,}5\, s_3 + A$ noch $m\, p_7 = m\, p_3 + A$ genau erfüllt sind.

Es ist also tatsächlich jeder Serie 1. bzw. 2. eine andere 3. bzw. 4. so zugeordnet, daß die Grenze um den konstanten Betrag A verschoben ist. Aber es ist nicht, wie in obigem einfachen Bilde auch jedes Serienglied genau um diesen Betrag verschoben. Da der Term $1{,}5\, s_5$ demjenigen $1{,}5\, s_3 + A$ nahe kommt, entspricht der Satz II den beobachteten Tatsachen am besten.

Analoges gilt tatsächlich (und hier ohne Abweichung in den Werten von A) für die einander zugeordneten beiden Sätze von ersten und zweiten Nebenserien, deren Grenzen $2\, p_i$ und $2\, p_i + A$ sind.

Bezüglich der tatsächlich nach der Rechnung vorhandenen Abweichungen in dem Werte der Konstanten A im Falle der

Serie $(m p_2)_{\text{red.}}$ ($A = 763$) und derjenigen $(m p_1)_{\text{red.}}$ ($A = 730$) kann man wohl annehmen, daß diese Zahlen infolge unbekannter Störungen von 782 abweichen, so wie $A = 10$ für $m p_{10}$ und $A = 40$ für $m p_3$ berechnet wurden, da diese Serien mit $A = 0$ von der Ritzschen Form stärker abweichen. Diese Serien befolgen selbst mit diesen Werten von A die Formel von Ritz recht wenig genau.

Soll die hier vertretene Auffassung der abweichenden Serien des Neonspektrum eine physikalische Bedeutung haben, so würde der Konstanten A wohl eine allgemeinere Bedeutung zukommen, da sie der Ausdruck einer konstanten Änderung Bohrscher Energiestufen ist.

Als Wert von A wurde 782 ± 2 berechnet, wenn als Wert der Rydbergkonstanten N 109694,8 angenommen wurde. Für $N_\infty = 109737{,}2$ würde man für A den Wert 783 ± 2 erhalten. Hr. A. Sommerfeld meinte zu dieser Verschiebung der Seriengrenzen um den Betrag von 783, daß dieser Wert nahe übereinstimme mit dem Betrage von $N \times \alpha$ (N = Rydbergkonstante 109737,2, $\alpha = \frac{2\pi e^2}{ch}$ Konstante der Feinstruktur 7.295×10^{-3}). Es ist nämlich $N \times \alpha = 800{,}6$. Die Abweichung gegenüber dem aus den Neonserien bestimmten Werte von 783 wäre allerdings noch zu deuten. Da für die Serie $m p_1$ $A = 730$, für $m p_2$ $A = 763$, und nur für die übrigen abweichenden Serien A den obigen Wert hat, so könnte es wohl sein, daß der Wert von A infolge irgendeiner Störung verschiedener Stärke gegenüber dem Werte 800,6 in verschiedenem Grade erniedrigt erscheint. Diese Störung der universellen Konstanten 800,6 würde wohl dem speziellen Mechanismus des emittierenden Neonatoms zuzuschreiben sein.

Es kann vermutet werden, daß die beiden Sätze von Serien mit konstant verschobenen Grenzen der Isotopie des Neons zuzuschreiben sind.

Übersicht des Inhalts.

Das Spektrum des Neon ist früher (a. a. O.) fast vollständig dargestellt durch 10 Termfolgen von Hauptserienart und 14 Termfolgen von Nebenserienart. Die Kombinationen dieser Termfolgen sind die beobachteten Linien der entstehenden Serien.

Von diesen Termfolgen sind 4 Hauptserien- und 4 I. Nebenserienfolgen, sowie 2 II. Nebenserienfolgen ebenso vielen Haupt-, I. und II. Nebenserienfolgen zugeordnet. Die Grenzen der Serien, welche durch Kombinationen des einen Satzes von Termfolgen entstehen, haben gegenüber den Grenzen analog kombinierter Serien des zugeordneten Satzes eine konstante Differenz der Wellenzahlen von 782 cm^{-1} unabhängig von der Art der Serien. Diese Modifikation des Kombinationsprinzips entsteht, wenn man die Grenzen aller Serien nach der Formel von Ritz berechnet.

(Eingegangen 28. April 1920.)

2. *Allgemeine spektroskopische Gesetze, insbesondere ein magnetooptischer Zerlegungssatz;* von *A. Sommerfeld.*

Nachdem die Struktur der Wasserstofflinien (Balmer-Serie) und der wasserstoffähnlichen Linien (einschließlich der Röntgenspektren) geklärt war, schien es nur ein Schritt, um auch die Struktur der wasserstoff-unähnlichen Linien nach denselben Gesichtspunkten zu behandeln, also z. B. das Dublett der D-Linien auf Bahnverschiedenheiten im Atommodell zurückzuführen. Ermutigend war in dieser Hinsicht, daß sich das Dublett von Li quantitativ ($\Delta\nu = 0{,}34\,\mathrm{cm}^{-1}$ in den Nebenserien) und qualitativ (nach Lage der Intensität seiner beiden Komponenten) an das Dublett von H ($\Delta\nu = 0{,}365\,\mathrm{cm}^{-1}$) anschließt. Indessen war von vornherein klar, daß die verschiedenen in einer Wasserstoff-Feinstruktur zusammenfallenden Komponenten bei den wasserstoff-unähnlichen Elementen auseinandertreten in die verschiedenen Serien. Infolgedessen ist nicht das Auftreten von Dubletts oder Tripletts, sondern vielmehr das Nebeneinander von Hauptserie, Nebenserien, Bergmannserie als Abbild der Feinstrukturen des Wasserstoffs in den wasserstoff-unähnlichen Spektren anzusehen. Für die Erklärung der Linienstruktur in diesen Spektren gibt daher der Wasserstoff keinen Anhalt.

So kommt es, daß wir der modellmäßigen Bedeutung der Linienmultiplizitäten bei den wasserstoff-unähnlichen Elementen, trotz wiederholter Bemühungen von verschiedenen Seiten, vorläufig ratlos gegenüberstehen. Um so wertvoller sind alle Gesetzmäßigkeiten, die sich empirisch für die Linienmultiplizitäten aufstellen lassen, zumal wenn sie so durchgreifender und einfacher Art sind wie die hier vorliegenden. Es ist die Absicht des folgenden, einige schon bekannte dahin gehörende Gesetze weiter auszuführen und einige neue zu begründen. Insbesondere sei schon hier auf den an letzter Stelle behandelten „magnetooptischen Zerlegungssatz" hingewiesen, der

eine Harmonie ganzzahliger Verhältnisse enthüllt von einer Reinheit, die auch den durch die moderne Quantentheorie Verwöhnten überraschen wird. Die praktische Bedeutung der vielfachen Linien für die Einordnung der spektroskopischen Beobachtungen in Serien ist bekannt (Gesetz der konstanten Schwingungsdifferenzen usw.). Die theoretische Bedeutung der Linienstrukturen für die modellmäßige Erforschung der Atome wird zweifellos nicht geringer sein. Unserem magnetooptischen Zerlegungssatz dürfen wir außer einer theoretischen auch eine praktische Wichtigkeit für die Deutung und Ordnung der komplizierten Zeemaneffekte zusprechen.

Eine allgemeine Bemerkung, welche dem spektroskopischen Fachmanne nichts Neues sagt, ist für alles folgende im Auge zu behalten: Das Ziel der Spektroskopie ist nicht so sehr die Kenntnis der Linien (Energiedifferenzen), sondern die Kenntnis der Terme (der Energiestufen selbst), in die sich die Schwingungszahlen der Linien nach dem Kombinationsprinzip zerlegen lassen. Diese charakterisieren die Atomzustände und sind die Träger der weiterhin zu betrachtenden Gesetzmäßigkeiten. Wir ordnen die Terme in die Reihe s-, p-, d-, b-Term, d. h. Term der „scharfen" Nebenserie, der Haupt- oder „Prinzipal"-Serie, der „diffusen" Nebenserie und der „Bergmann"-Serie. Jeder Term ist einer theoretisch unbegrenzten Menge von Werten fähig, die folgendermaßen numeriert werden:

$$\begin{array}{cccc} 2p, & 3p, & 4p, & 5p, \quad \ldots \\ & 3d, & 4d, & 5d, \quad \ldots \\ & & 4b, & 5b, \quad \ldots \end{array}$$

Nur beim s-Term geschieht die Numerierung (wie wir sehen werden mit gutem Grunde) nicht ganzzahlig, sondern halbzahlig: $1{,}5\,s,\ 2{,}5\,s,\ 3{,}5\,s \ldots$

Schreibt man allgemein mp, md, ... oder ausführlicher (m, p), (m, d) bzw. $(m + \frac{1}{2} \ldots s)$, so heißt m die Laufzahl. Wir fassen sie auf als die Summe einer „azimutalen Quantenzahl" n und einer „radialen Quantenzahl" n'. Nach einer früher begründeten Hypothese[1]) hat dabei die azimutale Quantenzahl n in der Reihe unserer vier

1) **München Akademie, November 1916, S. 159 oder mein Buch „Atombau und Spektrallinien", Braunschweig, Vieweg, 1919, Kap. IV, § 6, Kap. VI, § 3 und Zusatz 10.**

Terme die festen Werte 1, 2, 3, 4; die radiale Quantenzahl durchläuft innerhalb jeder Termart alle ganzzahligen Werte von 0 an. Eine einzelne Serie ist also bestimmt (außer durch die dabei festgehaltene Endbahn) durch die für alle Anfangsbahnen gleiche azimutale Quantenzahl n. Aus der Formel $m = n + n'$ und unserer Zuordnung der aufeinander folgenden Terme zu den Werten $n = 1, 2, 3, 4$ erkennt man, weshalb die vorstehende Aufzählung mit $2p$, $3d$, $4b$ und $1{,}5\,s$ (wie wir an Stelle von $1s$ schreiben) beginnt.

Wie ich ferner a. a. O. gezeigt habe, ergibt sich aus den eindeutigen Regeln der Quantentheorie als allgemeine Form der Terme (wir wählen zunächst den Fall der Hauptserie) die folgende

$$(m, p) = \frac{N}{(m + p + \pi(m, p) + \ldots)^2},$$

wo durch $+ \ldots$ angedeutet ist, daß hier streng genommen weitere Glieder von der Form

$$\pi' (m, p)^2 + \pi'' (m, p)^3 + \ldots$$

folgen würden. N ist die Rydberg-Frequenz. Die p, π, ... sind Konstanten des Atomfeldes und der Serie und sind demgemäß von der radialen Quantenzahl n' und daher auch von der Laufzahl m unabhängig. Sie sind im Falle des s-, d- oder b-Termes zu ersetzen durch $s\,\sigma \ldots$, $d\,\delta \ldots$, $b\,\beta \ldots$, überdies ist im Falle des s-Termes m zu ersetzen durch $m + \frac{1}{2}$. Man wird auf diese Weise im wesentlichen (d. h. abgesehen von den Zusatzgliedern $+ \ldots$) von der Quantentheorie aus auf die Ritzsche Termdarstellung geführt. Daß durch unsere Erweiterung der Ritzschen Form die Seriendarstellung merklich verbessert wird in Fällen, wo die Ritzsche Form versagt, und daß gerade unsere Art der Erweiterung sachgemäß ist, zeigt E. Fues in seiner später (unter III) zu besprechenden Dissertation.

Dies gilt für den Fall neutraler Atome, wo also das äußere Elektron sich im Felde eines einfach geladenen Atomrestes bewegt (Bogen- oder Flammenspektren). Bei einem ionisierten Atom, wo nach vorheriger Abtrennung eines Elektrons das nunmehr äußerste Elektron von einem zweifach geladenen Atomreste angezogen wird (Funkenspektren), lautet die Termdarstellung:

$$(m, p^*) = \frac{4N}{(m + p^* + \pi^*(m, p^*) + \ldots)^2};$$

p^*, π^*, ... sind Konstanten des durch die Ionisierung abgeänderten Atomfeldes; für den Übergang zum s-, d-, b-Term gilt das Gleiche wie oben.

Bei Systemen von Dublett- oder Triplettlinien sind die Atomkonstanten $p\,\pi$, ... je zweier oder dreier Werte fähig. Wir schreiben in diesem Falle statt p, π, (m, p), ...:

$$p_i,\ \pi_i,\ (m, p_i),\ \ldots \begin{cases} i = 1, 2 & \text{für Dublettsysteme,} \\ i = 1, 2, 3 & \text{für Triplettsysteme.} \end{cases}$$

Von der größeren oder geringeren Verschiedenheit der Konstanten p_i, ... hängt die größere oder geringere Trennung der entstehenden Liniengebilde ab.

I. Die Permanenz der Multiplizitäten.

Daß bei verwandten Elementen die Linienstruktur qualitativ übereinstimmt, ist allgemein bekannt. So sind nicht nur sämtliche Alkalien durch Dublettsysteme von Serien charakterisiert, sondern ebenso die ihnen entfernter verwandten einwertigen Elemente Cu, Ag. Die Erdalkalien sind in erster Linie durch Triplettsysteme ausgezeichnet, ebenso die ihnen entfernter verwandten Elemente Zn, Cd, Hg. Daneben zeigen diese Elemente Serien von Einfachtermen, zu denen insbesondere die natürliche oder Grundbahn des Atoms (der Term 1,5 s, der in der Resonanzlinie und der Hauptabsorptionslinie vorkommt) gehört. Man kann vermuten, daß auch die Triplettsysteme von O, S und Se mit Einfachliniensystemen assoziiert auftreten, die allerdings bei S und Se noch nicht bekannt sind; bei O könnten nach freundlicher Mitteilung Paschens die von Runge und Paschen als Dubletts beschriebenen aber nur einfach gemessenen Serien aus Einfachlinien mit je einem Begleiter bestehen, mit dem sie jedoch (nach Ausweis ihres Zeemaneffektes) kein eigentliches Dublett bilden. Schließlich zeigen die Edelgase und Triaden (die Elemente der zusammengehörigen 0. und 8. Gruppe des periodischen Systems), eine gemeinsame kompliziertere Linienstruktur, die sich bisher nicht durch einfache Gesetze beschreiben läßt, ebenso wie bisher die Serieneinordnung dieser Elemente nicht gelungen ist außer bei Neon und Helium.

Mit dem in der Überschrift genannten „Permanenzgesetz

der Multiplizitäten" wollen wir aber nicht nur die Erhaltung der Struktur innerhalb einer Vertikalreihe des periodischen Systems bezeichnen. Vielmehr wollen wir mit diesem Namen vor allem auf folgende, bisher wenig beachtete Tatsache hinweisen: *Wenn der p-Term doppelt oder dreifach ist, so ist es auch der d-Term.* Nur der *s*-Term ist nach allgemeiner spektroskopischer Erfahrung *einfach*, nicht nur bei Einfachliniensystemen, sondern auch bei sonst doppelter oder dreifacher Linienstruktur.

Die übereinstimmende Struktur von *p*- und *d*-Term findet ihren prägnanten Ausdruck in der von Rydberg formulierten Tatsache der *vollständigen Dubletts und Tripletts* in der diffusen Nebenserie, d. h. bei der Kombination des *p*- und *d*-Termes nach der Formel

(1) $$\nu = 2p_i - m\,d_j.$$

Daß man bei diesen Gebilden einzelne Komponenten als Linien, andere als Satelliten bezeichnet, ist offenbar nicht sachgemäß. In Wirklichkeit handelt es sich bei den vollständigen Dubletts um 3 Linien (gedanklich s. u. um 4), die zusammengehören und aus der Kombination zweier Dublettterme entstehen; ebenso bei den vollständigen Tripletts um 6 Linien (gedanklich um 9), die sich aus der Kombination zweier Tripletterme ergeben. Dagegen hat man niemals die Kombination eines Dublett-*p*-Terms mit einem Triplett-*d*-Term beobachtet oder umgekehrt. Die durchgehende Struktur dieser Gebilde zeigt also durchweg gleiche Multiplizität im *p*- und *d*-Term an. (Anders natürlich bei Wasserstoff, wo sich in der theoretischen Feinstruktur von

$$H_\alpha,\ H_\beta,\ \ldots$$

ein Dublett der Reihe nach mit einem Triplett, Quartett .. paart; auch hierin zeigt sich die Wesensverschiedenheit der Wasserstoff-Feinstrukturen von den sonstigen Linienmultiplizitäten, vgl. oben S. 221). Daß man bei Na und K die vollständigen Dubletts der diffusen Nebenserie nur unvollständig (mit zwei Linien) beobachtet hat, ist natürlich kein Einwand. Der *d*-Term ist weniger getrennt wie der *p*-Term (vgl. unten bei Cs) und wird in der Reihe der Alkalien erst bei Rb andeutungsweise aufgelöst. Ebenso erscheint das vollständige Triplett von Mg als einfaches Triplett, um erst bei den schwereren Elementen, insbesondere bei Hg, seine wahre Struktur zu zeigen.

Zur Veranschaulichung geben wir hier die Linien $2p_i - 3d_j$ für Cs und Cd wieder in der Skala der ν, jedoch bei Cd der Deutlichkeit wegen nicht maßstäblich. Die beigeschriebenen $\Delta\nu$ zeigen den Ursprung der Komponentenabstände aus dem p- oder d-Term an. Die sogenannten „Satelliten" sind schwach, die „Linien" stark gezeichnet. Wesentlich für unsere Auffassung[1]) ist die Ergänzung des Liniengebildes durch die punktierten (nicht beobachteten) Linien.

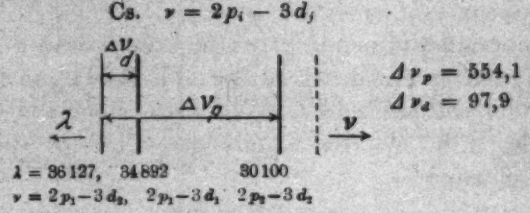


Fig. 1.

Bei dem (im Ultraroten gelegenen) Cs-Dublett der diffusen Nebenserie (Fig. 1) beträgt der aus der Duplizität des p-Terms hervorgehende Dublettabstand

$$\Delta\nu_p = 2p_1 - 2p_2 = 554{,}1 \text{ cm}^{-1};$$

derselbe Wert ist aus der Hauptserie und den Grenzen der beiden Nebenserien her bekannt. Nach einer allgemein gültigen Regel (vgl. Nr. II) findet er sich hier nicht zwischen den beiden Hauptlinien, sondern zwischen dem Satelliten und der entfernteren Hauptlinie. Der Abstand zwischen dem Satelliten und der benachbarten Hauptlinie ist gleich dem aus der Duplizität des d-Terms hervorgehenden Dublett

$$\Delta\nu_d = 3d_1 - 3d_2 = 97{,}9 \text{ cm}^{-1}.$$

Indem wir die punktierte, nicht beobachtete Linie rechts hinzufügen, tritt zwischen dieser und den beiden Hauptlinien der Abstand $\Delta\nu_p$ und $\Delta\nu_d$ zum zweiten Male auf.

Numerieren wir mit Paschen beide Terme nach der Größe ihrer Schwingungszahl, so daß

$$(m,\ p_2) > (m,\ p_1),\ (m,\ d_2) > (m,\ d_1)$$

(die Intensität geht im umgekehrten Sinne), so entsprechen den vier Linien in der Reihe von links nach rechts die darunter geschriebenen Symbole $2p_1 - 3d_2$ usw. Man sieht also, daß

1) Diese Auffassung ist bereits angedeutet in Ann. d. Phys. 51. S. 79. 1916. Fig. 7.

die Bedingung für das Vorhandensein der Linien[1]) in der Bezeichnungsweise der Gleichung (1) lautet

$$j \geqq i. \tag{2}$$

Die punktierte Linie würde die Schwingungszahl haben

$$\nu = 2p_2 - 3d_1.$$

Ähnlich Fig. 2, welche das vollständige Triplett der diffusen Nebenserie von Cd[2]) darstellt: die drei Hauptlinien sind

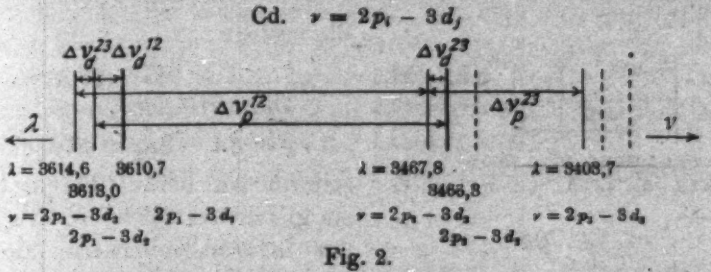


Fig. 2.

auf der Seite der größeren Wellenlängen von 2,1 oder 0 Satelliten begleitet. Die aus der dreifachen Natur des p-Terms hervorgehenden Abstände betragen

$$\Delta\nu_p^{12} = 2p_2 - 2p_1 = 1171 \text{ cm}^{-1},$$
$$\Delta\nu_p^{23} = 2p_3 - 2p_2 = 542 \text{ cm}^{-1},$$

die aus der dreifachen Natur des d-Terms entspringenden Abstände sind

$$\Delta\nu_d^{12} = 3d_2 - 3d_1 = 18 \text{ cm}^{-1},$$
$$\Delta\nu_d^{23} = 3d_3 - 3d_2 = 12 \text{ cm}^{-1}.$$

Nach Hinzufügung der punktierten Linien tritt jeder dieser Abstände dreimal auf; in der Figur sind nur die Abstände zwischen den realen Linien eingetragen, also z. B. der Abstand $\Delta\nu_p^{12}$ zwischen der zweiten Hauptlinie und dem ersten Satelliten der ersten Hauptlinie usw. Die unter der Figur angedeutete Termbezeichnung läßt erkennen, daß die realen Linien auch hier durch die Bedingung (2) gegeben sind; die in der Formel (1) überdies enthaltenen, der Bedingung (2) widersprechenden Linien sind unsere punktierten Komponenten.

1) Wie bei Popow, Ann. d. Phys. 45. S. 151. 1914.

2) Wir wählen Cd statt des besser aufzulösenden Hg, weil bei Hg die Komponentenfolge im d-Triplett eine unnormale ist. Während sonst $\Delta\nu_d^{12} > \Delta\nu_d^{23}$ (ebenso wie $\Delta\nu_p^{12} > \Delta\nu_p^{23}$), ist bei Hg umgekehrt $\Delta\nu_d^{12} < \Delta\nu_d^{23}$.

Sollte die hiermit festgestellte Permanenz der Multiplizitäten sich nicht auch auf den b-Term erstrecken? Eine Beobachtung von K. W. Meissner[1]) bei Cäsium, die wir in Fig. 3 wiedergeben, scheint diese Vermutung auf den ersten Blick zu bestätigen und wurde von Meißner in der Tat als Beweis für die doppelte Natur des b-Terms bei Cs angesehen.

Die obere Zeile von Fig. 3 bedeutet die Liniengruppe

$$\nu = 3d_i - 5b,$$

die untere

$$\nu = 3d_i - 6b.$$

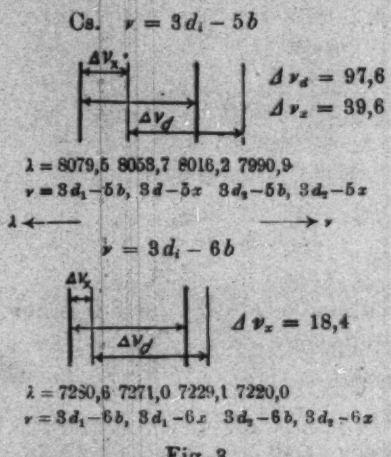


Fig. 3.

Die Differenz

$$\Delta\nu_d = 3d_1 - 3d_2 = 97{,}6\ \text{cm}^{-1}$$

stimmt für beide überein und ist gleich der Differenz $\Delta\nu_d$ in der diffusen Nebenserie, Fig. 1. Die außerdem auftretende kleinere Schwingungsdifferenz (wir nennen sie $\Delta\nu_x$, vermeiden also die Bezeichnung $\Delta\nu_b$, die durch die Meißnersche Auffassung nahegelegt wäre) ist für die zweite Linie kleiner als für die erste. Die vorangehende Bergmannlinie $\nu = 3d_i - 4b$ wurde nur in ihren beiden Hauptlinien aufgenommen; das Dublett $\Delta\nu_x$ würde für diese Liniengruppe entsprechend größer und daher nicht viel kleiner als das Dublett $\Delta\nu_d$ sein müssen.

Dies ist der eine Punkt, welcher an den Meißnerschen Messungen auffällt: Die Abnahme von $\Delta\nu_p = 554$ zu $\Delta\nu_d = 98$ setzt sich nicht in dem erwarteten Maße auf $\Delta\nu_x$ fort. Der andere Punkt betrifft die Intensitätsverteilung auf die Liniengruppen. Wir erwarten nach Analogie mit Fig. 1 die kurzwelligste Linie als zu punktierende (Intensität Null), die langwelligste als Satelliten (Intensität klein). Nach Ausweis der Fig. 3 trifft beides nicht zu. Infolgedessen können wir uns der Meißnerschen Deutung der beiden schwächeren Linien nicht anschließen, fassen diese vielmehr (im Anschluß an eine briefliche Mitteilung von Hrn. Paschen) folgendermaßen auf: In der Reihe der Serienterme s, p, d, b sind weitere

1) K. W. Meißner, Ann. d. Phys. 50. S. 724. 1916

Terme x, y, ... vorherzusehen, welche zu den azimutalen Quantenzahlen 5, 6, ... gehören, so wie s, p, d, b zu den Quantenzahlen 1, 2, 3, 4. Die höheren Termtypen werden in zunehmendem Maße wasserstoff-ähnlich (auch der b-Term ist es schon weitgehend); das will sagen, daß in der Darstellung

$$(3) \qquad 5x = \frac{N}{(5+x)^2}, \quad 6x = \frac{N}{(6+x)^2}, \quad \ldots$$

die Atomfeldkonstante x eine, zumal gegen die großen Zahlen 5 und 6 sehr kleine Größe bedeutet. Nehmen wir näherungsweise x direkt gleich Null, so werden die x-Terme mit den Balmertermen identisch. In der Tat sind Terme $N/5^2$ und $N/6^2$ nach der Zusammenstellung von Dunz schon früher bei Cs und den übrigen Alkalien beobachtet worden.

Wir deuten nun die schwachen Begleiter in den Meißnerschen Beobachtungen als

$$\nu = 3d_i - 5x \quad \text{bzw.} \quad \nu = 3d_i - 6x$$

und erhalten als Abstand von den starken Bergmannlinien

$$\nu = 3d_i - 5b \quad \text{bzw.} \quad \nu = 3d_i - 6b,$$

indem wir für $5x$ und $6x$ statt der Formel (3) näherungsweise reine Balmerterme verwenden:

$$\Delta\nu_x = 5b - 5x = 4441 - 4387 = 54 > 0 \quad (m = 5) \quad \text{bzw.}$$
$$\Delta\nu_x = 6b - 6x = 3077 - 3046 = 31 > 0 \quad (m = 6).$$

Hieraus erkennt man: 1. Die fraglichen Begleiter haben diejenige Lage zu den Hauptlinien (auf der violetten Seite), welche unserer Deutung entspricht. 2. Durch Wahl eines kleinen Wertes für x ($x = 10^{-2}$ statt $x = 0$) kann man die Abstände $\Delta\nu_x$ auch zahlenmäßig den beobachteten Werten (39,6 bzw. 18,4, vgl. die Figur) anpassen. Für unsere Deutung spricht außerdem die Tatsache, daß die fraglichen Begleiter bei der Bergmannlinie $\nu = 3d_i - 4b$ nicht gefunden sind, entsprechend dem Umstande, daß der x-Term zur azimutalen Quantenzahl 5 gehört und daher erst von $m = 5$ ab zu numerieren ist. Allerdings widerspricht die Kombination eines d-Terms mit einem x-Term, Übergang von $5 \longrightarrow 3$, dem Auswahlprinzip (vgl. Nr. II). Daraus folgt aber nur, daß diese Kombination im allgemeinen mit schwacher Intensität auftreten wird und besonderer Anregungsbedingungen bedarf (bei Meißner Luftbogen; im Vakuumbogen wurde sie nicht beobachtet).

Viel günstiger als bei Cs liegen die Verhältnisse für den

Nachweis der Duplizität des Bergmanntermes bei den Funkenlinien des Bariums (wegen der etwa vervierfachten Schwingungsdifferenzen der Funkenlinien gegenüber den Bogenlinien, vgl. Nr. III). In der Tat mißt Popow a. a. O. bei Ba ein vollständiges Dublett von normalen Intensitätsverhältnissen der drei Komponenten, dem er die Formel $\nu = 3d_i - 4b_j$ gibt. Da indessen der hieraus abgeleitete Abstand $\Delta\nu_a$ nicht mit dem von Randall-Lorenser bei den Ba-Funkenlinien angenommenen Werte übereinstimmt, ist auch die Deutung dieses Dubletts nicht sicher.

Wir kommen also zu dem Schluß, daß die Duplizität bzw Triplizität des Bergmanntermes bisher nicht festgestellt ist.

II. Das Auswahlprinzip und sein Einfluß auf die Linienstrukturen.

Als Auswahlsprinzip bezeichnen wir nach Rubinowicz die Regel, daß die azimutale Quantenzahl bei feldfreien Konfigurationsänderungen des Atoms nur um die Zahlen

$$-1,\ +1 \text{ oder } 0$$

springen kann. Von den hiernach möglichen Übergängen

$$n \to n-1,\quad n \to n+1,\quad n \to n$$

wird der erste bevorzugt, tritt also mit der größten Intensität auf, wie des Näheren durch das über Rubinowicz hinausgehende Bohrsche Analogieprinzip bewiesen wird.

Kossel und ich haben gezeigt[1]), wie man aus dem Auswahlprinzip auf die häufigsten und stärksten Kombinationen der Serienterme schließen kann. Nach der S. 228 genannten Zuordnung der Serienterme

$$s \quad p \quad d \quad b$$

zu den azimutalen Quantenzahlen

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

entspricht die Hauptserie, die diffuse Nebenserie und die Bergmannserie dem Übergange $n \to n-1$, die scharfe Nebenserie dem Übergange $n \to n+1$. Auch Übergänge $n \to n$ kommen (z. B. bei der sogenannten dritten Nebenserie) vor.

Das Auswahlprinzip bewirkt hiernach eine wesentliche Einschränkung und Ergänzung des sonst uferlosen Kombinationsprinzipes. Es liegt ganz im Sinne des Auswahlprinzipes,

1) K. Kossel u. A. Sommerfeld, Verh. d. Deutschen Phys. Ges. S. 240. 1919.

daß es Stark[1]) gelungen ist, durch Anwendung intensiver elektrischer Felder auch Übergänge der Form $n \to n-2$ (Kombination von d-Term und s-Term) sowie weitere Übergänge $n \to n$ zu erzwingen.

Die Struktur der vollständigen Dubletts und Tripletts legt es nahe, anzunehmen, daß auch bei diesen eine Art Auswahlprinzip wirksam ist. Freilich kann es nicht die azimutale Quantenzahl sein, welche hierbei wirksam ist. Die azimutale Quantenzahl ist dem Drehimpuls des Gesamtatoms zugeordnet, sozusagen seiner äußeren Rotation; sie hat nach unserer Deutung der Serien für alle Terme d_i den Wert 3, für alle Terme p_i den Wert 2. Dem Auswahlprinzip ist also Genüge geschehen bei jedem Übergang eines d-Termes in einen p-Term. Das unterscheidende Merkmal der verschiedenen d- und p-Terme muß vielmehr eine innere Quantenzahl sein, etwa entsprechend einer verborgenen Rotation. Ihre geometrische Bedeutung kennen wir ebensowenig, wie wir die Bahnunterschiede kennen, die den Multiplizitäten der Serienterme zugrunde liegen.

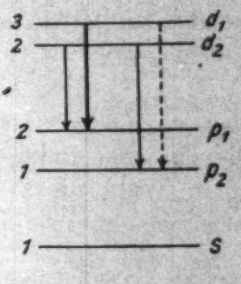


Fig. 4a.

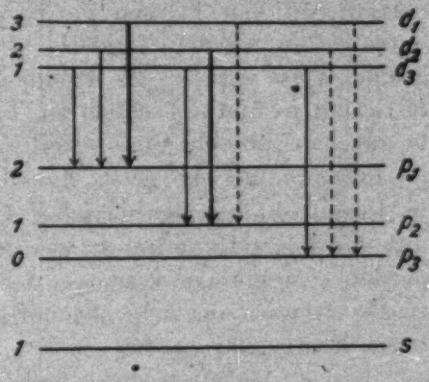


Fig. 4b.

Zum Schema der vollständigen Dubletts (Fig. 4a) gelangen wir, wenn wir die beiden p-Terme durch die Werte 1, 2, die beiden d-Terme durch die Werte 2, 3 dieser verborgenen Quantenzahl unterscheiden. Übertragen wir unser Auswahlprinzip von der äußeren auf die innere Quantenzahl (die Berechtigung hierzu kann man natürlich anzweifeln), so ergeben sich die Haupt-

1) J. Stark, Ann. d. Phys. **56**. S. 577. 1918.

linien (Übergänge $3 \to 2$ und $2 \to 1$) sowie der Satellit ($2 \to 2$) im richtigen Sinne ihrer Intensitäten und ihrer gegenseitigen Lage; zugleich wird das Auftreten der vierten Linie ($3 \to 1$ in der Figur punktiert) von dem Auswahlprinzip verboten.

Dasselbe erreichen wir für das vollständige Triplett (Fig. 4b), wenn wir hier etwa den drei p-Termen die Quantenwerte 0, 1, 2, den drei d-Termen 1, 2, 3 zuordnen. Dann gibt es drei Hauptlinien ($3 \to 2$, $2 \to 1$, $1 \to 0$, drei Satelliten ($2 \to 2$, $1 \to 2$, $1 \to 1$) und drei verbotene Linien ($3 \to 1$, $2 \to 0$, $3 \to 0$), abermals in richtiger Lage und Intensitätsabstufung. Offenbar sind beim Dublett sowohl wie beim Triplett die Werte der Quantenzahlen nicht absolut festgelegt, sondern nur in ihren Unterschieden je um eine Einheit. Z. B. könnte man beim vollständigen Triplett die drei untersten Stufen auch mit 1, 2, 3, die drei obersten mit 2, 3, 4 numerieren.

Eine gewisse Bestätigung für die in Fig. 4b getroffene Auswahl der inneren Quantenzahlen wird sich in V. § 3 ergeben. Dort zeigt sich, daß die Terme d_1, d_2 in der Kombination mit den Termen p_1, p_2 auf die Zahl der Zeemannkomponenten bei den Triplett- und Dublettsystemen in ganz gleicher Weise wirken. Es scheint daher berechtigt, den gleichindizierten p- und d-Termen der Triplett- und Dublettsysteme die gleichen inneren Quantenzahlen beizulegen, wie wir es in den Figg. 4a und 4b getan haben.

Bezüglich der gegenseitigen Lage der d- und p-Niveaus muß an folgendes erinnert werden. Die zu jeder Bahn gehörende Energie ist vermöge der üblichen Wahl des Nullniveaus *negativ*; aus dem zugehörigen Term berechnet sie sich durch Multiplikation mit $-h$. Wenn wir also festsetzten $p_2 > p_1$, so bedeutet dies, daß das Energieniveau von p_2 *unterhalb* von p_1 liegen muß. Ebenso bedeutet der im allgemeinen kleinere numerische Betrag der d-Terme gegenüber den p-Termen, daß die Energiestufen der d_i über denen der p_i liegen und zwar d_1 höher als d_2. Das s-Niveau, welches in der Figur ebenfalls angedeutet ist (es entspricht dem K-Ringe der Röntgenspektren), liegt offenbar am tiefsten (Kernnächsten).

Wollen wir auch dem s-Term eine „innere" Quantenzahl zuschreiben, so tun wir das unter dem Gesichtspunkte, daß

bei Anwendung derselben formalen Übergangsregeln wie oben die Komponenten der Hauptseriendubletts und -tripletts in der richtigen Intensitätsfolge herauskommen sollen. Wir haben daraufhin im Dublett ebenso wie im Triplettfalle dem s-Term die innere Quantenzahl 1 beizulegen. Beidemal wird dann der Übergang $p_1 s$ $(2 \to 1)$ stärker als $p_2 s$ $(1 \to 1)$; dies bedeutet z. B. „D_2 stärker als D_1", wie es sein soll; im Triplettfalle kommt als dritter Übergang von nicht verschwindender Intensität $p_3 s$ $(0 \to 1)$ hinzu. Übrigens bemerke man, daß für jeden Term der Höchstwert der inneren Quantenzahl (3, 2, 1) mit dem Werte der äußeren azimutalen Quantenzahl des betreffenden Termes übereinstimmt.

Wir wissen, daß bei kondensierten Entladungen (starken elektrischen Feldern) das Auswahlprinzip durchbrochen wird; vgl. die oben zitierte Arbeit von Stark und besonders die Aufnahme von He_+ $\lambda = 4686$ bei Paschen[1]), in der nicht nur die sonst ausfallenden Linien erscheinen, sondern auch die Intensitäten den „a priori zu erwartenden" Verhältnissen sich nähern. Sollte nicht auch bei den vollständigen Dubletts und Tripletts etwas ähnliches auftreten? Wir erwarten auch hier bei Kondensatorentladungen ein Sichtbarwerden der sonst ausfallenden Linien, allgemeiner gesprochen eine Abänderung der Intensitätsverteilung über das Liniengebilde. Die „vollständigen" Dubletts und Tripletts[2]) würden dann übergehen in „vervollständigte" Dubletts und Tripletts von 4 bzw. 9 Komponenten.

Möglicherweise liegt bei gewissen Triplettlinien des Kupfers, welche Rydberg[3]) in Beobachtungen von Kayser und Runge aufgefunden hat, bereits ein derartiger Fall vor. Hier treten drei einander zugeordnete Tripletts auf, von denen im ganzen nur *eine* Linie fehlt (nicht wie bei den vollständigen Tripletts deren *drei*), im ganzen also $3 + 3 + 2$ Linien (gegen $3 + 2 + 1$

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. 50. S. 901. 1916. Fig. 2. Wegen der theoretischen Deutung vgl. mein oben zitiertes Buch, Kap. V, § 4, S. 352 und Kap. VI, § 3, S. 406 der 1. Auflage.

2) Sollte man statt „vollständige Dubletts und Tripletts" lieber „Verbunddubletts und -tripletts" sagen? Dies wäre richtiger als der Name „vollständige Dubletts" usw. und bezeichnender als der auch von Rydberg benutzte Name „zusammengesetzte Dubletts", der die organische Verbindung der beiden Multiplizitäten nicht zum Ausdruck bringt.

3) A. Rydberg, Astrophys. Journ. 6. S. 239. 1897.

bei den vollständigen Tripletts). Rydberg nennt dies „a connection which J have never observed before" und findet Andeutungen ähnlicher Gruppen auch in anderen Teilen des Cu-Spektrums. Aber einerseits ist die Serieneinordnung dieser Cu-Linien nicht gelungen, andererseits ist ihre Anregung nicht definiert, so daß man nicht sagen kann, daß es sich hier um durch äußeren Zwang „vervollständigte" Tripletts handelt. Beim Cäsium, bei dem nach Fig. 1 b ein Doppeldublett von vier Komponenten vorzukommen schien, haben wir es nach S. 228 jedenfalls nicht mit einem „vervollständigten" Dublett zu tun.

Bisher ist also kein sicherer Fall des von uns erwarteten Vorkommnisses bekannt.

Es ist aber der Mühe wert, danach planmäßig zu suchen. Erst eine solche experimentelle „Vervollständigung" der vollständigen Dubletts und Tripletts würde ihre Natur restlos aufklären. Möglich ist es allerdings, daß unsere „inneren" Quantenzahlen nicht in demselben Maße auf äußere Felder reagieren, wie die „äußeren" Quantenzahlen, daß also das ihren Ausfall bedingende Auswahlprinzip nicht ebenso leicht umgangen werden kann wie in den oben genannten Fällen.

Ich möchte nicht unterlassen hervorzuheben, daß wir bei der Übertragung unseres Auswahlprinzips auf die „inneren" Quantenzahlen und bei der Wahl der letzteren ziemlich formal vorgegangen sind. Physikalische Tatsache ist das Ausfallen gewisser Termkombinationen; daß der Grund davon in Quantenbedingungen zu suchen ist, scheint mir sicher. Die Annahme aber, daß diese Quantenbedingungen dieselbe Form haben, wie bei den äußeren azimutalen Quantenzahlen, ist einigermaßen willkürlich. Infolgedessen ist auch unsere Verfügung über die inneren Quantenzahlen nicht bindend.

III. Der spektroskopische Verschiebungssatz.

Bohr hat die Funkenlinien allgemein dem ionisierten Atom zugeordnet und konnte, insbesondere in dem typischen Falle von He_+ zeigen, daß alsdann in der Termdarstellung die Rydbergsche Zahl N durch $4N$ zu ersetzen ist. Die auf beliebige Elemente verallgemeinerte Termform ist am Schlusse der Einleitung mitgeteilt. Kossel und ich haben daraufhin den Satz aufgestellt[1]) und empirisch begründet, daß das Funken-

1) A. Kossel u. A. Sommerfeld, Verh. d. D. Phys. Ges. S. 240. 1919.

spektrum eines Elementes (in dem S. 223 umschriebenen Gebrauch des Wortes) dieselbe Linienstruktur hat wie das Bogenspektrum des im periodischen System vorhergehenden Elementes, daß es also aus Dubletts, Tripletts oder sogenannten serienlosen Linien besteht, je nachdem das Bogenspektrum des vorhergehenden Elementes aus Dubletts aufgebaut ist oder aus Tripletts oder aus Linienfolgen (Sequenzen) allgemeiner Art. Wir nannten diesen Satz *Verschiebungssatz*, um damit an ein ähnliches Vorkommnis in den radioaktiven Reihen zu erinnern.

Der modellmäßige Sinn unseres Satzes liegt auf der Hand. Jede Vertikalreihe des periodischen Systems ist, allgemein gesprochen, durch eine gewisse Valenz oder im Modell durch eine gewisse Zahl äußerer Elektronen gekennzeichnet. Andererseits ist, wie wir aus I. wissen, der Liniencharakter der Spektren (Multiplizität der Terme) in jeder Vertikalreihe der gleiche. Man kann es also als empirisch gesichert ansehen, daß der Liniencharakter jedes Elementes von der Anzahl seiner äußeren Elektronen bestimmt wird. Wird nun dem Atom durch Ionisierung ein äußeres Elektron entzogen, so rückt es, seinem äußeren Verhalten und seinem Liniencharakter nach, in die vorangehende Vertikalreihe ein.

Unser Satz bedarf indessen einer Verschärfung. Der Vergleich mit dem im periodischen System vorangehenden Element ist nur dann gegeben, wenn man sicher ist, daß die Zahl der äußeren Elektronen in der betreffenden Gegend des periodischen Systems wirklich je um eine Einheit regelmäßig fortschreitet. Das ist aber nur der Fall bei den ausgesprochen elektropositiven oder elektronegativen Elementen am Anfange und Ende der verschiedenen Perioden. Bei den Triaden und den seltenen Erden ist es auf Grund ihrer geringen chemischen Differenzen wahrscheinlich, daß das beim Fortschreiten im periodischen System hinzukommende Elektron nicht an der Peripherie, sondern mehr im Innern angelagert wird. Allgemein nimmt R. Ladenburg[1]) an, daß in den Niederungen der Kurve der Atomvolumina, wo die Minimalvalenz konstant gleich 2 oder 3 ist, die Anzahl der eigentlichen Valenzelektronen, d. h. der äußersten Elektronen des Atoms den gleichen konstanten Wert habe, daß dagegen die höheren Valenzen durch

1) R. Ladenburg, Naturwissenschaften 1920, H. 1, S. 5.

die Elektronen einer „Zwischenschale" betätigt werden. In solchen Fällen müßte man beim Vergleich von Funkenspektrum und Bogenspektrum[1]) sinngemäß um mehrere Schritte im periodischen System rückwärts gehen, bis zu demjenigen Elemente, bei dem die Normalzahl der äußeren Elektronen tatsächlich um *1* kleiner geworden ist.

Zur Begründung des Verschiebungssatzes wiesen wir auf die qualitative Ähnlichkeit zwischen den Grundspektren (Funkenspektren) der Alkalien mit den Bogenspektren der Edelgase, namentlich aber auf den Dublettcharakter bei den Funkenspektren der Erdalkalien hin, der dem Dublettcharakter in den Bogenspektren der Alkalien entspricht. Im letzteren Falle ließ sich der Beweis quantitativ führen. Die Dubletts der Erdalkalien bilden nämlich Serien, deren Darstellung deutlich auf 4N an Stelle von N hinweist; vgl. die Dissertation von Lorenser und die von uns a. a. O. derselben entnommenen Daten. Übrigens läßt sich das früher angeführte Beobachtungsmaterial noch nach zwei Richtungen vervollständigen, einmal durch die Dubletts der Ra-Linien, die sich stetig an die Dubletts von Mg, Ca, Sr, Ba anschließen und die bekanntlich von Runge und Precht[2]) dazu benutzt wurden, um das Atomgewicht von Ra zu extrapolieren, sodann durch die Funkendubletts von Zn und Cd, die zu Cu und Ag in demselben Verhältnis stehen wie die Erdalkalien zu den Alkalien und in ihrer Seriendarstellung ebenfalls Terme vom Zähler 4N erfordern. Inzwischen ist die Seriendarstellung der Erdalkali-Funkenspektren verschärft durch E. Fues.[3]) Indem der Termzähler genau gleich 4N gesetzt wird, läßt sich der Termnenner aus den Messungen ermitteln. *Dabei hat sich ein weiterer gesetzmäßiger Zusammenhang zwischen den Erdalkali-Funkenspektren und den Alkali-Bogenspektren bestätigt, der in der Arbeit von* Kossel *und mir allgemein vorausgesagt wurde*[4]):

1) Die von Kossel und mir angezogenen und als Funkenlinien gedeuteten vollständigen Tripletts von Sc und Y weisen auf 2 äußere Elektronen im ionisierten, also auf 3 im neutralen Zustande hin. Hr. Ladenburg hatte in seiner ursprünglichen Veröffentlichung für das neutrale Sc und Y die Zahlen 3 und 2 zur Auswahl gestellt, hält aber jetzt auch aus chemischen Gründen bei beiden die Zahl 3 für gegeben.

2) A. Runge u. A. Precht, Physikal. Zeitschr. 4. S. 285. 19 3.

3) Dissert. München 1919. Auszug in Ann. d. Phys. 63. S. 1. 1920.

4) a. a. O., S. 243.

„es sollte a^* für das einfach ionisierte Atom der Ordnungszahl Z gleich dem Doppelten von a für das neutrale Atom der Ordnungszahl $Z - 1$ sein, wenigstens bei Vernachlässigung der Rückwirkung" (a und a^* stehen hier zusammenfassend für die Atomfeldkonstanten $s\,p\,d\,b$ bzw. $s^*\,p^*\,d^*\,b^*$). Man ersieht dies aus der folgenden Tabelle, die ich der Fuesschen Dissertation entnehme. Darin sind die fraglichen Konstanten

Tabelle 1.

	s	p	d	b
Na	+ 0,15	+ 0,15	− 0,017	+ 0,001?
Mg_+	+ 0,43	+ 0,305	− 0,045	+ 0,0006
K	+ 0,325	+ 0,29	− 0,28	− 0,01
Ca_+	+ 0,70	+ 0,5 ± 0,15	− 0,63	− 0,025
Rb	+ 0,31	+ 0,36	− 0,345	− 0,018
Sr_+	+ 0,815	+ 0,61 ± 0,15	− 0,43	− 0,034
Cs	+ 0,45	+ 0,45	− 0,48	− 0,032
Ba_+	+ 0,93	+ 0,75 ± 0,15	− 0,36	− 0,064
—	—	—	—	—
Ra_+	+ 1,06 ± 0,15	+ 0,96 ± 0,15	− 0,22 ± 0,15	—

der ionisierten Erdalkalien Mg, Ca, Sr, Ba mit denen der unmittelbar vorangehenden Alkalien Na, K, Rb, Cs zusammengestellt. In der Tat sind hier die s^* etwa das Doppelte der s, besonders genau bei dem schwersten Elementenpaare (Cs, Ba), etwas größer bei (K, Ca und Rb, Sr) und etwa das Dreifache bei (Na, Mg). Ähnliches gilt von dem Verhältnis p^* zu p, wobei aber p^* recht unsicher ausfällt, da die Hauptserie des Dublettsystems nicht beobachtet ist und ihr Term nur aus den Grenzen der Nebenserien entnommen werden konnte. Hier liegt das Doppelte von p durchweg in den Unsicherheitsgrenzen des zugehörigen Wertes von p^*. (Ob wir dabei unter p den Wert p_1 oder p_2 der Atomfeldkonstanten verstehen, ist für unsere Zwecke belanglos.) Dagegen erleidet unsere Regel eine deutliche Ausnahme bei den d-Termen der schwersten Elemente, z. B. bei (Cs, Ba). Bei den b-Werten zeigt die Tabelle eine Ausnahme nur bei dem leichtesten Paare (Na, Mg), wobei aber der Wert von Na sehr unsicher ist (nur aus zwei Seriengliedern bestimmt!).

Der theoretische Grund für die hiernach weitgehend bestätigte Regel $a^* = 2a$ ist natürlich derselbe wie der für das Auftreten von 4N an Stelle von N, nämlich die doppelte Ladung

des Atomrestes beim ionisierten Atom, gegenüber der einfachen Ladung desselben beim neutralen.[1]) Unsere Regel und ihre theoretische Begründung gilt aber nur insoweit, als man von der Rückwirkung des äußeren Elektrons auf den Atomrest absieht und insoweit als man nur das erste Glied einer Kugelfunktionenentwicklung berücksichtigt. Sie beansprucht daher nur eine erste Näherung zu sein. In Anbetracht dessen ist die in der Fuesschen Tabelle enthaltene Bestätigung sehr befriedigend und läßt keinen Zweifel zu an dem gesetzmäßigen Zusammenhang zwischen den Atomfeldkonstanten der durch unseren Verschiebungssatz zusammengeordneten Elemente.

Von besonderem Interesse ist folgender Umstand. Für die mit ganzen Zahlen operierende Quantentheorie der Spektrallinien bildet die Laufzahl $m + \frac{1}{2}$ des s-Termes eine Schwierigkeit. Ich habe deshalb ursprünglich, als ich den p-, d- und b-Term den azimutalen Quantenzahlen 2, 3 und 4 zuordnete, nicht gewagt, den s-Term dieses Quantenschema einzuordnen. Erst die Verknüpfung des Auswahlprinzips mit den Termkombinationen veranlaßte mich, dem s-Term die Quantenzahl 1 zuzuschreiben, zugleich aber auch in Zweifel zu ziehen, ob die Schreibweise $m + \frac{1}{2}$ wirklich sachgemäß sei. Dieser Zweifel wird nun durch unsere Tabelle widerlegt. In ihr bedeutet nämlich s nicht die Abweichung des Termnenners von der Zahl m, sondern von $m + \frac{1}{2}$. Es zeigt sich also, daß die von dem Verschiebungssatz regulierte Atomfeldkonstante s die *Abweichung von der Halbzahligkeit, nicht von der Ganzzahligkeit des Termnenners* mißt und daß der Ansatz

$$m + \tfrac{1}{2} + s$$

jedenfalls bei den Alkalien und den ionisierten Erdalkalien naturgemäß ist.

Weitere Bestätigungen des Verschiebungssatzes werden sich zweifellos auch in den übrigen Reihen des periodischen Systems finden lassen. Bei Al hat Popow s. a. O. auf Grund Lymanscher Messungen und neuerdings Paschen Triplettsysteme nachgewiesen, die ihrem Ursprunge nach als Funkenspektren aufzufassen sind. Besonders beweiskräftig aber sind nach einer freundlichen brieflichen Mitteilung von Hrn.

1) Vgl. Zusatz 10 meines Buches „Atombau und Spektrallinien".

Paschen ganz neue Triplettypen eines Cl-Spektrums, welche sich auch quantitativ (durch den Termzähler 4N) als Funkenspektren ausweisen und welche mit den von Kayser und Runge gemessenen Triplettspektren des vorangehenden Elementes *S* in dem durch den Verschiebungssatz geforderten Zusammenhang stehen.

IV. Der Rydbergsche Wechselsatz.

Rydberg[1]) hat die Regel aufgestellt, daß die Elemente mit ungerader Valenz Dublettsysteme, die mit gerader Triplettsysteme von Serienlinien geben. Die Regel bewährt sich in den ersten Vertikalreihen des periodischen Systems vollkommen; wir müssen nur zwischen Bogen- und Funkenspektren unterscheiden und statt gerader oder ungerader Valenz sagen: gerade oder ungerade Elektronenzahl in dem jeweils vorliegenden Ionisierungszustande. So geben sämtliche Alkalien sowie die Elemente Cu, Ag im Bogen Dubletts (*ein* äußeres Elektron), ebenso die Erden von Al bis Tl (*drei* äußere Elektronen). Die Erdalkalien sowie die Elemente Zn, Cd, Hg zeigen im Bogen Triplettlinien und die mit ihnen verbundenen Einfachlinien (*zwei* äußere Elektronen). Dieselben Elemente zeigen im Funken Dublettlinien (*ein* äußeres Elektron). Von den Erden sind (vgl. den Schluß der vorigen Nr.) bei Al im Funken Tripletts nachgewiesen (*zwei* äußere Elektronen). Von den Funkenspektren der Alkalien (Grundspektren) war bereits in III. die Rede; sie haben aller Wahrscheinlichkeit nach den komplizierten Linienchararakter der Edelgase; die Anzahl der äußeren Elektronen ist hier jedenfalls gerade (0 oder 8 je nach der Zählung). Ob sich die „serienlosen" Spektren der Edelgase in Systeme von Triplett- und Einfachlinien werden auflösen lassen, wie es nach dem Wechselsatz zu vermuten wäre, ist noch unentschieden. In der vierten und fünften Vertikalreihe wird der Linienchararakter unsicher ebenso wie die Seriendarstellung versagt; aber in der sechsten Reihe führt unsere Regel wieder auf festen Boden bei O, S, Se. Diese Elemente zeigen Serien von Triplettlinien, die zweifellos Bogenlinien sind;

1) Vgl. z. B. die S. 233 zitierte Arbeit. Es ist wohl möglich, daß die hier von Rydberg als Verstöße gegen den Wechselsatz beschriebenen Cu-Tripletts, von denen schon S. 233 die Rede war, sich als Funkenlinien im Sinne der vorigen Nummer erklären lassen.

die Zahl der äußeren Elektronen ist bei ihnen jedenfalls gerade. Ein System von Triplettserien ist außerdem bei Mn beobachtet, welches nach Ausweis der Serienformel (N, nicht 4N) als Bogenspektrum anzusehen ist. Da Mn in der siebenten Reihe des periodischen Systems steht, bildet dieses Spektrum scheinbar eine Ausnahme von dem Wechselsatz und wurde auch schon von Rydberg als solche aufgefaßt. Die Maximalvalenz von Mn ist nämlich 7 und würde daher einer ungeraden Elektronenzahl entsprechen. Bemißt man aber mit Ladenburg (vgl. oben) die äußere Elektronenzahl nach der Minimalvalenz, die bei Mn und den benachbarten Elementen 2 beträgt, so verschwindet die Ausnahme; man kann dann die Triplettlinien von Mn in Parallele setzen zu den Triplettlinien der Erdalkalien. Eine schöne Bestätigung nicht nur unseres Verschiebungssatzes, sondern auch des Wechselsatzes liefert das am Schluß der vorigen Nummer genannte Triplettspektrum von Cl. Die Anzahl der äußeren Elektronen des neutralen Cl ist jedenfalls ungerade, die des ionisierten Cl also gerade. Der Triplettcharakter der Funkenlinien des ionisierten Cl entspricht also völlig unserem Wechselsatz. Es ist also wohl möglich, daß bei unserer abgeänderter Formulierung des Wechselsatzes, bei der die „Zahl der äußeren Elektronen im vorliegenden Ionisierungszustande" an die Stelle der schwankenden „Valenzzahl" tritt, dieser Satz allgemein aufrecht erhalten werden kann. Natürlich ist er einstweilen nur empirisch, nicht theoretisch zu begründen. Seine Allgemeingültigkeit wird aber einen wichtigen Fingerzeig für die künftige modellmäßige Erklärung der Linienstruktur und ihres Zusammenhanges mit dem peripheren Atombau abgeben.

V. Der magnetooptische Zerlegungssatz.

Das Kombinationsprinzip als allgemeinster Grundsatz der Bohrschen Theorie der Spektrallinien muß sich auch auf den Zeemaneffekt erstrecken. Diese Überzeugung wird gestärkt durch Theorie und Erfahrung beim Starkeffekt des Wasserstoffs, wo ja nach Schwarzschild-Epstein die elektrische Aufspaltung $\Delta\nu$ einer Balmerlinie sich zusammensetzt aus der Aufspaltung $\Delta\nu_1$ des ersten und $\Delta\nu_2$ des zweiten Termes, nach der Formel

$$\Delta\nu = \Delta\nu_1 - \Delta\nu_2. \tag{1}$$

Dieselbe Überzeugung liegt den folgenden Ausführungen zugrunde; sie ist in der Literatur zuerst ausgesprochen und an den anomalen Zeemaneffekten der Triplettsysteme geprüft von Hrn. T. van Lohuizen.[1])

Bekanntlich tritt der normale Zeemaneffekt (Lorentzsches Triplett von der Aufspaltung

$$\Delta\nu = \pm aH, \quad a = \frac{e}{m} \cdot \frac{1}{4\pi c} = 4{,}70 \cdot 10^{-5} \text{ elmagn. } c\text{-}g\text{-}s\text{-Einh.})$$

nur auf bei einfachen oder (s. unten) „merklich einfachen" Linien. Bei zusammengesetzter Linienstruktur haben wir dagegen anomale Zeemaneffekte mit komplizierten Aufspaltungstypen. Für die bei ihnen vorkommenden Abstände der Komponenten von der Mitte des Aufspaltungsbildes gilt die Rungesche *Regel*[2]); *sie sind rationale Bruchteile der normalen Aufspaltung*; in Zeichen:

$$\Delta\nu = \frac{q}{r} \cdot aH; \tag{2}$$

hier bedeutet r eine für den betreffenden Aufspaltungstyp feste und charakteristische Zahl, den „Rungeschen *Nenner*", q eine innerhalb des Aufspaltungsbildes veränderliche Zahl aus der Reihe 0, ± 1, $\pm 2 \ldots \pm r$, $\pm (r+1) \ldots$, die von Komponente zu Komponente wechselt, den „Rungeschen *Zähler*" wie wir kurz sagen wollen. Die Komponenten sind zum Teil parallel (p), zum Teil senkrecht (s) polarisiert. Die Zerlegungen zusammengehöriger Linien eines Dubletts, Tripletts, vollständigen Dubletts usw. verraten ihre Zusammengehörigkeit durch die Ähnlichkeit ihrer Zerlegungsbilder. Z. B. haben wir für die beiden D-Linien bekanntlich:

Tabelle 2.

	$q =$	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5
$r = 3$	sp_1, D_2		p		s		s
	sp_2, D_1			p		s	

1) T. van Lohuizen, Amsterdamer Akademie, Mai 1919.

2) A. Runge, Physikal. Zeitschr. 8. S. 232. 1907; aufgestellt an Hand der besonders reichhaltigen Zeemantypen des Neon.

Dieses Zerlegungsschema[1]) gilt nicht nur für die beiden *D*-Linien und die übrigen Na-Dubletts aus der Hauptserie und scharfen Nebenserie, nicht nur für die entsprechenden Linien der übrigen Alkalien, sondern auch für die Dubletts in den Bogenspektren der Erden (z. B. Tl) und für diejenigen in den Funkenspektren der alkalischen Erden (z. B. Ra, . . . Zn . . .). Das Zerlegungsschema andererseits für die Tripletts der Bogenspektren der alkalischen Erden aus der Hauptserie und scharfen Nebenserie (zuerst bei den Hg-Linien von Runge und Paschen festgestellt und in der folgenden Tabelle durch die Wellenlängen des ersten Hauptserientripletts von $1{,}5\,s - 2p_i$ gekennzeichnet) lautet bekanntlich

Tabelle 8.

	$q =$	0	± 1	± 2	± 3	± 4
$r = 2$	$s p_1$, $\lambda = 5461$	p	p	s	s	s
	$s p_2$, $\lambda = 4359$		p		s	s
	$s p_3$, $\lambda = 4047$	p				s

Die Gleichartigkeit der Zeemantypen innerhalb der durch die Seriengesetze zusammengeordneten Linien und innerhalb der durch das natürliche System zusammengeordneten Elemente sucht allgemein die Prestonsche *Regel* zu fassen: *Die magnetische Aufspaltung gleichartiger Linien desselben Elementes sowie verwandter Elemente ist, in der Skala der Schwingungszahlen gemessen, die gleiche.* Diese Regel schien mannigfache Ausnahmen bei den Elementen von niedriger Ordnungszahl zu erleiden, doch sind sie vollständig aufgeklärt durch den von Paschen und Back entdeckten vereinfachenden Einfluß des Magnetfeldes auf die Linienstruktur. Um vergleichbare Zeemantypen zu erhalten, ist es nur nötig, die Stärke des Magnetfeldes bei verschiedenen Elementen im Verhältnis zu den ursprünglichen Linienabständen zu wählen. Bei „schwachen" Magnetfeldern, d. i. bei solchen, deren magnetisches $\Delta\nu$ klein ist gegen das ursprüngliche feldfreie $\Delta\nu$ der

1) Hoffentlich wird man sich in dieser und den folgenden Tabellen nicht an der doppelten Bedeutung der Buchstaben s und p in der Tabelle („senkrecht" und „parallel") und im Eingange der Tabelle („scharf" und „prinzipal") stoßen.

Liniengruppe treten die durch die Prestonsche Regel angezeigten Zeemantypen rein auf; bei „mittleren" Magnetfeldern, wo beide $\Delta\nu$ von gleicher Größenordnung werden, stören sich die Komponenten der verschiedenen Linien gegenseitig nach Gesetzen, welche W. Voigt[1]) beim *D*-Linientypus durch seine phänomenologischen Gleichungen quantitativ erfaßt hat; bei „starken Magnetfeldern", die eine gegen den ursprünglichen Linienabstand große magnetische Aufspaltung bewirken, bildet sich mehr und mehr der normale Zeemaneffekt aus. Dieser ist also charakteristisch nicht nur für einfache Linien, sondern auch, wie wir eben sagten, für „merklich einfache Linien", d. h. für solche Liniengebilde, deren feldfreie Schwingungsabstände vernachlässigt werden können gegen die vom Magnetfelde hervorgerufenen Schwingungsdifferenzen.

§ 1. Die Rungeschen Nenner der Terme von Dublett- und Triplettsystemen.

Nach dem Kombinationsprinzip setzt sich der beobachtbare magnetische Effekt $\Delta\nu$ zusammen aus der magnetischen Beeinflussung $\Delta\nu_1$ des ersten Termes (Energieänderung der Endbahn) und der magnetischen Beeinflussung $\Delta\nu_2$ des zweiten Termes (Energieänderung der Anfangsbahn), im Sinne der Gleichung (1) von S. 240. Setzen wir hier im Sinne der Gleichung (2) ebenda ein

$$\Delta\nu_1 = \frac{q_1}{r_1} a H, \quad \Delta\nu_2 = \frac{q_2}{r_2} a H,$$

indem wir unter r_1, r_2 die Rungeschen Nenner, unter q_1 und q_2 die Rungeschen Zähler des ersten und zweiten *Termes* verstehen, so folgt:

$$\Delta\nu = \left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{q_2}{r_2}\right) a H = \frac{q_1 r_2 - q_2 r_1}{r_1 r_2} a H. \tag{3}$$

Dabei ist angenommen, daß r_1 und r_2 teilerfremd sind. Vergleichen wir dies mit der Rungeschen Darstellung (2) von S. 241, so ergibt sich

$$r = r_1 r_2, \tag{4}$$

$$q = q_1 r_2 - q_2 r_1. \tag{5}$$

---

1) W. Voigt, Ann. d. Phys. 41. S. 403. 1913 u. 42. S. 210. 1913. Vgl. auch A. Sommerfeld, Göttinger Nachr. März 1914.

Die erste dieser Gleichungen enthält unseren *magneto-optischen Zerlegungssatz*: *Der beobachtbare Rungesche Nenner der Termkombination zerlegt sich in den Rungeschen Nenner des ersten und zweiten Termes.*

Die Gleichung (5) besagt, wie sich gleichzeitig der Rungesche Zähler der einzelnen Komponenten des Zerlegungsbildes aus Zähler und Nenner der Terme bestimmt.

Wir beschäftigen uns in diesem Paragraphen mit der Gleichung (4). Für *Einfachlinien* ist, wie wir sahen, der Zeemaneffekt normal, also

$$r = 1.$$

Daraus folgt für jeden Term, der am Aufbau von Einfachlinien beteiligt ist, nach (4)

$$r_1 = r_2 = 1.$$

Diese Aussage übertragen wir auf den s-Term beliebiger Seriensysteme, welcher ja, wie wir am Anfange von I. sagten, auch bei Dublett- oder Triplettlinien, stets ein einfacher Term ist. Wir füllen also in der am Schluß dieses Paragraphen folgenden Tab. 6 nicht nur die erste Horizontalreihe, sondern auch die erste Vertikalreihe mit lauter Einern aus. Die in der Tabelle gewählte Termfolge s, p, d, b, ... entspricht der natürlichen Reihenfolge im Sinne wachsender azimutaler Quantenzahlen, die im vertikalen Eingange der Tabelle gewählte Aufeinanderfolge „Einfach-Triplett-Dublettlinien" ist bis zu einem gewissen Grade willkürlich und belanglos.

Nunmehr lassen sich auch die freien Plätze in der zweiten Vertikalreihe unserer Schlußtabelle ausfüllen. Wie wir oben mitteilten, gilt für die Hauptserie und die scharfe Nebenserie der Triplettsysteme, d. h. für die Kombination von s- und p-Term:

$$r = 2.$$

Nach unserem Zerlegungssatz haben wir dafür zu schreiben

$$r = 1\,.\,2,$$

wobei die 1 dem s-Term, die 2 dem p-Term zukommt. Ebenso im Falle der Dublettsysteme, Hauptserie und scharfe Nebenserie,

$$r = 1\,.\,3,$$

wo die 1 wieder dem s-Term, die 3 dem p-Term zukommt. Die zweite Vertikalreihe unserer Tabelle ist also mit den Zahlen 1, 2, 3 zu besetzen.

Wir kommen zur dritten Vertikalreihe, d. h. zur Bestimmung des Rungeschen Nenners beim *d*-Term. Hierzu dienen die Beobachtungen in der diffusen Nebenserie. Ältere Beobachtungen von Miller[1]), Moore[2]), Runge-Paschen[3]) sind nicht hinreichend zuverlässig bzw. nicht vollständig. Bei der diffusen Nebenserie der Triplettsysteme bedarf man der magnetischen Aufspaltung aller sechs Linien (Hauptlinien und Satelliten) des vollständigen Tripletts; ebenso im Falle der Dublettsysteme aller drei Linien des vollständigen Dubletts.

Einer freundlichen Mitteilung von Hrn. Paschen aus dem Jahre 1914 verdanke ich die Kenntnis der gesamten Zerlegungsschemata der vollständigen Dubletts und Tripletts nach Aufnahmen von Hrn. E. Back, die wegen des Krieges nicht veröffentlicht worden sind, aber nunmehr bald in diesen Annalen erscheinen werden. Ich gebe sie hier in derselben Form wieder wie oben die Zerlegungsschemata der Hauptserie und scharfen Nebenserie. Vgl. Tab. 4 und 5. Wir entnehmen aus ihnen: *Der Rungesche Nenner ist 6 bei den Tripletts. 15 bei den Dubletts.*

Was schließen wir hieraus für die Vervollständigung unserer Tab. 6? Zunächst fällt in die Augen: *Der Rungesche Nenner 6 ist durch 2 teilbar, der Rungesche Nenner 15 durch 3.* So muß es in der Tat nach unserem Zerlegungssatze sein. Denn die beobachtbare Zahl r der diffusen Nebenserie entsteht als das Produkt aus dem Rungeschen Nenner r_1 des p-Terms und dem Rungeschen Nenner r_2 des d-Terms.

Wir erhalten daher

$$r_2 = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{bei Triplettlinien,}$$

$$r_2 = \frac{15}{3} = 5 \quad \text{bei Dublettlinien.}$$

Die dritte Vertikalreihe unserer Schlußtabelle ist also der Reihe nach mit den Zahlen 1, 3, 5 auszufüllen.

Niemand wird zweifeln, daß nunmehr in die vierte Vertikalreihe, welche dem *b*-Term entspricht, die Zahlen 1, 4, 7 zu setzen sind, obwohl bisher keine Beobachtungen über den Zeemaneffekt der Bergmannlinien bekannt sind. Wir haben auch die in Nr. I genannten höheren Terme x und y hinzugefügt, welche

1) H. Miller, Ann. d. Phys. 24. S. 116. 1907.
2) H. Moore, Ann. d. Phys. 25. S. 309. 1908.
3) Runge-Paschen, Berliner Akademie, Febr. 1902.

Tabelle 4.

Vollständiges Dublett.

	$q =$	0	±1	±2	±3	±4	±5	±6	±7	±8	±9	±10	±11	±12	±13	±14	±15	±16	±17	±18	±19	±20	±21	±22	±23	±24
$r=15$	$p_1 d_2$			•		p				s				p				s								s
	$p_1 d_1$		p		p												s		s		s		s			
	$p_2 d_2$		p										s		s											

Der Rungesche Nenner ist 15; der Rungesche Zähler ist gerade, und zwar durch 4 teilbar bei dem Satelliten $p_1 d_2$, ungerade bei den beiden Hauptlinien $p_1 d_1$ und $p_2 d_2$.

Tabelle 5.

Vollständiges Triplett.

	$q =$	0	±1	±2	±3	±4	±5	±6	±7	±8	±9	±10	±11	±12	±13	±14	±15
$r=6$	$p_1 d_3$	p			s			p			s						s
	$p_1 d_2$			p		p	s		s		s		s				
	$p_1 d_1$	p	p	p				s	s	s	s	s					
	$p_2 d_3$				s			p			s						
	$p_2 d_2$	p		p			s		s		s						
	$p_2 d_1$	p			s												

Der Rungesche Nenner ist im allgemeinen 6; er reduziert sich auf 2 bei allen Kombinationen, die d_3 enthalten, indem hier der Rungesche Zähler durch 3 teilbar ist. In allen Kombinationen, welche d_2 enthalten, ist der Rungesche Zähler gerade für die p-Komponenten, ungerade für die s-Komponenten.

zur azimutalen Quantenzahl $n = 5$ und $n = 6$ gehören würden. Auch bei diesen kann kein Zweifel sein über die ihnen zukommenden Rungeschen Nenner. *Bei den Triplettsystemen schreiten die Rungeschen Nenner nach der Reihenfolge der ganzen Zahlen, bei den Dublettsystemen nach der Reihenfolge der ungeraden Zahlen fort.* Die nur durch Analogie erschlossenen, nicht auf Beobachtungen beruhenden Zahlen haben wir eingeklammert.

Tabelle 6.

	s	*p*	*d*	*b*	*x*	*y*
Einfachlinien .	1	1	1	1	1	1
Triplettlinien .	1	2	3	(4)	(5)	(6)
Dublettlinien .	1	3	5	(7)	(9)	(11)

Die somit abgeschlossene Zahlentafel ist vielleicht das vollkommenste Beispiel jener Zahlenharmonien, welche uns die neue Theorie der Spektren beschert hat. Sie stellt sich, wie ich an anderer Stelle (Naturwissenschaften 1920) gesagt habe, einstweilen als ein „Zahlenmysterium" dar. In der Tat ist unsere Tafel wesentlich empirischen Ursprungs und theoretisch ebenso unverstanden, wie der Ursprung der Linienmultiplizitäten überhaupt. Nur soviel scheint sicher zu sein, daß der ganzzahlige Zusammenklang unserer Rungeschen Nenner seinen letzten Grund in dem Walten verborgener Quantenzahlen und Quantenbeziehungen hat.

In der Einleitung haben wir, indem wir auf theoretische Rechnungen verwiesen, den *s*-, *p*-, *d*- . . . Termen die „azimutalen" oder „äußeren" Quantenzahlen 1, 2, 3, . . . zugewiesen. Unsere jetzige Untersuchung hat, lediglich auf der Grundlage der empirischen Zerlegungsbilder, für die Rungeschen Nenner Zahlen ergeben, welche bei den Triplettsystemen mit jenen Quantenzahlen übereinstimmen und bei den Dublettsystemen in demselben Sinne fortschreiten wie jene. Dies ist gewiß kein Zufall, wird vielmehr als eine neue Bestätigung unserer Zuordnung von azimutalen Quantenzahlen und Termen angesehen werden können. Daß ein ursächlicher Zusammenhang zwischen Rungeschen Nennern und azimutalen Quantenzahlen besteht, ist auch theoretisch verständlich. Mißt doch

die azimutale Quantenzahl das gesamte Impulsmoment und daher auch das gesamte magnetische Moment des Atoms. Es ist von vornherein anzunehmen, daß die Einwirkung des äußeren Magnetfeldes auf das Atom von dem magnetischen Moment desselben bestimmt wird, wie wir es bei dem normalen Zeemaneffekt des Wasserstoffs näher verfolgen können. Daher ist es begreiflich, daß der Rungesche Nenner r eine (natürlich ganzzahlige) Funktion der azimutalen Quantenzahl n sein wird: $r = g(n)$. Daß r direkt mit n übereinstimmt, ist damit nicht gesagt. Tatsächlich zeigt der Fall der Dublettsysteme und auch der der Einfachlinien, daß der Zusammenhang im allgemeinen nicht $r = n$ lautet; daß dies bei den Triplettsystemen zutrifft, ist eine Besonderheit, die theoretisch zunächst nicht geklärt werden kann.

§ 2. Hinweise auf mögliche experimentelle Bestätigungen.

Am nächsten liegt es, die experimentelle Prüfung unserer Zahlentafel in der magnetischen Zerlegung der Bergmannlinien (Kombination von d- und b-Term) zu suchen. Als Rungescher Nenner bei Bergmanntriplettlinien würde aus unserer Tafel $3 \cdot 4 = 12$, bei Bergmanndublettlinien $5 \cdot 7 = 35$ folgen. Obwohl diese Linien wegen ihrer meist ultraroten Wellenlänge für die Beobachtung des Zeemaneffektes an sich günstig liegen, ist die Aussicht für den vollständigen Nachweis des betreffenden Zeemantypus trotzdem minimal. Sahen wir doch am Ende von Nr. I, daß noch kein sicheres Beipiel für den Dublett- oder Triplettcharakter des Bergmanntermes selbst bekannt ist; um so weniger hat die viel feinere magnetische Zerlegung der Bergmannstruktur Aussicht auf Erfolg. Vielmehr muß man erwarten, daß sich im Zeemaneffekt bestenfalls bei schweren Atomen der für den d-Term charakteristische Typus wird nachweisen lassen, also die Rungeschen Nenner 3 bzw. 5 (vgl. hierzu die späteren Ausführungen über den Paschen-Back-Effekt.) Während wir bisher die Zahlen 3 und 5 indirekt mit Hilfe unseres Zerlegungssatzes aus der Kombination $(p\,d)$ der diffusen Nebenserie erschlossen haben, würden wir sie also aus dem Zeemaneffekt der Bergmannlinien direkt und isoliert erhalten.

Es gibt aber noch andere Wege zur Isolierung der Rungeschen Nenner des d-Termes. Einmal die Kombinationen $(s\,d)$,

also z. B.

$$\nu = 1{,}5\,s - 3d, \quad 1{,}5\,s - 4d, \quad 2{,}5\,s - 3d \text{ usw.}$$

Solche Linien treten zwar regulärer Weise nicht auf, weil sie mit einem Sprung der azimutalen Quantenzahl um 2 Einheiten verbunden sind (vgl. Nr. II), kommen aber doch gelegentlich vor, insbesondere unter Wirkung starker elektrischer Felder. Da nun bei solchen Linien der Rungesche Nenner r_1 für den s-Term gleich *1* ist, fällt die beobachtbare Rungesche Zahl r mit derjenigen r_2 des d-Terms zusammen:

$$r = 1 \cdot r_2,$$

so daß r_2 direkt aus der Beobachtung entnommen werden kann. Interessanter und gangbarer (allerdings nur für Triplettlinien) ist folgender Weg, der durch die Paschensche Systematik des Zeemaneffekts bei Hg usw. gewiesen wird. Die Triplett-erme kombinieren bei den Erdalkalien und verwandten Elementen mit den Einfachtermen, welche wir wie üblich mit den großen Buchstaben $S\,P\,D$ schreiben. Es kommen also Kombinationen vor wie

$$\nu = 2\,P - m\,d_i \quad \text{oder} \quad \nu = 2p_i - m\,D,$$

Kombinationen, die man etwa als diffuse Nebenserie vom gemischten (Einfachtriplett) Typus bezeichnen könnte. Von ihnen gestattet die erste Art wiederum, das magnetische Verhalten und den Rungeschen Nenner 3 des d-Terms zu isolieren, da der Term P zum Rungesche Nenner 1 und zum normalen Zeemantypus gehört. Auch die zweite Art von Kombinationen ist interessant: da in ihr als einziger multipler Term p_i vorkommt, soll der zugehörige Rungesche Nenner derselbe sein wie in der Hauptserie und scharfen Nebenserie, d. h. wie bei den Kombinationen

$$\nu = 1{,}5\,s - m\,p_i \quad \text{und} \quad \nu = 2p_i - (m + \tfrac{1}{2},\ s).$$

Hr. Back hat, wie er mir freundlich mitteilte, eine Kombination der zweiten Art $\lambda = 3500$, $\nu = 2p_2 - 3D$ bei Cd magnetisch zerlegt; das Ergebnis ist das erwartete, nämlich der Rungesche Nenner 2!

Schließlich bietet einen Weg zur Termisolierung auch der Paschen-Back-Effekt. Sind z. B. in der Kombination $(p_i\,d_i)$ die Unterschiede der d-Terme zu klein (kleiner als etwa die normale magnetische Aufspaltung $\Delta\nu$), so wirken die d_i wie ein einfacher Term und der beobachtbare Zeemaneffekt

hängt nur mehr von der Natur des p-Termes ab. Paschen betont dies bereits 1912 unter Hinweis auf das Mg-Spektrum[1]), dessen Linie $\lambda = 3838$, $\nu = 2p_1 - 3d$ wegen zu geringer Auflösung des d-Terms fast genau denselben megnetischen Typus besitzt wie die Linie $2p_1 - 2{,}5\,s$. Dies zeigt sich insbesondere darin, daß sich hier der sonst gültige Rungesche Nenner 6 der Tripletts der diffusen Nebenserie reduziert auf den Nenner 2, welcher dem p-Term allein bzw. den Kombinationen vom Typus der Hauptserie usw. entspricht. Dieselben Verhältnisse haben wir bereits am Anfang dieses Paragraphen bei der Kombination des b-Terms mit dem d-Term geschildert. Sie sind allgemein als ein partieller Paschen-Back-Effekt zu bezeichnen. Der totale Paschen-Back-Effekt, d. h. normale Aufspaltung, ergibt sich, wenn die ursprüngliche Trennung beider Terme der Linienkombination klein ist gegen die magnetische Trennung ihrer Komponenten.

Der praktische Nutzen unseres Zerlegungssatzes besteht namentlich darin, daß er die in der Rungeschen Regel auftretenden eventuell großen Nenner (15, 12, 35) zurückführt auf ihre kleineren Faktoren. Allgemein ist zu sagen, daß, wenn in den empirischen Wissenschaften rationale Zahlen auftreten, stets die Verhältnisse kleiner ganzer Zahlen gemeint sind, z. B. im kristallographischen Gesetz der rationalen Indizes. Anderenfalls wären sie in der Erfahrung von irrationalen Zahlen oder von rationalen Zahlen mit höherem Zähler und Nenner nicht zu unterscheiden. Rationale Zahlen vom Nenner 15 dürften schon die Grenze bedeuten, bis zu welcher die sorgfältigste Spektroskopie vordringen kann.

§ 3. Die Rungeschen Zähler der Dublett- und Triplettsysteme. Regelmäßigkeiten in der Komponentenzahl und Komponentenanordnung der Zerlegungsbilder.

Wir machen zunächst auf einige Regelmäßigkeiten aufmerksam, die sich beim Vergleich der Tabb. 2, 3 (Hauptserie, scharfe Nebenserie) und der Tabb. 4, 5 (diffuse Nebenserie) zeigen:

Der d_3-Term der Triplettsysteme läßt, wenn er an die Stelle des s-Termes tritt, die Komponentenzahl ungeändert.

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. 39. S. 901. 1912.

In der Tat haben die Zerlegungsbilder $p_1 d_3$, $p_2 d_3$, $p_3 d_3$ dieselbe Anzahl von p- und von s-Komponenten wie die Zerlegungsbilder $s p_1$, $s p_2$, $s p_3$, nämlich bei gesonderter Zählung der $\pm$-Komponenten bzw. 3, 2, 1 für die p-, 6, 4, 2 für die s-Komponenten.

Der d_2-Term erhöht bei den Triplett- und Dublettsystemen die Zahl der s-Komponenten um 2, bei den Triplettsystemen die der p-Komponenten um 1.

In der Tat ist die Zahl der s-Komponenten

$$\left.\begin{array}{l} 6 \text{ bei } p_1 d_2, \quad 4 \text{ bei } s p_1 \\ 4 \text{ bei } p_2 d_2; \quad 2 \text{ bei } s p_2 \end{array}\right\} \text{Dublettsysteme}$$

$$\left.\begin{array}{l} 8 \text{ bei } p_1 d_2, \quad 6 \text{ bei } s p_1 \\ 6 \text{ bei } p_2 d_2, \quad 4 \text{ bei } s p_2 \end{array}\right\} \text{Triplettsysteme}$$

und die der p-Komponenten

$$\left.\begin{array}{l} 4 \text{ bei } p_1 d_2, \quad 3 \text{ bei } s p_1 \\ 3 \text{ bei } p_2 d_2, \quad 2 \text{ bei } s p_2 \end{array}\right\} \text{Triplettsysteme}$$

Die Dublettsysteme fügen sich nicht dieser Regel; hier ist vielmehr die p-Komponentenzahl

$$\left.\begin{array}{l} 4 \text{ bei } p_1 d_2, \quad 2 \text{ bei } s p_1 \\ 2 \text{ bei } p_2 d_2, \quad 2 \text{ bei } s p_2 \end{array}\right\} \text{Dublettsysteme}$$

Schließlich erhöht der d_1-Term die Zahl der s-Komponenten um 4, die der p-Komponenten um 2, und zwar wieder ausnahmslos bei den Triplett- und Dublettsystemen. Wir haben nämlich bei den Dublettsystemen

$$p_1 d_1 \left\{\begin{array}{l} 8\ s\text{-Komp.} \\ 4\ p\text{-Komp.} \end{array}\right. \qquad s p_1 \left\{\begin{array}{l} 4\ s\text{-Komp.} \\ 2\ p\text{-Komp.} \end{array}\right.$$

und bei den Triplettsystemen

$$p_1 d_1 \left\{\begin{array}{l} 10\ s\text{-Komp.} \\ 5\ p\text{-Komp.} \end{array}\right. \qquad s p_1 \left\{\begin{array}{l} 6\ s\text{-Komp.} \\ 3\ p\text{-Komp.} \end{array}\right.$$

Diese Gesetzmäßigkeiten liegen ganz im Sinne des Kombinationsprinzipes, welches ja eine Überlagerung der magnetischen Effekte des ersten und zweiten Termes verlangt. Damit stimmt es überein, daß die Zerlegungsbilder der Terme p_i, die ursprünglich in den Kombinationen $s p_i$ in Erscheinung traten, durch Vertauschung des s mit einem der Terme d_j in

einer für jeden d-Term charakteristischen Art abgeändert werden. Die hinzukommende, dem Term d_j eigentümliche Komponentenzahl überlagert sich dabei der ursprünglichen zu $s\,p_i$ gehörenden. Am einfachsten lagen dabei die Verhältnisse bei dem d_3-Term der Triplettsysteme, welcher die Komponentenzahl völlig ungeändert ließ. Hier ergibt sich noch eine weitere durchgreifende Regelmäßigkeit, nicht nur die Zahl, sondern auch die Lage und Intensität der p- und s-Komponenten betreffend:

Man erhält das Zerlegungsbild der Linien $p_i\,d_3$ aus demjenigen der Linien $s\,p_i$, indem man letzteres auf das Doppelte dehnt und zwar bei den p-Komponenten von der Vertikalreihe 0 aus, bei den positiven bzw. negativen s-Komponenten von der Vertikalreihe $\pm\,{}^3/_2$ aus, wobei im letzteren Falle noch eine Umklappung um die bei der Dehnung feste Reihe $\pm\,{}^3/_2$ (Vertauschung von rechts und links) hinzuzufügen ist; (ob man die entsprechende Umklappung auch bei den p-Komponenten hinzufügt, ist gleichgültig, da sie die Anordnung dieser Komponenten in sich überführt). Zur bequemeren Erläuterung sondern wir hierunter aus dem vollständigen Schema der Tab. 5 das Zerlegungsbild der Kombinationen $p_i\,d_3$ aus und fügen darunter in Klammern das Zerlegungsbild der Komponenten $s\,p_i$ bei. Der erste Teil der Tabelle enthält die p-, der zweite die s-Komponenten, wobei wir uns beidemal auf die +-Komponenten beschränken können. Die Vertikalreihe, von der aus die Dehnung zu erfolgen hat, ist in beiden Teiltabellen durch stärkere Umrandung hervorgehoben.

Tabelle 7.

	0	½	1	³/₂	2	⁵/₂
$p_1\,d_3$	p		p			
$(s\,p_1)$	(p)	(p)				
$p_2\,d_3$			p			
$(s\,p_2)$		(p)				
$p_3\,d_3$	p					
$(s\,p_3)$	(p)					

	0	½	1	³/₂	2	⁵/₂
$p_1\,d_3$		s		s		s
$(s\,p_1)$			(s)	(s)	(s)	
$p_2\,d_3$		s		s		
$(s\,p_2)$				(s)	(s)	
$p_3\,d_3$		s				
$(s\,p_3)$					(s)	

Dieser gesetzmäßige Zusammenhang erstreckt sich auch auf die Intensitäten der Komponenten; d. h. die relativen

Intensitäten sind in unserem verdehnten Schema der $p_i d_3$ merklich dieselben wie im ursprünglichen Schema der $s\, p_i$.

Wir dürfen daher diesen Zusammenhang als einen innerlich begründeten ansehen; zugleich erblicken wir darin eine gute Probe auf die Vollständigkeit und Richtigkeit des Befundes von Hrn. Back, die bei einer experimentell so schwierigen Feststellung gewiß nicht überflüssig scheint. Auch die vorangehenden Gesetzmäßigkeiten in der Komponentenzahl der übrigen Linien können als Bestätigung der Backschen Zerlegungsbilder 4, 5 angesehen werden.

Unsere auf dem Kombinationsprinzip fußende Betrachtung der Zeemaneffekte wäre aber erst dann abgeschlossen, wenn es gelingen würde, den Termen s, p_i, d_i einzeln gewisse magnetische Aufspaltungen zuzuordnen und aus deren Zusammensetzung die beobachteten Zerlegungsbilder und ihre Polarisation herzuleiten. In diesem Sinne geht Hr. van Lohuizen a. a. O. bei den Triplettsystemen vor; da er aber nicht die endgültigen Aufspaltungen der vollständigen Tripletts von Hrn. Back zur Verfügung hatte, sind seine Resultate im Einzelnen jedenfalls nicht endgültig. Nach dem Vorbilde der Ableitung des normalen Zeemaneffektes am Wasserstoffmodell würde mir folgende Behandlungsweise als ideal erscheinen: Man ordne den verschiedenen Termen die folgenden Energieniveaus der magnetischen Aufspaltung zu (mit Unterdrückung des gemeinsamen Faktors $a \cdot H$, vgl. S. 241):

$$\left.\begin{array}{l} s)\ 0,\ \pm 1 \ldots \\ p)\ 0,\ \pm \tfrac{1}{2},\ \pm 1 \ldots \\ d)\ 0,\ \pm \tfrac{1}{3},\ \pm \tfrac{2}{3},\ \pm 1 \ldots \end{array}\right\} \text{(Triplettsysteme)}$$

$$\left.\begin{array}{l} s)\ 0,\ \pm 1 \ldots \\ p)\ 0,\ \pm \tfrac{1}{3},\ \pm \tfrac{2}{3},\ \pm 1 \ldots \\ d)\ 0,\ \pm \tfrac{1}{5},\ \pm \tfrac{2}{5},\ \pm \tfrac{3}{5},\ \pm \tfrac{4}{5},\ \pm 1 \end{array}\right\} \text{(Dublettsysteme)}$$

und kombiniere diese mit Rücksicht auf ein geeignet gewähltes Auswahlprinzip. Dieses letztere müßte außer von den „äußeren" Quantenzahlen (1, 2, 3 für den s-, p-, d-Term) und von den hypothetischen „inneren" Quantenzahlen (vgl. S. 231) auch von den Rungeschen Zählern q (sozusagen den Quantenzahlen des betreffenden magnetischen Energieniveaus) abhängen und wäre demjenigen beim normalen Zeemaneffekt nachzubilden, nach welchem nur ein Sprung um 0 oder ± 1 zwischen der

Quantenzahl des ersten und zweiten Termes gestattet ist. Indessen ist es mir nicht gelungen, in dieser Weise die empirischen Zerlegungsbilder theoretisch nachzuahmen.

§ 4. Der Zerlegungssatz beim Neonspektrum.

Ein reiches Feld für die Anwendung unserer allgemeinen spektroskopischen Sätze bietet das von Paschen[1]) entwirrte Neonspektrum mit seinen außerordentlich vielfachen Termmultiplizitäten. Paschen unterscheidet 10 p-Terme, mindestens 4 s-Terme usw. Unser Permanenzsatz würde verlangen, daß die Anzahl der d-Terme ebenso groß, also 10 sei, wie die der p. Da aber die Klassifizierung der Terme, wie ich höre, noch nicht endgültig feststeht, so sind nähere Betrachtungen hierüber sowie über die Anwendung des Auswahlprinzips auf das Neonspektrum verfrüht.

Daß der Zeemaneffekt für die Zuordnung der Terme zum s-p-d-Typus ausschlaggebend ist, hebt bereits Paschen hervor, unter Hinweis auf die Dissertation von Lohmann.[2]) Die hier gefundenen sehr mannigfaltigen Zeemantypen haben Runge Veranlassung zur Aufstellung seiner Regel gegeben, die dann erst später auf die durchsichtigeren Zeemantypen der Dublett- und Triplettsysteme übertragen wurde. Die Messungen Lohmanns sind weitergeführt von Takamine und Yamada.[3]) Wir haben zunächst zu betonen, daß die von Runge selbst aus den Lohmannschen Messungen und die von Takamine und Yamada berechneten Rungeschen Nenner untereinander vielfach abweichen und noch nicht als sicher gelten können, da sie über die Genauigkeit der Beobachtungen hinausgreifen. Als Beispiel sei erwähnt[4])

$$\lambda = 6599, \quad \nu = 1{,}5\, s_2 - 2 p_2,$$

Anzahl der p-Komponenten 1, der s-Komponenten 2.

---

1) H. Paschen, Das Spektrum des Neon. Ann. d. Phys. 60. S. 405. 1919.

2) A. Lohmann, Halle 1907.

3) Takamine u. Yamada, Proceedings Tokyo Math. Phys. Soc. 7. S. 277. 1913—1914.

4) Die hier und im folgenden angegebenen Termdarstellungen stammen natürlich erst aus der Paschenschen Arbeit und waren beim Aufstellen der Rungeschen Regel unbekannt.

Runge deutet sie mit dem Nenner 7, Takamine und Yamada auf Grund etwas abweichender Messungen mit dem Nenner 13, nämlich

p-Komponente	*s*-Komponente		
$^3/_7$	1	$^9/_7$	Ru.
$^4/_{13}$	$^{14}/_{13}$	$^{19}/_{13}$	T. Y.

Der Unterschied beider Deutungen ergibt sich z. B. bei der letzten *s*-Komponente zu

$$\frac{18}{18} - \frac{9}{7} = \frac{126 - 117}{13 \cdot 7} = \frac{9}{91} = 10 \text{ Proz.}$$

Die von Lohmann bzw. Takamine und Yamada bei derselben Komponente gemessenen Linienverschiebungen, nämlich 6,42 und 6,10 in Wellenzahlen pro Gauss, weichen um

$$\frac{0{,}32}{6{,}42} = 5 \text{ Proz.}$$

voneinander ab. Weder die bisherigen Messungen noch ihre Deutung durch rationale Zahlen können daher als bindend angesehen werden.

Unter diesen Umständen springt der praktische Nutzen unseres Zerlegungssatzes, auf den wir schon S. 250 hinwiesen, in die Augen. Wir wollen zeigen, daß er zwanglos durchgeführt werden kann und auf kleinere Nenner führt als die bisher angenommenen (in dem angezogenen Beispiel auf den Nenner 3). Erst eine erhebliche Steigerung der Meßgenauigkeit würde den Zerlegungssatz entbehrlich machen und auch ohne diesen leitenden Faden zu einer willkürfreien Bestimmung der Rungeschen Nenner führen.

Wir beginnen mit zwei von Takamine und Yamada gemessenen Linien, die nach Ausweis der Paschenschen Arbeit beide aus denselben Termen gebildet sind, nämlich

$$\lambda = 5690, \quad \nu = 2p_{10} - 3{,}5\, s_5,$$

$$\lambda = 7033, \quad \nu = 1{,}5\, s_5 - 2p_{10}.$$

Da nach den sonstigen allgemeinen Erfahrungen der Zeemaneffekt nur von dem Termtypus (hier p_{10} und s_5), nicht von der Seriennummer oder der Reihenfolge der Termkombination abhängt, erwarten wir für beide die gleiche Zerlegung. In der Tat finden Takamina und Yamada bei beiden genau die gleiche Aufspaltung (*p*-Komponenten 0 und $\frac{1}{2}$, *s*-Kompo-

nenten 1, $^3/_2$, 2 wie in Tab. 3 bei der Kombination sp_1), insbesondere also bei beiden den gleichen Rungeschen Nenner

$$r = 2 = 1 \cdot 2.$$

Wir müssen also s_5 den Nenner 2, p_{10} den Nenner 1 zuordnen oder umgekehrt.[1]) Zur Entscheidung zwischen beiden Möglichkeiten ziehen wir weitere Kombinationen des Termes s_5 heran und bemerken, daß diese sämtlich auf gerade Rungesche Nenner führen oder zwanglos mit solchen gedeutet werden können, daß dagegen die einzige weitere Kombination des Termes p_{10}, welche zur Verfügung steht (Kombination von p_{10} mit einem d-Term) einen ungeraden Rungeschen Nenner besitzt. Als Kombinationen des Termes s_5, denen sowohl nach Runge wie nach Takamine-Yamada ein gerader Rungescher Nenner zukommt, führen wir an:

$$\lambda = 6402, \quad \nu = 1{,}5 s_5 - 2p_9, \quad r = 6,$$
$$\lambda = 6217, \quad \nu = 1{,}5 s_5 - 2p_7, \quad r = 6,$$
$$\lambda = 5976, \quad \nu = 1{,}5 s_5 - 2p_5, \quad r = 2.$$

Wir schließen hieraus, daß von den beiden Alternativen die erste zutrifft, daß also dem Term s_5 der Nenner 2 zuzuordnen ist und weiterhin, daß den Termen p_9, p_7 der Nenner 3, den Termen p_{10}, p_5 der Nenner 1 entspricht.

Wir können nun auf mannigfache Weise weitergehen, z. B. von p_5 zu s_3 mittels der Linie normaler Aufspaltung

$$\lambda = 6267, \quad \nu = 1{,}5\, s_3 - 2p_5, \quad r = 1.$$

Wir schließen daraus, daß nicht nur p_5, sondern auch s_3 zum Rungeschen Nenner *1* gehört. Von s_3 gelangen wir zu p_2 durch Vermittlung von

$$\lambda = 6164, \quad \nu = 1{,}5\, s_3 - 2p_2, \quad r = 3.$$

Wir müssen also p_2 mit dem Nenner 3 rechnen.

---

1) Die Möglichkeit, daß s_5 und p_{10} den gemeinsamen Nenner 2 haben, brauchen wir nicht in Betracht zu ziehen. Wir geben nämlich im folgenden immer die Minimalwerte der Rungeschen Nenner an, die zur Erklärung der Zeemantypen erforderlich sind; daß sie formal durch Vielfache dieser Minimalwerte ersetzt werden können, ist selbstverständlich, da z. B. $1 = {}^2/_2 = {}^3/_3 \ldots$

Weitere Erfahrungen an anderen Kombinationen des gleichen Termes können dazu nötigen, die ursprünglich gefundenen Minimalwerte in solcher Weise zu erweitern.

Von p_2 gelangen wir auf Grund der anfangs angezogenen Linie $\lambda = 6599$, $1{,}5\, s_2 - 2p_2$ zu s_2. Wegen $r = 8$ für p_2 erwarten wir, daß der Nenner bei dieser Linie durch 8 teilbar sein müsse. Das ist weder bei der von Runge gewählten Zahl 7, noch bei der von Takamine und Yamada gewählten 13 der Fall. Demgegenüber zeigt man, daß die vorliegenden Beobachtungen auch mit dem Nenner $r = 8$ dargestellt werden können, ohne den Beobachtungsfehler (oben aus der Abweichung der beiderlei Beobachter zu 5 Proz. veranschlagt) zu überschreiten. Wir deuten nämlich die p-Komponente als $^1/_3$, die s-Komponenten als 1 (wie Runge) und $^4/_3$. Letztere Zahl liegt zwischen den beiden Zahlen $^9/_7$ (R.) und $^{18}/_{13}$ (T. Y.)

$$^9/_7 = 1{,}29, \quad ^4/_3 = 1{,}33, \quad ^{18}/_{13} = 1{,}39.$$

Bei dieser Auffassung des Zerlegungsbildes bestätigt sich also der Nenner 8 für p_2. Zugleich vermutet man bei s_2 den Nenner 1, der sich auch bei der Linie normaler Aufspaltung

$$\lambda = 5853, \quad \nu = 1{,}5\, s_2 - 2p_1,$$

bestätigt. Auch für p_1 schließt man hieraus auf den Nenner 1. Auf Grund anderer Kombinationen von s_2 wird man aber dazu geführt, den Nenner von s_2 im Sinne der Anmerkung auf S. 256 auf 2 zu erweitern.

Den Nenner 8 für p_2 prüfen wir ferner an der Linie

$$\lambda = 6030, \quad \nu = 1{,}5\, s_4 - 2p_2.$$

Als Unterlage hierzu geben wir den folgenden Ausschnitt aus einer umfassenden tabellarischen Zusammenstellung von J. Krönert[1]):

	$\pm \Delta\nu$ beob.		Typus			berechnet		
p	L.	T. Y.	Wir	R.	T. Y.	Wir	R.	T. Y.
	0,68	0,51	$^1/_6$	$^3/_{13}$	$^1/_{10}$	0,78	0,72	0,47
s	2,42		$^3/_6$	$^7/_{13}$		2,35	2,53	
s	3,10		$^4/_6$	$^4/_{13}$		3,13	3,25	
s		6,18	$^8/_6$		$^{13}/_{10}$	6,27		6,10
s		6,60	$^9/_6$		$^{14}/_{10}$	7,05		6,50

1) J. Krönert, Gesetzmäßigkeiten beim anomalen Zeemaneffekt. Diss. München, ungedruckt. Auf diese Arbeit habe ich mich auch sonst in diesem Paragraphen gestützt.

Die ersten zwei Spalten enthalten die Schwingungsabstände $\pm \Delta\nu$ der beobachteten p- und s-Komponenten von der ursprünglichen Linie nach Lohmann einerseits, Takamine und Yamada andererseits. Sie weichen in der p-Komponente sehr stark voneinander ab und sind in den s-Komponenten überhaupt nicht zu identifizieren. Der nach Lohmann von Runge gerechnete Aufspaltungstypus (4. Spalte) hat den Nenner 13, der nach ihren eigenen Beobachtungen von Takamine und Yamada gerechnete Typus (5. Spalte) den Nenner 10. Beide Nenner sind nicht durch 3 teilbar, wie wir es nach unserem Zerlegungssatz fordern müssen. Wir versuchen es daher mit dem Nenner 6 (3. Spalte). Die hiermit berechneten Aufspaltungen (6. Spalte) weichen zwar zum Teil beträchtlich von den Beobachtungen ab, aber nicht um soviel mehr als die nach Runge und Takamine-Yamada berechneten (7. und 8. Spalte), daß sie bei der Unzulänglichkeit des Beobachtungsmaterials auszuschließen wären.

Indem wir solcherweise den Nenner 3 bei p_2 bestätigen bzw. nicht widerlegen, schließen wir gleichzeitig auf den Nenner 2 bei s_4. Letzterer ist im Einklang mit den beiden Linien vom sogenannten „$3a/2$-Typus“:

$$\left.\begin{aligned} \lambda = 6075, \quad \nu = 1{,}5\, s_4 - 2p_3 \\ \lambda = 5401, \quad \nu = 1{,}5\, s_4 - 2p_1 \end{aligned}\right\} \; r = 2$$

(nämlich p-Komponente, Aufspaltung 0, s-Komponente, Aufspaltung $^3/_2$). Als Nenner für p_3 und p_1 ergibt sich daraufhin 1; letzteres wurde schon oben (bei $\lambda = 5853$) geschlossen.

Im ganzen stehen nach den bisherigen Beobachtungen zur Verfügung 24 Kombinationen zwischen den Termen s_1 bis s_5 und p_1 bis p_{10}. Da diese 14 Terme in unserer Auffassung nur 14 Rungesche Nenner definieren, liefern die beobachteten Zeemantypen der 24 Linien 10 überzählige Bedingungen (mit Rücksicht auf ihren ganzzahligen Charakter sogar mehr), welche als Kontrolle der vorangehenden Bestimmungen bzw. als Fingerzeige für die richtige Deutung der Beobachtungen dienen können. Die hier durchgeführten Betrachtungen haben nur 12 Linien benutzt und im ganzen 11 Terme festgelegt, nämlich 4 s-Terme mit Nennern 1 oder 2 sowie 7 p-Terme mit Nennern 1 oder 3. Das vollständige Schema der Rungeschen Nenner, wie es sich aus den 24 Linien für alle 14 s- und p-Terme ergibt, lautet nach Hrn. Krönert:

Tabelle 8.

	s_1	s_2	s_4	s_5
$r =$	2	1	2	2

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}
$r =$	1	3	1	3	1	3	3	3	3	1

Wenn dieses Schema auch naturgemäß nicht so einheitlich aufgebaut ist wie dasjenige der Dublett-Triplettsysteme (Tab. 6), so ist doch das durchgehende Auftreten der Nenner 2 bzw. 1 bei den s-Termen, der Nenner 3 bzw. 1 bei den p-Termen bemerkenswert. Durch genauere und einheitlichere Beobachtungen wird unser Schema erheblich gesichert und in sich versteift sowie auf die d-Terme ausgedehnt werden können. Auch ist es nicht ausgeschlossen, daß einzelne Nenner durch die in der Anmerkung zu S. 256 angedeutete Erweiterung abzuändern sein werden, wodurch die Einheitlichkeit unseres Schemas vielleicht noch gewinnen wird. Zurzeit erübrigt sich eine genauere Diskussion, da vielleicht bald bessere Beobachtungen vorliegen. Hier kam es uns wesentlich darauf an, zu zeigen, wie unser Zerlegungssatz für die sachgemäße Deutung und Ordnung der Zeemantypen zu verwerten ist. Auch für die endgültige Benennung der Neonterme als s-, p-, d-Terme wird die Feststellung der Zeemantypen und ihrer Rungeschen Nenner ausschlaggebend sein; die Gesetzmäßigkeit unseres Schemas 8 läßt schon jetzt darauf schließen, daß Paschens Termbezeichnungen im wesentlichen sachgemäß sind.

Über die Rungeschen Zähler der Zerlegungsbilder können wir hier noch weniger sagen, wie unter den einfacheren Verhältnissen des vorigen Paragraphen. Erwähnt sei nur, daß, wie schon Lohmann bemerkt und Takamine-Yamada bestätigt hat, die Komponentenzahlen sämtlicher Zerlegungsbilder durch 3 teilbar sind (es kommen Tripletts, Sextetts, Nonetts bis Quindecimetts vor).

§ 5. Allgemeine Bemerkungen zum Starkeffekt. Gegensätzlicher Charakter von Kombinationsprinzip und Auswahlprinzip.

Daß neben dem Zeemaneffekt auch der Starkeffekt für die Ordnung unbekannter Spektren heranzuziehen ist, betont allgemein Hr. Stark und zeigt speziell beim Neonspektrum an

vorläufigen Beobachtungen von Nyquist Hr. K. W. Meißner.[1]) Hr. Stark stellt, namentlich auf Grund seiner Beobachtungen bei He und Li, folgende allgemeine Sätze auf:

1. Mit steigender Gliednummer nimmt in jeder Serie die Größe der elektrischen Verlagerung bzw. Aufspaltung der Linien zu.

2. Bei Linien verschiedener Serien von gleichem Laufterm wird für die gleiche Gliednummer die Aufspaltung, in Schwingungszahlen gemessen, gleich (Gesetz der übereinstimmenden elektrischen Effekte).

Wir möchten darauf hinweisen, daß beide Gesetze vom Standpunkte des Kombinationsprinzipes und der Bohrschen Spektraltheorie verständlich sind.

Der Starkeffekt entsteht aus dem Einfluß des äußeren elektrischen Feldes auf die Anfangsbahn einerseits, die Endbahn andererseits. Die Endbahn ist für alle Linien einer Serie dieselbe; die Anfangsbahn ist verschieden und entfernt sich um so mehr vom Kerne, je größer die Gliednummer der zugehörigen Linie ist. Nun kommt das äußere elektrische Feld gegen das Feld des Kernes (besser gesagt des Atomrestes) bei den kernnäheren Bahnen kaum zur Geltung, es wird aber um so wirksamer, je weiter sich die Bahn von der Atomperipherie entfernt. Dies ist das erste der genannten Gesetze von Stark. Das äußere elektrische Feld erscheint dabei wie eine Sonde, mit der die relative Stärke des Atomfeldes in verschiedenen Kernabständen abgetastet werden kann.

Gleichzeitig haben wir das zweite der Starkschen Gesetze, d. h. die alleinige Abhängigkeit des elektrischen Effektes von dem Laufterm der Seriendarstellung, allerdings nur dann, wenn es erlaubt ist, die elektrische Beeinflussung der Endbahn ganz außer acht zu lassen. Bei den innersten Bahnen (dem konstanten Term $1{,}5\,s$ der Hauptserie oder $2\,p$ der scharfen Nebenserie) wird das zulässig sein, sofern die Beobachtungsgenauigkeit nicht sehr gesteigert wird. Im allgemeinen aber kann dieses zweite Gesetz nur ein Näherungsgesetz sein. Nach dem Kombinationsprinzip muß sich, zumal bei Endbahnen wie $3\,p$, $2{,}5\,s$ usw., auch die elektrische Beeinflussung des konstanten Termes neben der des Lauftermes geltend

1) K. W. Meißner, Mitteilungen d. Phys. Ges. Zürich. S. 64. 1919.

machen. In der Tat kommt Meißner a. a. O. beim Neonspektrum bereits zu dem Schluß: „die Regel, daß gleichen Lauftermen gleicher elektrischer Effekt zukommt, ist vielfach, aber nicht durchweg erfüllt".

Ein grundlegender allgemeiner Befund von Stark besagt weiter, daß Serien mit *s*- oder *p*-Lauftermen nicht aufgespalten, sondern nur verbreitert oder verschoben werden, daß also der Zerfall in mehrere elektrische Komponenten erst beim *d*-Laufterm merklich wird. (Ob dieser Satz auch noch Gültigkeit hat für Linien sehr hoher Gliednummer mit *s*- oder *p*-Lauftermen, können wohl erst weiter verfeinerte Beobachtungen entscheiden.) Ich möchte darauf hinweisen, daß ein gewisses Analogon zu diesem allgemeinen Befunde bereits beim Starkeffekt des Wasserstoffs auftritt, den wir ja theoretisch vollkommen beherrschen.

Der Term $N/1^2$ der allgemeinen Balmerformel gehört zur Quantensumme *1* (Kreisbahn). Die Epstein-Schwarzschildsche Theorie des Starkeffektes liefert als elektrische Schwingungsänderung

$$\Delta\nu = \frac{3hF}{8\pi^2 me}(n_2 - n_1)\cdot(n_1 + n_2 + n_3)$$

(F = Feldstärke, n_1, n_2 „parabolische" Quantenzahlen, n_3 „äquatoriale" Quantenzahl, welche letztere nach Bohr > 0 sein muß.) Nun ist beim Term $N/1^2$

$$n_1 + n_2 + n_3 = 1,$$

also wegen $n_3 > 0$

$$n_1 = n_2 = 0$$

und daher auch

$$\Delta\nu = 0.$$

„Die innerste Bahn des Wasserstoffatoms bleibt in Strenge einfach und unverschoben." Hierin kann man ein Gegenstück zu der allgemeinen Feststellung Starks über den elektrischen Effekt beim *s*-Term sehen.

Selbstverständlich spielt der Term $N/1^2$ in der Balmerserie keine Rolle, sondern kommt lediglich in der ultravioletten Lymanserie in Betracht. Daß auch der konstante Term $N/2^2$ der Balmerserie zum Starkeffekt viel weniger beiträgt als der Laufterm $N/3^2$, $N/4^2 \ldots$, wird durch die mathematische Theorie des Starkeffekts in Evidenz gesetzt und durch Starks Feinzerlegungen der Balmerserie augenfällig.

Die Theorie des Starkeffekts beim Wasserstoff und der allgemeine Charakter der Beobachtungen bei anderen Elementen lassen keinen Zweifel darüber, daß, wie wir bereits S. 241 sagten, das Kombinationsprinzip für den Starkeffekt gelte. Daß wir es aus den Zerlegungsbildern nicht unmittelbar ablesen können, d. h. daß wir diese nicht als glatte Superposition des elektrischen Effektes auf Anfangs- und Endbahn erkennen, liegt lediglich an dem Eingreifen des *Auswahlprinzipes*. Dieses unterdrückt einzelne und betont andere der nach dem Kombinationsprinzip möglichen Komponenten. Indem es die gegenseitigen Werte der Quantenzahlen von Anfangs- und Endbahn in Rechnung stellt, wirkt es nicht additiv wie das Kombinationsprinzip, sondern selektiv. Allgemein gesprochen würden die Zerlegungsbilder des Starkeffektes viel leichter zu entziffern sein, wenn sie nicht durch das Auswahlprinzip modifiziert würden (natürlich nicht in der Größe der Schwingungszahlen, wohl aber in den Intensitäten und in dem Vorkommen der Schwingungszahlen).

Immerhin wird es auch beim Starkeffekt wasserstoffunähnlicher Elemente eine fruchtbare Aufgabe sein, den beobachteten elektrischen Effekt in die Anteile von Anfangs- und Endbahn zu zergliedern, sobald die Feinzerlegungen bei solchen Elementen ähnlich vollständig bekannt sein werden wie beim Wasserstoff. Gegenwärtig, wo nur wenige durch das Auswahlprinzip in ihrer Intensität betonte Komponenten beobachtet werden, ist der kombinatorische Aufbau der Zerlegungsbilder noch ganz undurchsichtig.

Auswahlprinzip und Kombinationsprinzip wirken in entgegengesetzten Richtungen. Das Kombinationationsprinzip entwirrt die Erscheinungen, indem es sie als Überlagerung der einfacheren Verhältnisse bei den einzelnen Termen erkennen läßt; das Auswahlprinzip verwirrt sie, indem es die Überlagerung unvollständig und damit unübersichtlich macht und von beiden Termen gleichzeitig abhängt. Der volle Erfolg, welcher der relativistischen Feinstrukturtheorie bei den Paschenschen Messungen der ionisierten Heliumlinien beschieden war, beruhte zum Teil darauf, daß hier glücklicher und unerkannterweise das Auswahlprinzip durch starke elektrische Anregung außer Kraft gesetzt war. Nur hierdurch war es möglich, in Paschens Zerlegung der Linie

$$\lambda = 4686, \quad \nu = N\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right)$$

die Überlagerung des Tripletts und Quadrupletts von End- und Anfangsbahn nachzuweisen. Wäre dagegen das Auswahlprinzip bei diesen Aufnahmen in vollem Umfange wirksam gewesen, so wären von den 12 Komponenten nur 5 erschienen; der einfache kombinatorische Aufbau der Bilder wäre dann möglicherweise unerkannt geblieben.

Auch die Schwierigkeiten beim Zeemaneffekt (Erklärung der Rungeschen Zähler, gegenseitige Zuordnung der Zerlegungsbilder verschiedener Termkombinationen), denen wir im § 8 begegneten und die wir dort nicht überwinden konnten, hatten ihren Grund offensichtlich in der Wirksamkeit eines unbekannten Auswahlprinzipes, welches die einfache Regel des Kombinationsprinzipes durchkreuzte. Nur die Zusammensetzung der Rungeschen Nenner bleibt vom Auswahlprinzipe unbeeinflußt. Für diese gilt daher als reiner Ausfluß des additiven Kombinationsprinzipes unser multiplikativer Zerlegungssatz.

(Eingegangen 23. März 1920.)

3. *Die Erdalkalisauerstoffphosphore; von Ferdinand Schmidt.*

(Aus dem Radiologischen Institut der Universität Heidelberg.)

Einleitung.

Die Untersuchungen Herrn Lenards über die Eigenschaften der Erdalkalischwefelphosphore haben zu wichtigen Ergebnissen über den Aufbau der Leuchtzentren und über die Vorgänge in den Zentren während des Leuchtens dieser Phosphore geführt.[1]) In beiden Vorstellungen kommt dem Schwefelatom eine besondere Tätigkeit zu. In den Zentren bewirkt das Schwefelatom die Bindung der Erdalkali- und Metallatome zu einem phosphoreszenzfähigen Gebilde, während des Leuchtvorgangs dient das Schwefelatom dazu, die vom Metallatom während der Erregung losgelösten Elektronen aufzuspeichern, um sie bei der Abklingung wieder an das Metallatom zurückzugeben. Es erhebt sich nun die Frage: Ist der Schwefel allein dazu befähigt, jene vielseitigen Tätigkeiten auszuführen, oder werden auch dem Schwefel chemisch ähnliche Elemente, wie der Sauerstoff, das Selen oder das Tellur geeignet sein, an seine Stelle zu treten? Die Versuche der Herren W. E. Pauli[2]) und Hirsch[3]) haben diese Frage beantwortet. Es ist den

1) Über die Entwicklung der Vorstellungen über den Zentrenbau siehe: P. Lenard u. V. Klatt, Ann. d. Phys. 15. S. 670. 1904; P. Lenard, Ann. d. Phys. 31. S. 668ff. 1910 und besonders P. Lenard: Über Ausleuchtung und Tilgung der Phosphore durch Licht IV. Sitzungsber. d. Heidelberger Ak. d. Wiss. Abt. A. 1918. 11. Abh.

Die Literaturangaben zur Entwicklung der Vorstellungen über die Vorgänge während des Leuchtens finden sich bei P. Lenard: Über Ausleuchtung und Tilgung der Phosphore durch Licht I. Sitzungsber. d. Heidelberger Ak. d. Wiss. Abt. A. 1917. 5. Abh. Fußnote 9.

2) W. E. Pauli, Ann. d. Phys. 38. S. 870. 1912.

3) J. Hirsch, Diss. Heidelberg. S. 62ff. 1912.

genannten Herren gelungen, Erdalkaliselen- und sauerstoffphosphore in derselben Zusammensetzung wie die Lenardschen Erdalkalischwefelphosphore herzustellen. Die Untersuchung über die Erdalkaliselenphosphore des Herrn W. E. Pauli, der man die Auffindung der Herstellungsbedingungen und die Kenntnis der Haupteigenschaften dieser Phosphore verdankt, ist von Herrn F. Kittelmann[1]) weitergeführt worden. Herr Kittelmann hat eine Reihe neuer Erdalkaliselenphosphore gefunden und die genaue spektrale Lage der Banden und der Erregungsverteilungen, wie die Temperatureigenschaften dieser Phosphore festgelegt. Auch ist es ihm gelungen, durch einen Vergleich entsprechender Erdalkalischwefel- und selenphosphore neue Bestätigungen der Lenardschen Phosphoreszenztheorie zu geben. Herr Hirsch hat die Herstellungsbedingungen und die Temperatureigenschaften der von ihm gefundenen Erdalkalisauerstoffphosphore untersucht; es handelt hierüber der Schlußabschnitt seiner Dissertation. Genügende Unterlagen für einen Vergleich mit den Erdalkalischwefelphosphoren, wie sie die Untersuchung des Herrn Kittelmann für die Erdalkaliselenphosphore bietet, fehlen jedoch noch. Es ergibt sich daher die Notwendigkeit, die Erdalkalisauerstoffphosphore einer eingehenden Experimentaluntersuchung zu unterwerfen, um dann durch einen Vergleich der Eigenschaften entsprechender Erdalkalisauerstoff- schwefel- und selenphosphore neue Einblicke in den Aufbau der Phosphoreszenzzentren und die Leuchtvorgänge zu gewinnen.

Die Herstellung der Erdalkalisauerstoffphosphore.

Als Ausgangsmaterial für die Erdalkalisauerstoffphosphore wurden die Karbonate des Calciums, des Strontiums und des Bariums verwandt. Die Reindarstellung dieser Ausgangsmaterialien geschah nach den von den Herren Lenard und Klatt für die Erdalkalischwefelphosphore ausgearbeiteten Methoden.[2]) Das Calciumkarbonat wurde durch Erhitzen in einem offenen Porzellantiegel in das Oxyd übergeführt. Bei

1) F. Kittelmann, Diss. Jena 1915 und Ann. d. Phys. 46. S. 177. 1915.

2) P. Lenard u. V. Klatt, Ann. d. Phys. 15. S. 656. 1904.

dem Strontium- und Bariumkarbonat war letzteres wegen ihrer sehr hoch liegenden Dissoziationstemperatur nicht möglich.[1])

Zu den Grundmaterialien wurde genau wie bei den Erdalkalischwefelphosphoren in kleinen Mengen ein schmelzbarer Zusatz, wie NaCl, NaF, Na_2HPO_4, CaF_2, MgF_2, Li_3PO_4, KH_2PO_4, $K_2B_8O_{10}$, in sorgfältig reinem Zustand zugesetzt.[2]) Grundmaterial und Zusatz wurden in einer Reibschale innig gemischt, eine bestimmte geringe Menge Metallsalzlösung — Bi oder Cu oder Mn oder Pb in salpetersaurer Lösung — zugesetzt, wiederum gut gemischt, das Ganze in einen Porzellantiegel gefüllt und in einem Hempelofen eine bestimmte Zeit auf einer bestimmten Glühtemperatur gehalten. Nach dem Erkalten bildete der Phosphor einen weißen oder schwach gefärbten Kuchen, der dann in einer Reibschale durch vorsichtiges Drücken mit einem Pistill zerkleinert werden konnte. Die Erdalkalisauerstoffphosphore zeichneten sich nach dem Glühen durch große Gleichmäßigkeit aus, nur in den seltensten Fällen wurde Schichtenbildung beobachtet. Die Phosphore verderben in freier Luft infolge Aufnahme von Wasser und Kohlensäure und müssen daher nach ihrer Verwendung zu Versuchen stets in gut gereinigten und getrockneten Glasröhren eingeschmolzen werden.

Die Zusammensetzung der Erdalkalisauerstoffphosphore und alle anderen Herstellungsbedingungen finden sich weiter unten bei den einzelnen Phosphoren eingehend aufgeführt. Die schon von Herrn Hirsch gefundenen Phosphore sind mit angegeben und durch Hinzufügung des Namens Hirsch gekennzeichnet. Hinter jedem Phosphor ist die Farbe seines

---

1) Herr Hirsch (a. a. O. S. 63) schließt aus dem Aufbrausen der Strontiumphosphore bei Betupfen mit Salzsäure, daß auch nach starkem Glühen das Karbonat die Hauptmasse dieser Phosphore bildet. Inwieweit das in den Strontium- und Bariumphosphoren vorhandene Karbonat das Leuchten beeinflußt, entzieht sich vorläufig meiner Beurteilung. Hier sei nur erwähnt, daß im allgemeinen die Strontium- und Bariumphosphore lichtschwächer sind als die Calciumphosphore, die kein Karbonat enthalten.

2) Über Reinigung und Wirkungsweise der Zusätze siehe P. Lenard u. V. Klatt, Ann. d. Phys. 15. S. 689. 1904. Kapitel F.

Nachleuchtens angeführt.[1]) Die am stärksten und dauernsten nachleuchtenden Proben sind mit einem Stern versehen. Über die angewandten Glühtemperaturen gibt folgende Reihenfolge Auskunft.

Es soll bedeuten:

1. Schwache Rotglut: Hempelofen mit großem Bunsenbrenner geheizt. Luftzufuhr zum Brenner so geregelt, daß Ofen nur schwach rötlich glüht.
2. Rotglut: Genau wie 1. Ofen in Rotglut.
3. Helle Rotglut: Hempelofen mit Gebläseflamme geheizt. Ofen in heller Rotglut.
4. Stärkste Hitze: Hempelofen mit Gebläseflamme geheizt. Ofen in Gelbglut.

Die Calciumphosphore.

Cu: 1. 1 g CaO, 0,1 g NaCl. 0,0001 g Cu (Hirsch). 16 Min. Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *blau* (α-Bande).

*2. 1 g CaO, 0,1 g MgF_2, 0,0001 g Cu (Hirsch). Farbe des Nachleuchtens: *blau* (α-Bande).

*3. 1 g CaO, 0,1 g MgF_2, 0,0009 g Cu. 20 Min. helle Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *rotgelb* (γ-Bande).

4. 1 g CaO, 0,06 Li_3PO_4, 0,03 $CaFl_2$, 0,0009 g Cu. 20 Min. helle Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *rotgelb* (γ-Bande).

5. 1 g CaO, 0,05 KH_2PO_4, 0,05 $K_2B_6O_{10}$, 0,0009 Cu. 20 Min. helle Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *rotgelb* (γ-Bande).

Geringe Metallmengen und besonders Zusatz von NaCl bevorzugen die blaue Bande, größere Metallmengen die rotgelbe Bande.

---

1) Hinter die Angabe der Farbe des Nachleuchtens ist in Klammern die Bezeichnung der Bande gesetzt, wie sie sich aus einem Vergleich entsprechender Banden der Sauerstoff- und Schwefelphosphore ergab (siehe Tab. 3).

Mn: 1. 1 g CaO, 0,06 NaCl, 0,001 Mn (Hirsch). Farbe des Nachleuchtens: *gelb* (α-Bande).

*2. 1 g CaO, 0,1 NaCl, 0,0005 Mn. 15 Min. helle Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *gelb* (α-Bande).

Hier hat sich NaCl als Zusatz stets am besten bewährt; alle anderen Zusätze ergaben bedeutend lichtschwächere Proben.

Pb: *1. 1 g CaO, 0,06 g CaF_2, 0,0003 g Pb (Hirsch). Farbe des Nachleuchtens: *bläulich purpur* (β- u. γ-Bande).

*2. 1 g CaO, 0,06 CaF_2 0,001 g Pb. 20 Min. helle Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *gelb* (γ-Bande).

3. 1 g CaO, 0,1 g NaCl, 0,0003 g Pb. 20 Min. helle Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *blau* (β-Bande).

Größere Metallmengen ergeben die gelbe Bande, geringe Metallmengen die blaue Bande.

Bi: 1. 1 g CaO, 0,1 g MgF_2, 0,0005 g Bi (Hirsch). Farbe des Nachleuchtens: *purpur violett* (α- u. γ-Bande).

2. 1 g CaO, 0,1 g MgF_2, 0,0005 g Bi. 20 Min. Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *violett* (α-Bande).

3. 1 g CaO, 0,1 g NaCl, 0,00025 g Bi (Hirsch). 2 Proben im elektrischen Ofen bei 1050° u. 870° geglüht. Farbe des Nachleuchtens: *purpur violett* (α- u. γ-Bande).

*4. 1 g CaO, 0,1 g NaCl, 0,00032 g Bi. 20 Min. helle Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *violett* (α-Bande).

5. 1 g CaO, 0,03 g NaF, 0,0003 g Bi. 20 Min. schwache Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *violett* (α-Bande).

6. 1 g CaO, 0,05 g $Na_2B_4O_7$, 0,03 CaF_2. 20 Min. helle Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *violett* (α-Bande).

7. 1 g CaO, 0,02 g Li_3PO_4, 0,02 g CaF_2, 0,00024 g Bi. 20 Min. helle Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *violett* (α-Bande).

8. 1 g CaO, 0,02 KH_2PO_4, 0,02 $K_2B_6O_{10}$, 0,00048 g Bi. 20 Min. helle Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *violett* (α-Bande).

Die CaOBi-Phosphore sind die dauernsten der gesamten hier untersuchten Phosphore.

Reines CaO mit verschiedenen Zusätzen geglüht, ergab schwach blaues oder gelbes Nachleuchten nach Erregung, das wohl auf Verunreinigung des Ausgangsmaterials durch Cu oder Mn zurückzuführen ist.

Die Strontiumphosphore.

Cu: 1. 1 g $SrCO_3$, 0,07 g CaF_2, 0,0001 g Cu (Hirsch). Farbe des Nachleuchtens: *blau.*

2. 1 g $SrCO_3$, 0,07 g CaF_2, 0,0001 g Cu. 20 Min. Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *grün* (α-Bande).

3. 1 g $SrCO_3$, 0,07 g CaF_2, 0,0001 g Cu. 20 Min. helle Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *grün* (α-Bande).

4. 1 g $SrCO_3$, 0,07 g CaF_2, 0,0001 g Cu. 10 Min. stärkste Hitze. Farbe des Nachleuchtens: *grün* (α-Bande).

5. 1 g $SrCO_3$, 0,07 g NaCl, 0,0001 g Cu. 20 Min. helle Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *grün* (α-Bande).

6. 1 g $SrCO_3$, 0,07 g MgF_2, 0,0001 g Cu. 20 Min. helle Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *grün* (α-Bande).

*7. 1 g $SrCO_3$, 0,01 g Li_3PO_4, 0,01 g CaF_2, 0,0001 g Cu. 20 Min. helle Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *grün* (α-Bande).

8. 1 g $SrCO_3$, 0,02 KH_2PO_4, 0,02 g $K_2B_6O_{10}$, 0,0001 g Cu. 20 Min. helle Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *grün* (α-Bande).

Die Farbe des Nachleuchtens der SrOCu-Phosphore ist grün. Das von Hrn. Hirsch gefundene blaue Nachleuchten konnte trotz eifrigen Bemühens, wie oben ersichtlich, nicht wiedergefunden werden.

Mn: 1. 1 g $SrCO_3$, 0,1 g NaCl, 0,0005 g Mn. 15 Min. helle Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *grün* (α-Bande).

Pb: 1. 1 g $SrCO_3$, 0,1 g NaCl, 0,0004 g Pb. 20 Min. helle Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *grün* (α-Bande).

2. 1 g $SrCO_3$, 0,1 g NaCl, 0,0001 g Pb. 20 Min. helle Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *grün* (α-Bande).

*3. 1 g $SrCO_3$, 0,1 g NaF, 0,0001 g Pb. 10 Min. helle Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *blaugrün* (α- u. β-Bande).

Hier bevorzugt der Zusatz von NaCl die grüne Bande; NaF läßt die blaue und grüne Bande erscheinen mit Bevorzugung der blauen.

Bi: *1. 1 g $SrCO_3$, 0,06 g MgF_2, 0,0001 g Bi (Hirsch) 20 Min. Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *blau* (*α*-Bande).

2. 1 g $SrCO_3$, 0,1 g NaCl, 0,0003 g Bi. 20 Min. Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *blau* (*α*-Bande).

Die Bariumphosphore.

Cu: 1. 1 g $BaCO_3$, 0,1 g NaCl, 0,00006 g Cu. 15 Min. schwache Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *gelb* (*α*-Bande).

*2. 1 g $BaCO_3$, 0,01 g Li_3PO_4, 0,00001 g Cu. 15 Min. schwache Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *gelb* (*α*-Bande).

3. 1 g $BaCO_3$, 0,01 g Li_3PO_4, 0,000003 g Cu. 15 Min. schwache Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *gelb* (*α*-Bande).

4. 1 g $BaCO_3$, 0,01 g NaF, 0,00006 g Cu. 15 Min. schwache Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *gelb* (*α*-Bande).

*5. 1 g $BaCO_3$, 0,01 g Li_3PO_4, 0,0001 g Cu. 15 Min. schwache Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *blau*.

Die Bariumkupferphosphore ergeben auch ohne Zusätze gutleuchtende Proben. Es tritt dann in den meisten Fällen die blaue Bande auf. Geglühtes Bariumkarbonat leuchtet bläulich, Bariumkarbonat mit Zusatz ohne Metall geglüht grünlich. Man kann daher annehmen, daß das Karbonat mit Spuren von Kupfer verunreinigt ist. Bei Zugabe von mehr als 0,0005 g Cu färben sich die Bariumphosphore allmählich tiefrotbraun unter Beeinträchtigung ihres Leuchtens, während unter der genannten Metallmenge die Phosphore weiß aussehen.

Pb: *1. 1 g $BaCO_3$, 0,1 g Na_2HPO_4, 0,0001 g Pb. 15 Min. Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *gelbgrün* (*β*-Bande).

2. 1 g $BaCO_3$, 0,1 g KH_2PO_4, 0,0001 g Pb. 10 Min. Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *gelbgrün* (*β*-Bande).

Bi: *1. 1 g $BaCO_3$, 0,06 g KH_2PO_4, 0,0004 g Bi. 15 Min. schwache Rotglut. Farbe des Nachleuchtens: *grün* (α-Bande).

Mn scheint im Bariumkarbonat keiner Phosphoreszenz fähig zu sein.

Die gesamten Bariumphosphore benötigen zu ihrer Herstellung tiefere Temperaturen als die Calcium- und Strontiumphosphore.

Die bei jedem Metall in jedem der drei Grundmaterialien aufgeführten Phosphore sind natürlich nicht die einzigen hergestellten Proben. Es ist für einen bestimmten Zusatz immer nur der bestleuchtende Phosphor angegeben, wie er durch planmäßige Veränderung der Metallmenge und der Glühtemperatur entstanden ist. Sind bei demselben Zusatz mehrere Proben mit veränderter Metallmenge angeführt, so geschah dieses, um den Weg, der zur Auffindung mehrerer Banden desselben Phosphors führte, deutlich zu machen, wie z. B. bei CaOCu oder BaOCu.

Die gereinigten Grundmaterialien mit Zusätzen geglüht, zeigten, wie angegeben, immer die Mn- oder Cu-Phosphoreszenz. Es ist nicht zu bezweifeln, daß tatsächlich stets geringfügige Mengen von Mn oder Cu in den Ausgangsmaterialien vorhanden waren, da die Erfahrungen mit den Schwefelphosphoren zeigten, daß das angewandte Reinigungsverfahren diese Metalle nicht ganz zu entfernen vermag.[1]) Einen Anhalt für Eigenphosphoreszenzen der reinen Oxyde oder Karbonate der Erdalkalien geben also unsere Beobachtungen nicht.

Die Erregungsverteilungen der Erdalkalisauerstoffphosphore.

Es handelt sich im folgenden um die Beantwortung der Frage, durch welche Lichtwellenlängen wird jede einzelne Bande der Erdalkalisauerstoffphosphore zum Leuchten erregt. Hr. Hirsch[2]) hat ganz allgemein gefunden, daß die Erregung der Erdalkalisauerstoffphosphore zu dauerndem Nachleuchten erst weit im Ultraviolett einsetzt und daß Erregung während der Belichtung schon bei längeren Wellen stattfindet.

1) P. Lenard und V. Klatt, Ann. d. Phys. 15. S. 641. 1904. Abschnitt 131—136.

2) J. Hirsch, Diss. Heidelberg 1912. S. 64.

Lichtquelle. Zur Feststellung der spektralen Erregungsverteilung mußte der Phosphor flächenhaft ausgebreitet, spektral zerlegtem Licht ausgesetzt werden. Durch die Erstreckung der Erregungsverteilung der Erdalkalisauerstoffphosphore weit in das Ultraviolett wurde es nötig, eine Lichtquelle zu finden, die ein genügend lichtstarkes und weit in das Ultraviolett reichendes Spektrum lieferte. Bis jetzt wurde zur Feststellung der Erregungsverteilung von Phosphoren in der Regel das Spektrum eines Nernstschen Fadens benutzt, das bis 250 $\mu\mu$ völlig kontinuierlich ist. Für das weitere Ultraviolett trat die Quarzquecksilberlampe nach Arons ein, die in dem Gebiet unterhalb 250 $\mu\mu$ großen Linienreichtum besitzt. Jedoch hat die Quarzlampe den großen Nachteil, ein diskontinuierliches Spektrum zu liefern, was die genaue Festlegung maximaler Erregungsstellen in jenem Wellenlängengebiet ungeheuer erschwert. Auch gegen die Anwendung des Eisenbogens, wie ihn Hr. Kittelmann[1]) zur Feststellung der Erregungsverteilungen der Erdalkaliselenphosphore verwandte, spricht obiger Einwand. Von allen anderen Lichtquellen[2]), die im Ultraviolett mehr oder minder kontinuierliche Spektren mit genügender Lichtstärke liefern, schien eine kondensierte Funkenentladung zwischen Aluminiumelektroden in Wasser am besten den Zwecken dieser Untersuchung zu entsprechen. Hr. Konen[3]) fand, daß das Spektrum einer solchen Funkenentladung kontinuierlich bis etwa 230 $\mu\mu$ reichte. Weiter ausgebildet und untersucht wurde diese Lichtquelle von den Herren Grebe[4]), Mies[5]), Finger[6]), Ciechomski[7]) und Henri.[8]) Ciechomski und Henri fanden dabei ein sehr kräftiges, kontinuierliches Spektrum bis etwa 215 $\mu\mu$.

Die von mir verwandte Lichtquelle war technisch der von Hrn. Ciechomski benutzten ähnlich eingerichtet. Das Funken-

1) F. Kittelmann, Diss. Jena 1915, S. 24.

2) Eine zusammenfassende Beschreibung dieser Lichtquellen findet sich bei L. Ciechomski, Diss. Freiburg (Schweiz) 1910, S. 12 ff.

3) H. Konen, Ann. d. Phys. 9. S. 779. 1903.

4) L. Grebe, Zeitschr. f. wiss. Phot. 3. S. 377. 1905.

5) W. Mies, Zeitschr. f. wiss. Phot. 7. S. 357. 1909.

6) H. Finger, Zeitschr. f. wiss. Phot. 7. S. 329. 1909.

7) L. Ciechomski, a. a. O. S. 22.

8) V. Henri, Phys. Zeitschr. 14. S. 516. 1913.

gefäß, in dem die Entladung in Wasser vor sich ging, hatte die in der Fig. 1 ersichtliche Form. In einem würfelförmigen Messinggefäß von 7 cm Kantenlänge und 0,2 cm Wandstärke waren rechts und links zwei kreisförmige Öffnungen von 1,5 cm Radius gelassen. In jede derselben konnte ein in einer Messinghülse festsitzender Hartgummiklotz eingeschraubt werden. Der Hartgummiklotz war durchbohrt und mit einer eingeschraubten Messingröhre versehen, die im Innern wiederum ein Schraubengewinde enthielt, in das die Aluminiumelektrode von 0,6 cm Durchmesser eingeschraubt werden konnte. Eine auf die äußere

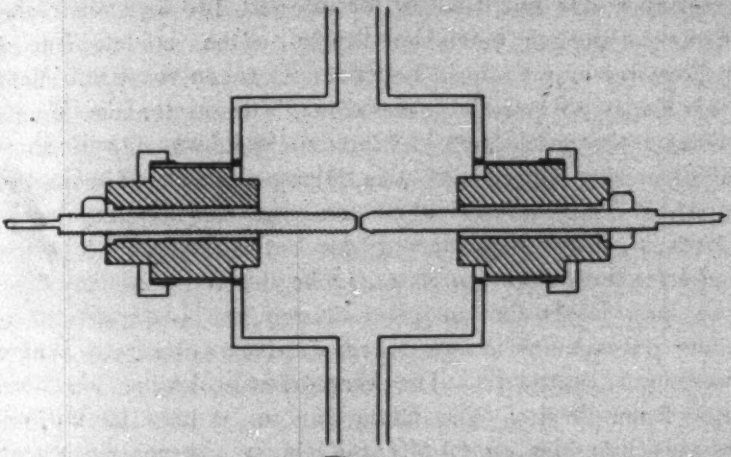


Fig. 1.

Messinghülse des seitlichen Ansatzes aufschraubbare Kappe aus Messing verhinderte ein Rutschen des Hartgummiklotzes nach außen. Wie die einzelnen Verschraubungen ineinandergreifen, ersieht man am besten aus der Fig. 1. Diese feste Verschraubung des Hartgummiklotzes und der Elektroden, die außen noch Druckschrauben trugen, war unbedingt zur Konstanthaltung der Funkenstrecke im Wasser notwendig. Die Funkenstrecke im Wasser durfte in der Regel 2—3 mm nicht überschreiten, ohne daß der Funken abriß; außerdem erlitten die Elektroden durch die explosionsartig im Wasser vor sich gehende Entladung sehr starke Erschütterungen. Das Funkengefäß hatte vorn und hinten je eine Öffnung; die vordere war durch eine gummigedichtete Quarzplatte, die hintere durch eine gummigedichtete Glasplatte verschlossen. Die letztere

diente zur Beobachtung der Funkenstrecke und der Trübung des durchfließenden Wassers. Oben und unten waren an das Funkengefäß zwei Messingrohre eingelassen, die mit der Wasserleitung in Verbindung standen. Hierdurch wurde das Wasser im Funkengefäß ständig in Fluß gehalten, um das durch das Zerstäuben der Aluminiumelektroden getrübte Wasser zu entfernen und etwaige entwickelte Gasblasen fortzuschaffen.

Die Wasserfunkenstrecke nebst einer verstellbaren Luftfunkenstrecke in Serienschaltung mit der Wasserfunkenstrecke lagen im Sekundärkreis eines großen Klingelfußschen Induktoriums, das mit 10—15 Weber und 140 Volt über einen Simonunterbrecher betrieben wurde. Den beiden Funkenstrecken war eine Batterie Leydener Flaschen von 0,005 Mikrofarad Kapazität parallel geschaltet. Die hinter die Wasserfunkenstrecke geschaltete Luftfunkenstrecke war für die Regelmäßigkeit des Überganges des Wasserfunkens unbedingt erforderlich; man erhält ohne sie nur schwer regelmäßige Funken.[1]) Durch Veränderung der Luftfunkenstrecke und der Wasserfunkenstrecke (zu jeder Größe der Wasserfunkenstrecke kann man leicht die geeignete Länge der Luftfunkenstrecke finden) hat man es in der Hand, die Lichtstärke des Wasserfunkens zu verändern. Die Wasserfunkenstrecke überschritt selten 2 mm Weite. Die Entladung im Wasser konnte ohne Unterbrechung bis zu 10 Minuten Dauer unterhalten werden.

Beobachtungsverfahren. Das Licht des Aluminiumwasserfunkens durchsetzte nach dem Verlassen des Funkengefäßes einen großen Quarzspektralapparat[2]), der so aufgestellt war, daß das Spektrum senkrecht von oben auf die horizontal liegende Phosphorschicht fallen konnte. Zur Erzielung größter Lichtstärke wurde der Funken selbst an Stelle des Spaltes gesetzt.[2])

Da durch die Untersuchungen Hrn. Hirschs festgestellt war, daß die Erdalkalisauerstoffphosphore in der Regel ihren

1) H. Konen, a. a. O., S. 768.

2) Näheres über diesen lichtstarken Quarzspektralapparat siehe P. Lenard, Ann. d. Phys. 31. S. 643. 1910. Zu einleitenden Versuchen, die erst einen Überblick über die Erscheinungen bieten sollten, wurde an Stelle des großen Spektralapparates ein kleinerer Quarzspektralapparat mit Cornuschen Doppelprisma und Spalt benutzt.

Dauerzustand des Leuchtens bei höheren Temperaturen als Zimmertemperatur besaßen, mußte die Phosphorschicht, auf die das Spektrum entworfen werden sollte, auf die Temperatur des Dauerleuchtens der Erdalkalisauerstoffphosphore gebracht werden, um die Erregungsverteilung dieses Leuchtens sichtbar zu machen und ausmessen zu können. Zu diesem Zwecke wurde der Phosphor, in einer Schichtdicke von 1 mm auf einer Aluminiumpfanne ruhend, von unten her elektrisch geheizt. Die Ermittelung der Temperatur der Phosphorschicht in ihrer Abhängigkeit von der Heizstromstärke geschah in der Weise, daß auf die Aluminiumpfanne geeignete Stoffe von bekanntem Schmelzpunkte in gleich dicker Schicht wie der Phosphor aufgestreut wurden und die zur Schmelzung dieser Stoffe eben nötigen Heizstromstärken abgelesen wurden.[1]) Zu diesen Heizstromstärken wurden die zugehörigen Klemmenspannungen der Heizvorrichtung ermittelt, daraus das Produkt $J^2 \cdot W$ gebildet und die Temperaturerhöhungen über Zimmertemperatur mit den dazu gehörigen $J^2 \cdot W$ graphisch aufgetragen. Aus dieser Schaulinie, die mit geringer Abweichung eine Gerade ergab, konnte jederzeit zu einem gemessenen $J^2 \cdot W$ die Temperatur der Phosphorschicht abgelesen werden.

Neben der Phosphorschicht war eine Millimeterteilung angebracht. Die Teilung wurde in Wellenlängen in der Weise geeicht, daß an die Stelle der Phosphorschicht ein Platinbariumcyanürschirm gelegt wurde, auf dem die bekannten Linien der Quecksilberamalgamlampe, des Aluminium- und Magnesiumfunkens entworfen wurden.[2]) Ein über die Phosphorschicht und die Millimeterteilung verschiebbarer Zeiger erlaubte, die Lage der Linien auf der Teilung festzulegen. Die Heiz-

1) Vgl. über dieses Verfahren: P. Lenard, Über Ausleuchtung und Tilgung der Phosphore durch Licht II. Sitzungsber. d. Heidelb. Ak. d. Wiss. Math.-naturw. Kl. Abt. A, 1917. 7. Abt. S. 10.

2) Die Feststellung der Wellenlänge der Linien geschah für Al nach Hagenbach u. Konen, Atlas der Emissionsspektren. Fischer, Jena 1903. S. 23. Rainer Grünter: Zeitschr. f. wiss. Photogr. 13. S. 1. 1913. F. Exner u. E. Haschek: Sitzungsber. d. kais. Ak. d. Wiss. Math.-naturw. Klasse 106. Abt. IIa. 1897. Tafel V; für Mg nach Hagenbach u. Konen, a. a. O., S. 18. F. Exner u. E. Haschek, a. a. O., Tafel VI; für Hg nach L. Arons, Ann. d. Phys. 23. S. 176, 1907 u. Tafel II, Nr. I u. II.

vorrichtung, die Millimeterteilung und der Phosphortrog blieben bei allen Versuchen unverrückbar fest; trotzdem wurde nach einer Reihe von Versuchen die Eichung der Teilung durch die Linien des Aluminiumluftfunkens auf ihre Richtigkeit geprüft.

Eine Stellvorrichtung erlaubte die Phosphorschicht mitsamt der elektrischen Heizung im Strahlengange des Spektrums zu neigen. Die Phosphorschicht wurde so eingestellt, daß das für die Erregung der Phosphore unwirksame Rot und Gelb des Aluminiumwasserfunkens außerhalb der Schicht[1]) und das gesamte übrige Spektrum über die Phosphorfläche in einer Länge von 7,5 cm fiel. Das kontinuierliche Spektrum des Aluminiumwasserfunkens reichte in genügender Stärke bis 220 $\mu\mu$.

Die Lichtstärkenunterschiede im kontinuierlichen Spektrum des Aluminiumwasserfunkens, besonders auch die hellen Linien, die in ihm auftreten[2]), konnten die Auffindung der Stellen hellsten Nachleuchtens der Erregungsverteilung und überhaupt ihr ganzes Aussehen leicht fälschen. Die Messung des Lichtstärkenverlaufes im Spektrum mit Thermosäule und Galvanometer würde sich wegen der Unregelmäßigkeit des Funkenüberganges und der Veränderlichkeit der Größe der Funkenstrecke bei der zur Erhaltung gut meßbarer Galvanometerausschläge nötigen langen Dauer der Entladung sehr schwierig gestalten. Ein einfacheres Verfahren, die Wirkung der Lichtstärkenunterschiede im Spektrum auf die Erkennung der Erregungsverteilungen zum Verschwinden zu bringen, war das, den Phosphor nach der Ausmessung der Erregungsverteilung durch Belichtung mit dem Aluminiumwasserfunken einer erneuten Ausmessung unter Belichtung mit dem Spektrum eines Magnesiumwasserfunkens zu unterziehen. Das Spektrum des Magnesiumwasserfunkens ist kontinuierlich bis etwa 200 $\mu\mu$, jedoch nicht so lichtstark als dasjenige des Aluminiumwasserfunkens. Jedenfalls ist die Lichtstärkenverteilung im Spektrum des Magnesiumwasserfunkens eine andere als im Spektrum des

1) Dadurch fiel auch die Störung der Beobachtung der Erregungsverteilung durch das lichtstarke Rot und Gelb des Spektrums weg.

2) Vgl. darüber und auch über den Mg-Wasserfunken H. Finger, Zeitschr. f. wiss. Phot. 7. S. 337. 1909.

Aluminiumwasserfunkens, so daß durch den Vergleich der mit beiden Spektren erhaltenen Erregungsverteilungen die Wirkung der Lichtstärkenunterschiede im Spektrum ausgeglichen werden konnte. Außerdem bot der Magnesiumwasserfunken noch die Möglichkeit, die Erregungsverteilungen für das Gebiet von $\lambda = 220\ \mu\mu$ bis $\lambda = 200\ \mu\mu$ zu vervollständigen.

Bei der Feststellung der Erregungsverteilungen von Phosphoren, die gleichzeitig mehrere Banden besaßen, mußte die Beobachtung der Erregungsverteilung jeder Bande getrennt von der der anderen vor sich gehen. Hierzu standen mehrere Wege offen. Einmal konnte versucht werden, durch geeignete Wahl der Herstellungsbedingungen die Banden voneinander zu trennen. Daß dies in manchen Fällen möglich war, zeigt die Übersicht über die Herstellungsbedingungen der Erdalkalisauerstoffphosphore. War letzteres nicht möglich, so konnte durch geeignete Farbfilter die Erregungsverteilung der einen Bande von der der anderen getrennt werden. Außerdem wurde durch ein kleines lichtstarkes Taschenspektroskop jede einzelne Erregungsstelle auf ihre Farbe geprüft.

Ergebnisse der Beobachtungen. Bei Beobachtung des Leuchtens während und nach einer spektralen Belichtung wurden deutlich drei voneinander unabhängig verlaufende Erregungsvorgänge beobachtet[1]):

1. Eine Erregungsverteilung während der Belichtung (Momentanerregung = *m*-Erregung).

2. Eine kurzdauernde Erregungsverteilung nach Schluß der Belichtung, in großer Stärke im äußersten Ultraviolett beginnend uud zu längeren Wellen schwächer werdend (Ultravioletterregung = *u*-Erregung).

3. Eine langnachleuchtende Erregungsverteilung (Dauererregung = *d*-Erregung).

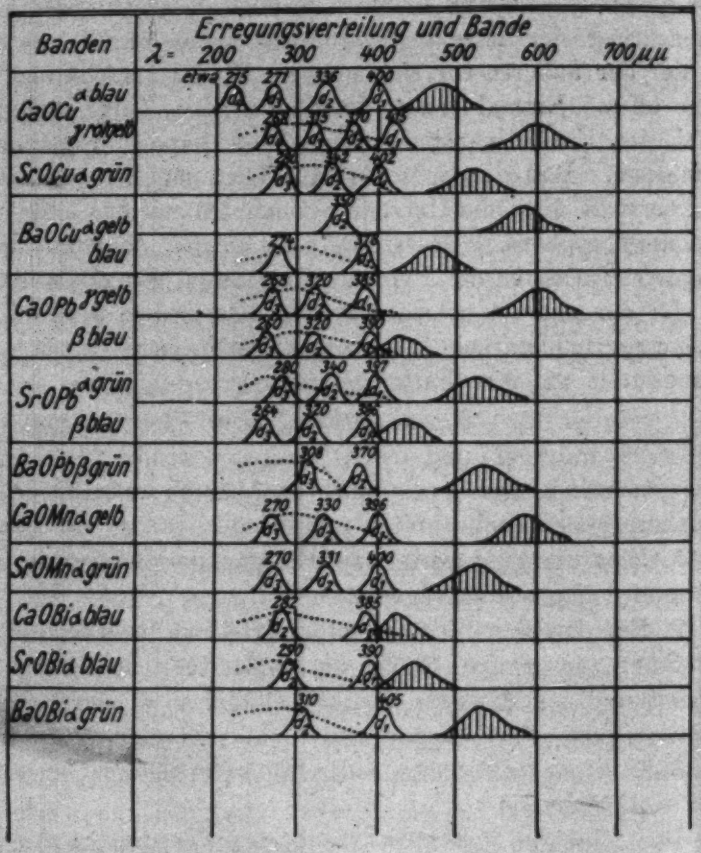
Das Leuchten bei allen drei Erregungsarten ist von der gleichen Farbe (dieselbe Bande).

Die Dauererregungsverteilung. Die festgestellten Erregungsverteilungen des Dauerleuchtens (*d*-Erregungsstellen) sind in der Tab. 1 durch die ausgezogenen Schaulinien dargestellt. Es ist

1) Vgl. über die gleichen Verhältnisse bei den Erdalkalischwefelphosphoren: P. Lenard, Ann. d. Phys. 31. S. 645 u. 646. 1910.

dabei die Wellenlänge des erregenden Lichtes als Abszisse und die Stärke des erregten Phosphoreszenzlichtes (geschätzt) als Ordinate aufgetragen. Die d-Erregungsstellen sind von den längeren zu den kürzeren Wellen fortlaufend mit d_1, d_2 ... bezeichnet. Außer den d-Erregungsstellen sind in der Tab. 1

Tabelle 1.



die spektralen Lagen der Banden und die weiter unten behandelte Erregungsverteilung während der Belichtung gezeichnet.

Man kann aus der Tab. 1 folgendes entnehmen:

1. Zu jeder einzelnen Bande der Erdalkalisauerstoffphosphore gehört eine ihr eigentümliche Dauererregungsverteilung.

2. Jede Dauererregungsverteilung besteht aus mehreren Stellen hellsten Nachleuchtens, die gleiche Abstände voneinander haben und durch dunklere Zwischenräume voneinander getrennt sind.

3. Die Erregungsverteilungen der Banden desselben Metalls in den drei Erdalkalien verschieben sich beim Übergange von Ca zu Sr zu Ba nach längeren Wellenlängen (vgl. die Banden des Bi, oder CaOCu blau, SrOCu grün, BaOCu gelb).

4. Die Stokesche Regel ist nirgends verletzt.

In der Tab. 1 ist der Abfall der Lichtstärke zu beiden Seiten der Stellen hellsten Nachleuchtens gleichmäßig gezeichnet. In Wirklichkeit besitzt jede *d*-Erregungsstelle einen mehr oder minder ausgedehnten Schweif nach der Seite der kürzeren Wellen. Dieser ist jedoch schlecht auszumessen, nur die Lagen der Stellen hellsten Nachleuchtens sind durch die Messungen sicher gestellt. Außerdem sind die Räume zwischen den *d*-Erregungsstellen nicht immer von Erregung frei, besonders nach einer lang andauernden Belichtung. Auch während des Abklingens werden die Zwischenräume des öfteren heller und heller; die *d*-Erregungsstellen verschwimmen sozusagen miteinander.

Stärke und Dauer des Nachleuchtens der d-Erregungsstellen. Die Stärke des Nachleuchtens der einzelnen *d*-Erregungsstellen ist für dieselbe Bande von Phosphorprobe zu Phosphorprobe je nach den Herstellungsbedingungen verschieden. In den meisten Fällen sind die kurzwelligeren *d*-Erregungsstellen am hellsten. Zuweilen fehlen auch ein oder mehrere *d*-Erregungsstellen vollständig. In der Tab. 1 sind die Leuchtstärken der einzelnen *d*-Erregungsstellen gleich groß gezeichnet, da obige Verschiedenheiten der Stärke des Nachleuchtens schlecht zur Darstellung zu bringen sind.

Auch die Dauer des Nachleuchtens der einzelnen *d*-Erregungsstellen ist verschieden. So sind besonders die längerwelligen Stellen hellsten Nachleuchtens zwischen 380—420 $\mu\mu$ in der Regel von äußerst kurzer Dauer und nur in den ersten Augenblicken nach Schluß der Belichtung in ihrem Leuchten sichtbar.[1])

1) Aus diesen Verschiedenheiten der Stärke und Dauer der einzelnen *d*-Erregungsstellen erklärt sich auch die Tatsache, daß die Erd-

Veränderungen in der Lage der d-Erregungsstellen. Bei manchen Phosphoren konnte ein geringes Wandern der *d*-Erregungsstellen nach kürzeren Wellen während fortschreitender Erregung beobachtet werden.[1]) Am auffälligsten war sie messend zu verfolgen bei einem SrOCuLi- und einem CaOMnNa-Phosphor bei ihren d_2-Erregungsstellen[2]) (Tab. 2).

Tabelle 2.

SrOCuLi		CaOMnNa	
Dauer der Erregung	Lage von d_2 $\mu\mu$	Dauer der Erregung	Lage von d_2 $\mu\mu$
2′ 55″	352	1′ 0″	332
3′ 30″	348	2′ 15″	329
5′ 50″	340	3′ 30″	327
—	—	6′ 0″	322

Eine weitere sehr geringe Verschiebung einiger *d*-Erregungsstellen trat bei Temperaturerhöhung ein, und zwar erfolgte die Verschiebung zu längeren Wellen. Es gelang die Messung der Verschiebung bei den folgenden Phosphoren:

CaOCu blau zeigte eine Verschiebung der d_2-Erregungsstelle von 8 $\mu\mu$ bei einem Temperaturunterschied von $+14^0$ bis 210^0 C.

---

alkalisauerstoffphosphore unter Glas selbst bei starker Bestrahlung kaum erregt werden. Ebenso findet Herr Hirsch, Diss. Heidelberg 1911. S. 64, daß die Erdalkalisauerstoffphosphore im Spektrum der Quecksilberquarzlampe nur bei ihren kurzwelligsten Linien Nachleuchten zeigen, was ihn zu dem nicht richtigen Schluß verleitet, daß nur eine einzige *d*-Erregungsstelle vorhanden sei.

1) Herr Lenard hat diese Erscheinung zum ersten Male bei CaSBi *α* und *β* ausgemessen und gedeutet. P. Lenard: Über Ausleuchtung und Tilgung der Phosphore durch Licht III. Sitzungsber. d. Heidelb. Ak. d. Wiss. Math. naturw. Kl. Abt. A. 8. Abh. S. 29 u. 31. 1918.

2) Bei beiden Phosphoren liegt die d_2-Erregungsstelle in einem für die Messung obiger Verschiebung sehr günstigen Wellenlängengebiet zwischen 300 u. 350 $\mu\mu$. Hier ist die Erregungsstelle wegen der Dispersion im erregenden Spektrum nicht so weit auseinandergezogen wie bei kürzeren Wellen und nicht so zusammengedrängt wie bei längeren Wellen. Außerdem kann in diesem Wellenlängengebiet die *a*-Erregung nicht sehr ins Spiel kommen. Bei den langwelligen Erregungsstellen wirken auch noch die oben angeführten Verschiedenheiten in Stärke und Dauer des Nachleuchtens ungünstig.

SrOCu grün zeigte eine Verschiebung der d_2-Erregungsstelle von 4 $\mu\mu$ bei einem Temperaturunterschied von + 14° bis + 110° C.

Die u-Erregung. Über die Dauererregung gelagert und von kürzerer Dauer als diese beginnt die *u*-Erregung[1]) in großer Lichtstärke im äußersten Ultraviolett und wird langsam nach längeren Wellen hin schwächer und schwächer, bis sie schließlich ganz aufhört. Die Grenze der *u*-Erregung ist verwaschen und schlecht durch Messungen faßbar; sie liegt zwischen 300 und 400 $\mu\mu$. Die Dauer der *u*-Erregung ist nicht einheitlich, sondern wächst vom äußersten Ultraviolett zu längeren Wellen. Die *u*-Erregung wurde bei allen untersuchten Erdalkalisauerstoffphosphoren beobachtet, am besten bei CaOBi. Sie ist auf Tab. 1 nicht eingezeichnet.

Die Momentanerregung. Die Momentanerregung tritt nur auf während der Belichtung mit dem erregenden Spektrum, mit Aufhören der Erregung verschwindet sie sofort (Fluoreszenz). Sie zeigt eine über ein großes Wellenlängengebiet ausgebreitete Stelle hellsten Leuchtens im Ultraviolett und eine etwas verwaschene Grenze zu längeren Wellen. Die Beobachtung der hellsten Stelle des Momentanleuchtens wurde durch die bei manchen Banden auftretende Erstreckung des Dauerleuchtens über ein großes Temperaturgebiet sehr erschwert (z. B. bei CaOBi violett), da dann immer die gleichzeitig vorhandenen Stellen hellsten Leuchtens der Dauererregung störend wirkten. Bei manchen Banden konnte die Momentanerregung im unteren oder oberen Momentanzustand (siehe den folgenden Abschnitt) für sich allein beobachtet werden. Auch gelang die Herstellung einiger Phosphorproben, die nur die Momentanerregung ohne Dauerleuchten zeigten. In der Tab. 1 ist die Momentanerregungsverteilung durch die gestrichelten Schaulinien wiedergegeben. Es kommt bei dieser Darstellung allerdings nur dem langwelligen Ende der Momentanerregungsverteilung einige Sicherheit in der Messung zu.

---

1) Vgl. auch die anschauliche Beschreibung des Verlaufs der *u*-Erregung bei den Schwefelphosphoren bei P. Lenard, Ann. d. Phys. 31. S. 646. 1910.

Die spektralen Lagen der Banden und ihre Temperatureigenschaften.

Die spektralen Lagen der Banden.

Beobachtungsverfahren. Zur Feststellung der spektralen Lagen der Banden der Erdalkalisauerstoffphosphore diente ein lichtstarker gradsichtiger Spektralapparat. Ein vermittelst einer Schraube über das Spektrum verschiebbarer Zeiger konnte auf die hellste Stelle des Leuchtens der Bande eingestellt werden. Die jeweilige Stellung des Zeigers war auf einer in Wellenlängen geeichten Teilung am Umfange der Schraube ablesbar. Die Beobachtung erfolgte teils während oder nach einer Belichtung mit dem ultravioletten Spektrum des Aluminiumwasserfunkens teils während oder nach einer Erregung mit Kathodenstrahlen.

Zur Erregung mit Kathodenstrahlen wurde eine Aluminiumfensterröhre nach Lenard benutzt. Die Kathodenstrahlen trafen von oben auf die zur bequemeren Beobachtung des Leuchtens etwas im Strahlengange geneigte Phosphorschicht. Die erregenden Kathodenstrahlen hatten etwa $^1/_3$ Lichtgeschwindigkeit.

Bei allen Sauerstoffphosphoren konnten allgemein folgende Leuchterscheinungen bei Erregung mit Kathodenstrahlen[1]) festgestellt werden:

1. Es wird ein sehr helles und äußerst kurzdauerndes Leuchten erregt.

2. Bei Betrachtung dieses Leuchtens im Spektralapparat erscheint die Bande des Phosphors in großer Lichtstärke im Spektrum. Sie hat dieselbe spektrale Lage wie bei Erregung mit Licht. Außer der Bande wird auch noch anderes Leuchten im Phosphor erregt, das sich in den meisten Fällen in einer schwachen Erhellung des übrigen Spektrums kundgibt.

3. Es ist nicht das Momentanleuchten der Bande, welches so sehr hell erregt wird, sondern das Dauerleuchten der Bande. Dies geht daraus hervor, daß dieses Leuchten nach Schluß der Erregung eine äußerst kurze, aber doch noch beobachtbare Zeit andauert. Auch konnte in einem Falle festgestellt werden,

1) Ganz ähnliche Erscheinungen sind bei den Schwefelphosphoren gefunden worden. Vgl. darüber P. Lenard: Über Lichtsummen bei Phosphoren. Sitzungsber. d. Heidelb. Akad. d. Wiss. Abt. A. 1912. 5. Abh. S. 25 u. f.

daß eine Bande, die bei Erregung mit Licht nur momentan erschien, bei Erregung mit Kathodenstrahlen überhaupt nicht auftrat. Es gelang diese Feststellung bei der gelben Bande des BaOCu-Phosphors. Diese trat bei einer Temperatur von etwa 150° C. bei Erregung mit Licht stark momentan auf, während bei Erregung mit Kathodenstrahlen bei derselben Temperatur nicht eine Spur von ihr zu sehen war.

4. Neben dem kurzdauernden Aufleuchten der Bande wird noch ein wesentlich lichtschwächeres Nachleuchten der Bande erregt, das allerdings erst nach einer langen Bestrahlungsdauer merklich auftritt.

Beobachtungsergebnisse. Die spektralen Lagen der Banden der Erdalkalisauerstoffphosphore sind in der Tab. 1 (durch Striche ausgefüllte Schaulinien) gegeben. Es ist dort die Abhängigkeit der Leuchtstärke der Bande von der Wellenlänge aufgezeichnet. Außerdem ist in der Zusammenstellung der Temperaturlagen für jede einzelne Bande die Stelle ihres hellsten Leuchtens in $\mu\mu$ angeführt.

Die Lage einer und derselben Bande im Spektrum ist von Phosphorprobe zu Phosphorprobe je nach den Herstellungsbedingungen mehr oder minder großen Verschiebungen unterworfen. Trotzdem ist es immer dieselbe Bande, da sie die gleiche Erregungsverteilung und die gleichen Temperatureigenschaften behält. Es ist deshalb die Wellenlängenangabe der hellsten Stelle des Leuchtens im Spektrum, die an sich immer eine gewisse durch Messungen schlecht feststellbare Breite besitzt, als Mittelwert der Bandenlage aufzufassen. Auch die in der Tabelle gezeichnete Breite der Bande gibt nur eine mittlere ungefähre Breite aller beobachteten Ausschnitte aus dem Spektrum an.[1])

Die Temperatureigenschaften der Banden.

Die Temperatureigenschaften der Erdalkalisauerstoffphosphore sind in ihren Grundzügen schon von Hrn. Hirsch[2]) für

1) Natürlich könnte eine eingehende Untersuchung der Breite und des Lichtstärkenverlaufes der Banden viel Neues bringen. Jedoch genügen für die Zwecke der vorliegenden Untersuchung die eben angeführten Bestimmungen der Bandenlagen vollkommen.

2) J. Hirsch, a. a. O. S. 65 u. f.

CaOCu, CaOPb, CaOMn, CaOBi, SrOCu und SrOBi untersucht worden. Die Angaben Hrn. Hirschs erstrecken sich jedoch nur auf eine allgemeine Beschreibung der Farbe des Leuchtens dieser Phosphore bei verschiedenen Temperaturen, ohne auf eine Trennung gleichzeitig vorhandener Banden einzugehen. Zusammenfassend kommt Hr. Hirsch zu folgenden Ergebnissen über die Temperatureigenschaften der von ihm untersuchten Phosphore:

1. Die Sauerstoffphosphore erlangen erst bei hoher Temperatur große Leuchtstärke und Dauer; bei gewöhnlicher Temperatur ist ihre Leuchtkraft nur gering.

2. Der Dauerzustand selbst erstreckt sich meist über einen außerordentlich großen Temperaturbereich.

3. Das kräftige Aufleuchten beim Erhitzen zeugt von starker Aufspeicherung der Energie durch die Sauerstoffphosphore.

Diese von Hrn. Hirsch gefundenen Eigenschaften konnten im wesentlichen bestätigt und auch auf die neuhinzugefundenen Erdalkalisauerstoffphosphore erweitert werden.

Zur Beobachtung der Temperatureigenschaften der Banden in der Hitze wurde die schon oben beschriebene elektrische Heizvorrichtung benutzt; zur Beobachtung in der Kälte wurde der Phosphor in einem mit einem Gummikork verschlossenen Uviolglasrohr liegend in eine Kältemischung aus fester Kohlensäure und Alkohol getaucht.

Ganz allgemein kann man bei den hier untersuchten Phosphoren drei Temperaturzustände beobachten:

1. Den unteren Momentanzustand: Es tritt nur Leuchten während der Erregung und kein Nachleuchten auf.

2. Den Dauerzustand: Es tritt Leuchten während der Belichtung und dauerndes Nachleuchten auf.

3. Den oberen Momentanzustand: Es tritt nur Leuchten während der Belichtung auf.

Ein wichtiger Unterschied zwischen dem unteren und oberen Momentanzustand besteht darin, daß im ersteren eine starke Aufspeicherung der erregenden Lichtenergie stattfindet, die durch Erhitzen des Phosphors jederzeit in Gestalt der Bande wieder ausgetrieben werden kann. Es sei hier noch ein Versuch angeführt, der das starke Aufspeicherungsvermögen

der Sauerstoffphosphore zeigt. Man kann gewisse CaO-Phosphore bei Zimmertemperatur erregen, ohne daß sie bei dieser Temperatur merklich nachleuchten. Werden nun die bei Zimmertemperatur erregten Phosphore auf 300—400° C. erhitzt, so leuchten sie bei dieser Temperatur stark und dauernd auf. Eine plötzliche Abkühlung von der hohen Temperatur auf Zimmertemperatur läßt die Phosphore wieder dunkel werden. Eine nochmalige Erhitzung ohne eine neue Erregung bewirkt, daß die Phosphore von neuem in derselben Farbe aufleuchten. Man kann die bei Zimmertemperatur erregten Phosphore stundenlang, auch tagelang im Dunkeln liegen lassen und dann bei Erhitzung wieder die Abgabe der aufgespeichert gewesenen Energie erhalten.

Die Temperaturlagen der einzelnen Banden.

CaOCu.

Blaue Bande (α): $\lambda = 480\ \mu\mu$.

Die Bande befindet sich in tiefen Temperaturen bis etwa 0° im unteren Momentanzustand und von 0° bis zu beginnender Rotglut im Dauerzustand mit einem Bereiche hellsten Leuchtens und größter Dauer zwischen 300 und 400°.

Rotgelbe Bande (γ): $\lambda = 600\ \mu\mu$.

Ihr Dauerzustand beginnt bei etwa 0°. Die Bande erreicht zwischen 150 und 200° einen Bereich größter Lichtstärke und Dauer und geht bei etwa 450° in den oberen Momentanzustand über.

CaOPb.

Blaue Bande (β): $\lambda = 430\ \mu\mu$.

Die Bande hat von $-40°$ bis zur Rotglut Dauer. Ein Bereich größter Dauer befindet sich zwischen 300 und 350°.

Gelbe Bande (γ): $\lambda = 600\ \mu\mu$.

Ihr Dauerzustand beginnt bei etwa 0°, überschreitet zwischen 150 und 200° einen Bereich größter Dauer und geht bei etwa 350° in den oberen Momentanzustand über.

Außer der blauen und gelben Bande trat zuweilen während einer Bestrahlung mit ultraviolettem Licht noch eine grüne Bande bei etwa 570 $\mu\mu$ auf. Sie war durch keinerlei Mittel zum Nachleuchten zu bringen.

CaOMn.

Gelbe Bande (α): $\lambda = 590\ \mu\mu$.

Dauerbereich der Bande von $-40°$ bis etwa $500°$. Größte Lichtstärke und Dauer zwischen $150°$ und $250°$. Die Bande verschiebt sich mit steigender Temperatur deutlich zu kürzeren Wellenlängen. So befindet sich bei etwa $450°$ die hellste Stelle der Bande bei $\lambda = 580\ \mu\mu$.

CaOBi.

Blaue Bande (α): $\lambda = 435\ \mu\mu$.

Ihr Dauerzustand reicht von $-40°$ bis zur Rotglut. Selbst bei Rotglut ist das prächtige Blauviolett noch nicht im Nachleuchten verschwunden. Ein Bereich größter Lichtstärke und Dauer wurde zwischen 300 und $350°$ gefunden. Anzeichen einer gelben Bande wurden bei einigen CaOBi-Phosphoren beobachtet.

SrOCu.

Grüne Bande (α): $\lambda = 520\ \mu\mu$.

Ihr Dauerzustand erstreckt sich von -40 bis $500°$ C. mit einem Bereich größter Lichtstärke und Dauer zwischen 200 und $300°$ C. Bei Erregung mit Kathodenstrahlen wurde auch eine Bande bei $\lambda = 600\ \mu\mu$ gesehen. Sie trat jedoch nur während einer Bestrahlung auf.

SrOPb.

Blaue Bande (β): $\lambda = 440\ \mu\mu$.

Sie hat Dauer von -40 bis $450°$ C. Zwischen 200 und $300°$ C. erreicht die Dauer des Nachleuchtens den größten Wert.

Grüne Bande (α): $\lambda = 525\ \mu\mu$.

Die Bande ist im Nachleuchten sehr lichtschwach. Ihr Dauerzustand scheint sich von $-40°$ bis über $300°$ zu erstrecken.

SrOMn.

Grüne Bande (α): $\lambda = 530\ \mu\mu$.

Ihr Dauerzustand erstreckt sich von -40 bis $300°$. Von $300°$ ab zu höheren Temperaturen oberer Momentanzustand der Bande. Größte Lichtstärke und Dauer der Bande von 100 bis $150°$.

SrOBi.

Blaue Bande (α): $\lambda = 450\ \mu\mu$.

Die Bande hat von -40 bis 500° Dauer mit einem Bereiche größter Lichtstärke und Dauer bei 250 bis 300°.

BaOCu.

Gelbe Bande (α): $\lambda = 590\ \mu\mu$.

Die Bande zeigt Dauer bei -40 und 10° und scheint bei etwa 100° in den oberen Momentanzustand überzugehen.

Blaue Bande: $\lambda = 470\ \mu\mu$.

Die Bande hat Dauer von -40 bis 200°, wo sie in den oberen Momentanzustand übergeht.

BaOPb.

Grüne Bande (β): $\lambda = 540\ \mu\mu$.

Die Bande hat Dauer von $-40°$ bis etwa 200°. Von hier ab zu höheren Temperaturen oberer Momentanzustand der Bande. Die Farbe der Bande wird in der Hitze blau. Im Momentanleuchten bei Zimmertemperatur scheint noch eine gelbgrüne Bande vorhanden zu sein.

BaOBi.

Grüne Bande (α): $\lambda = 535\ \mu\mu$.

Dauerzustand der Bande von -40 bis 200°. Von 200° ab geht die Bande in den oberen Momentanzustand über.

Die Beobachtung der Temperatureigenschaften der Sauerstoffphosphore bestätigte für alle hier untersuchten Banden die am Anfange dieses Abschnittes angeführten von Hrn. Hirsch gefundenen Gesetzmäßigkeiten. Zu diesen kommt noch die folgende Gesetzmäßigkeit hinzu, die sich durch einen Vergleich der Temperatureigenschaften der Banden der Calcium-, Strontium- und Baryumphosphore leicht ableiten läßt; sie lautet:

Die Dauerbereiche der Banden eines und desselben Metalles, besonders die obere Grenze des Nachleuchtens und der Bereich der größten Dauer und Lichtstärke, verschieben sich beim Übergange vom Calcium zum Strontium zum Baryum zu niedrigeren Temperaturen.[1])

1) Die Erdalkalischwefelphosphore zeigen das gleiche Verhalten. Vgl. P. Lenard u. V. Klatt, Ann. d. Phys. 15. S. 429. 1904. Tab. III.

Vergleich entsprechender Sauerstoff-, Schwefel- und Selen-Phosphore.

Durch die in dieser Untersuchung in wesentlich erweiterten Umfang als früher vorgenommene, quantitative Feststellung der Eigenschaften der Sauerstoffphosphore ist die Möglichkeit gegeben, die Eigenschaften entsprechender Sauerstoff-, Schwefel- und Selenphosphore miteinander zu vergleichen. Es erübrigt sich, auf die vielen Ähnlichkeiten im Verhalten der drei Phosphorgattungen näher einzugehen. Sie berechtigen zu dem Schlusse, daß die Vorstellungen über den Zentrenbau und über den Vorgang des Leuchtens, zu denen das eingehende Studium der Schwefelphosphore bereits geführt hat, für alle drei Phosphorgattungen in ihren Grundzügen Gültigkeit haben. Die Verschiedenheiten im Verhalten der Phosphore werden, da in entsprechenden Phosphoren jeder Gattung das Erdalkali und das wirksame Metall die gleichen geblieben sind, durch die Natur des Gattungsatoms (O, S, Se) bedingt sein. Gelingt es also, die Verschiedenheiten der Eigenschaften der drei Phosphorgattungen restlos auf den Einfluß der Natur des Gattungsatoms zurückzuführen, so sind dadurch neue Bestätigungen für die Gültigkeit der erwähnten Anschauungen gegeben.

Einen Vergleich der spektralen Lagen der Banden und der Dauererregungsverteilungen in den drei Phosphorgattungen ermöglicht die Tab. 3. In der ersten Spalte sind die Banden der verschiedenen, wirksamen Metalle aufgeführt. In den folgenden Spalten sind für jede Phosphorgattung die spektralen Lagen der hellsten Stellen des Nachleuchtens der Dauererregungsverteilung und die spektralen Lagen der Banden selbst eingeschrieben. Man kann aus der Tabelle sofort folgendes Gesetz ablesen:

„Die Stellen hellsten Nachleuchtens der Dauererregungsverteilungen und die Banden sind bei den Sauerstoffphosphoren zu kürzeren Wellen und bei den Selenphosphoren zu längeren Wellen gegenüber den Erregungsverteilungen und Banden der Schwefelphosphore verschoben."

Die Verschiebung ist bei den Selenphosphoren größer als bei den Sauerstoffphosphoren. Wie Hr. Lenard[1]) bei den

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 31. S. 661. 1910.

Tabelle 3.

Bezeichnung der Bande		Sauerstoffphosphor Erregungsverteilung d_4	d_3	d_2	d_1	Bande $\mu\mu$	Schwefelphosphor nach Lenard 1910 u. Hirsch 1912 Erregungsverteilung d_5	d_3	d_2	d_1	Bande $\mu\mu$	Selenphosphor nach Kittelmann 1915 Erregungsverteilung d_4	d_3	d_2	d_1	Bande $\mu\mu$
CaCu	α	etwa 215	271	336	400	480		etwa 275	349	416	515	—	—	—	—	—
	β	—	—	—	—	—		„ 260	etwa 318	(375)	425				405	495
	γ	268	315	370	415	600	(285)		(365)	etwa 430	620					
SrCu	α		280	342	402	520		etwa 300	360	430	535	—	—	—	—	—
	β	—	—	—	—	—			etwa 328	400	455					509
BaCu	α			350		590		(285)	etwa 358	441	600				470	670
	β	—	—	—	—	—			„ 370		535					590
blau			274		378	470					463					
CaPb	α	—	—	—	—	—	(264)	etwa 290	331	(435)	540			400		555
	β		260	320	390	430		„ 280	351	(435)	420	—	—	—	—	—
	γ		268	320	385	600				etwa 390*)	610					
SrPb	α		280	340	397	525		etwa 298	358	(435)	550	—	—	—	—	—
	β		264	320	386	440		(290)	etwa 364		450			370	440	495
BaPb	α	—	—	—	—	—		etwa 332	377		580				430	668
	β		308	370		540		„ 325	381		550	—	—	—	—	—
CaMn	α		270	330	396	590		etwa 270	349	419	600	—	—	—	—	—
SrMn	α		270	331	400	580		etwa 290	357	431	555		330	(380)	455	659
CaBi	α			282	385	435		220	320	418	445	—	—	—	—	—
	β	—	—	—	—	—			260	418	520			(378)	448	662
SrBi	α			290	390	450			etwa 330	436	470	—	—	—	—	—
	β	—	—	—	—	—					550			398	480	646
BaBi	α			310	405	535			etwa 360	463	540	—	—	—	—	—
	β	—	—	—	—	—					600			430	502	660

*) Diese Wellenlängenangabe verdanke ich einer persönlichen Mitteilung Hrn. Lenards. Sie ist bis jetzt noch nicht veröffentlicht gewesen.

Schwefelphosphoren nachgewiesen hat, sind spektrale Verschiebungen entsprechender Banden und Erregungsverteilungen auf Änderungen der Dielektrizitätskonstante des Phosphormaterials zurückzuführen. Das den Schwefelphosphoren genau gleiche Verhalten, das die Sauerstoffphosphore und die Selenphosphore (vgl. z. B. die Erregungsverteilungen von CaSeBi β, SrSeBi β, BaSeBi β) in bezug auf die Verschiebung der Erregungsverteilungen und Banden beim Übergange von Ca zu Sr zu Ba zeigen, läßt darauf schließen, daß bei den Sauerstoff- und Selenphosphoren genau wie bei den Schwefelphosphoren die Dielektrizitätskonstanten des Phosphormaterials beim Übergange von Ca zu Sr zu Ba wachsen. Selbst die geringen Verschiebungen der hellsten Stellen des Nachleuchtens der Erregungsverteilungen bei Temperaturänderung, wie sie bei den Sauerstoffphosphoren (S. 280) entsprechend den Schwefelphosphoren gefunden wurden, haben sicherlich bei beiden Phosphorgattungen Änderungen der Dielektrizitätskonstante des Phosphormaterials mit der Temperatur zur Ursache.[1])

Es ist daher mit großer Sicherheit anzunehmen, daß auch die spektralen Verschiebungen entsprechender Banden und Erregungsverteilungen beim Übergange von einer Phosphorgattung zur anderen nur durch eine Veränderung der Dielektrizitätskonstanten der Phosphormaterialien zu erklären sind. Der Sinn dieser Verschiebungen würde für die Sauerstoffphosphore eine kleinere und für die Selenphosphore eine größere Dielektrizitätskonstante als für die Schwefelphosphore erwarten lassen.[2])

Es muß hier noch erwähnt werden, daß die Verschiebungen der Bandenlagen sowohl in den drei Erdalkalien, als auch von Phosphorgattung zu Phosphorgattung nicht immer im Sinne der Veränderungen der Dielektrizitätskonstanten erfolgen. Auffällige

---

1) Für die Schwefelphosphore ist dies durch Messung der Temperaturänderung ihrer Dielektrizitätskonstanten bestätigt worden. Vgl. F. Schmidt, Ann. d. Phys. 44. S. 329. 1914.

2) Ich werde in einer folgenden Arbeit die Dielektrizitätskonstanten der Sauerstoffphosphore messen, um für obige Behauptung den experimentellen Beweis zu bringen. Gleichzeitig werden in dieser Arbeit noch weitere Gesetzmäßigkeiten in den Dauererregungsverteilungen der drei Phosphorgattungen abgeleitet werden.

Beispiele hierfür sind die Lageveränderungen der Banden CaOM α und SrOMn α, CaSeBi β und SrSeBi β und BaSeBi β, CaOPb β und CaSPb β. Die Verschiebungen der Erregungsverteilungen folgen jedoch ohne Ausnahme den Veränderungen der Dielektrizitätskonstante. Hr. Lenard deutet diese Erscheinung dahin, daß für die spektralen Lagen der hellsten Stellen des Nachleuchtens der Erregungsverteilungen nur die mittlere Dielektrizitätskonstante des ganzen Phosphors maßgebend ist, während die Bandenlage außerdem von der allernächsten Umgebung des Metallatoms im Zentrum im hohen Grade beeinflußt wird.

Hinsichtlich der Stärke und Dauer des Nachleuchtens der Banden finden sich in den drei Phosphorgattungen die größten Unterschiede. Bei den Selenphosphoren ist die Stärke und Dauer des Nachleuchtens äußerst gering. Hr. Kittelmann gibt an, daß keiner der Selenphosphore im Dauerzustande nach einer Minute ein Leuchten stärker als 2 aufgewiesen hätte.[1]) Bei den Sauerstoffphosphoren ist die Dauer des Nachleuchtens sicherlich ebenso groß, wenn nicht größer als bei den Schwefelphosphoren. In der Stärke des Nachleuchtens stehen sie im allgemeinen ein wenig hinter den Schwefelphosphoren zurück. Da nach der Vorstellung über den Vorgang des Leuchtens in den Schwefelzentren die Abklingung in der Rückkehr der beim Schwefelatom aufgespeicherten Elektronen besteht, muß für die Unterschiede in der Dauer des Nachleuchtens die Natur des aufspeichernden Atoms maßgebend sein. Man muß daher mit Bezug auf das Schwefelatom annehmen, daß das Sauerstoffatom eine größere, das Selenatom eine kleinere Fähigkeit hat, die Elektronen festzuhalten. Dies steht auch mit der Tatsache in Einklang, daß der elektropositive Charakter vom Sauerstoff, zum Schwefel, zum Selen wächst.

In weiterer Verfolgung dieser Annahme müßte auch der Arbeitsaufwand, der zur Abtrennung des aufgespeicherten Elektrons nötig ist, beim Übergange vom Sauerstoff zum Schwefel zum Selen als aufspeichernden Atom kleiner werden. Da nun

1) Geschätzt nach einem Lichtstärkemaß von 8 Stufen bei P. Lenard u. V. Klatt, Ann. d. Phys. 15. S. 230. 1904, in dem bei Lichtstärke 2 die Farbe des Leuchtens eben noch gut erkennbar ist.

die Abtrennung des Elektrons vom aufspeichernden Atom durch die Wärmebewegung des Zentrums veranlaßt wird, müßten die Banden der Sauerstoffphosphore höhere, die der Selenphosphore aber tiefere Temperaturlagen haben, als die der Schwefelphosphore.[1]) Dies wird in der Tat durch die Untersuchungen der Temperatureigenschaften der drei Phosphorgattungen bestätigt. In der Tab. 4 sind die Temperatureigenschaften der

Tabelle 4.

Bande	Sauerstoffphosphor		Schwefelphosphor nach Lenard u. Klatt 1904		Selenphosphor nach Kittelmann 1915	
	Lage der Bande	Größte Dauer bei	Lage der Bande	Größte Dauer bei	Lage der Bande	Größte Dauer bei
	$\mu\mu$		$\mu\mu$		$\mu\mu$	
CaCu α	480	300 bis 400°	515	17°		
β			425	17°	495	−78 bis 100°
γ	600	150 bis 200°	620	−180 u. 200°		
SrCu α	520	200 bis 300°	540	−45 bis 17°		
β			455	17°	509	−78° −17°
BaCu α	590	10°	600	17° u. in d. Kälte	670	−180°
β			540	300° „ „ „ „	590	17°
blau	470	etwa 150°	468	−45°		
CaBi α	485	300 bis 350°	445	17 bis 200°		
β			520	etwa 300°	662	15°
SrBi α	440	250 bis 300°	470	−45 bis +17°		
β			550	+200	646	−180°
BaBi α	535	etwa 80°	540	etwa −78°	660	−180°
β			550	17°		

Cu- und Bi-Banden[2]) in den drei Erdalkalien nebeneinandergestellt. Es ist dabei die Erfahrung zugrunde gelegt, die wir über einander entsprechende Banden bei dem Vergleich der

1) Dieser Schluß ist bereits von Hrn. Lenard, Über Ausleuchtung und Tilgung der Phosphore durch Licht IV. Sitzungsber. d. Heidelberger Ak. d. Wiss. Abt. A. 1918. 11. Abh. S. 41, gezogen.

2) Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die oben gezogenen Schlüsse auch für die hier nicht aufgeführten Banden stimmen, wenn man die Angaben der Temperatureigenschaften der Banden bei P. Lenard u. V. Klatt, a. a. O. und F. Kittelmann, a. a. O. mit denen in dieser Untersuchung vergleicht.

Erregungsverteilungen gewonnen haben. Man erkennt die Bestätigung obigen Schlusses sofort. Außerdem sieht man auch, was an sich selbstverständlich ist, daß diejenigen Banden, die bei den Schwefelphosphoren Dauerzustand in der Hitze haben, bei den Sauerstoffphosphoren überhaupt nicht auftreten, während die Kältebanden der Schwefelphosphore bei den Selenphosphoren fehlen.[1])

Zusammenfassung der Ergebnisse.

1. Es wurden die Herstellungsbedingungen einer Reihe neuer Erdalkalisauerstoffphosphore gefunden. In mehreren Fällen gelang die Trennung gleichzeitig vorhandener Banden durch Veränderung der Herstellungsbedingungen.

2. Zur spektralen Erregung dieser Phosphore wurde das Spektrum einer kondensierten Funkenentladung unter Wasser zwischen Aluminiumelektroden benutzt. Diese Lichtquelle wurde so vervollkommnet, daß sie ein genügend lichtstarkes, kontinuierliches Spektrum bis etwa 220 $\mu\mu$ lieferte.

3. Die Erregungsverteilungen der hergestellten Phosphore wurden eingehend ausgemessen.

4. Die spektralen Lagen der Banden wurden bestimmt und ihre Temperatureigenschaften festgestellt.

5. Aus einem Vergleich entsprechender Sauerstoff, Schwefel- und Selenphosphore konnten folgende Schlüsse gezogen werden:

a) Die Stellen hellsten Nachleuchtens der Dauererregungsverteilungen und die Banden sind bei den Sauerstoffphosphoren zu kürzeren Wellen und bei den Selenphosphoren zu längeren Wellen gegenüber den Erregungsverteilungen und Banden der Schwefelphosphore verschoben. Der Sinn dieser Verschiebungen würde für die Sauerstoffphosphore eine kleinere und für die Selenphosphore eine größere Dielektrizitätskonstante als für die Schwefelphosphore erwarten lassen.

---

1) Was die verschiedenen Temperaturlagen der Banden eines Metalles in demselben Erdalkali und die bei allen drei Phosphorgattungen festgestellte Verschiebung der Temperaturlagen der Banden zu niederen Temperaturen beim Übergange vom Ca zum Sr zum Ba anlangt, so sei auf ihre Erklärungen in P. Lenard, „Ausleuchtung und Tilgung" IV, a. a. O. Abschnitt 3 hingewiesen.

b) Die Banden der Sauerstoffphosphore haben höhere, die der Selenphosphore haben tiefere Temperaturlagen, als die der Schwefelphosphore.

5.a) und b) waren schon aus früheren Untersuchungen zu schließen, sind aber jetzt in wesentlich erweiterten Umfang festgestellt und quantitativ gefaßt.

Zum Schlusse möchte ich Hrn. Geheimrat Lenard für die Gewährung der Mittel des Instituts für diese Arbeit und für viele wertvolle Ratschläge meinen Dank aussprechen.

(Eingegangen 14. April 1920.)

4. *Eine neue Polarisatorschaltung für Influenz- und Kondensatormaschinen;* von *Heinrich Wommelsdorf.*

Bereits im Jahre 1905 habe ich ein neues allgemeines Polarisationssystem der Kondensatormaschinen mitgeteilt[1]), über das ich in der Folge wiederholt an dieser Stelle[2]) Näheres veröffentlicht habe. Die Berichte sind noch durch die Mitteilung einer inzwischen gefundenen Polarisatorschaltung zu ergänzen, durch die eine Erhöhung der Stromleistung an Influenz- und Kondensatormaschinen um 25 Proz. bei kleinen Entladespannungen erzielt werden kann.

Zum besseren Verständnis ist es erforderlich, zunächst eine soeben im Handel[3]) erschienene neue Form von Kondensatormaschinen (Fig. 1) kurz zu erklären, an der sich die neue Schaltung mit Erfolg zur Anwendung bringen läßt. Ich konstruierte diese neue Type in der Absicht, für Lehrzwecke eine Type zu schaffen, bei der alle Teile möglichst offen zutage liegen und jederzeit überschaut werden können. Das mußte den Vorteil mit sich bringen, im verdunkelten Zimmer an der Leuchterscheinung der gut zu unterscheidenden aus- und einströmenden Elektrizität die Wirkungsweise der Kondensatormaschinen wie auch der Influenzmaschinen im allgemeinen anschaulich demonstrieren zu können.

Von der alten im Jahre 1912 an dieser Stelle[4]) angegebenen Anordnung unterscheidet sich die neue Type hauptsächlich dadurch, daß alle wichtigen an der Influenzierung beteiligten Organe, wie die Scheibe *a* und die vier Felder *b*, frei zutage liegen und unmittelbar zur Hand sind. Nach Lösen einer

1) H. Wommelsdorf, Phys. Zeitschr. **6**. S. 177. 1905.

2) H. Wommelsdorf, Ann. d. Phys. **23**. S. 601 u. 609. 1907; **24**. S. 483. 1907.

3) Die Fabrikation der Kondensatormaschine liegt in den Händen der Berliner Elektros-Gesellschaft, Berlin-Schöneberg, Mühlenstr. 10.

4) H. Wommelsdorf, Ann. d. Phys. **39**. S. 1201. 1912.

einzigen Handschraube m läßt sich jedes der Felder, die im übrigen in einer Rille des festen Gestells g gelagert sind, einzeln zur Seite drehen und dadurch das Innere restlos zugänglich machen. Durch Lösen einer zweiten Handschraube n wird das Feld ganz abnehmbar. Nach Entfernung der vorderen beiden Felder läßt sich wiederum die Scheibe a von der Welle abschrauben.

Hieraus ergibt sich, daß die Demontage und Reinigung einer solchen Kondensatormaschine sehr vereinfacht ist. Da ferner die festen Scheiben bzw. alles Isolationsmaterial zwischen

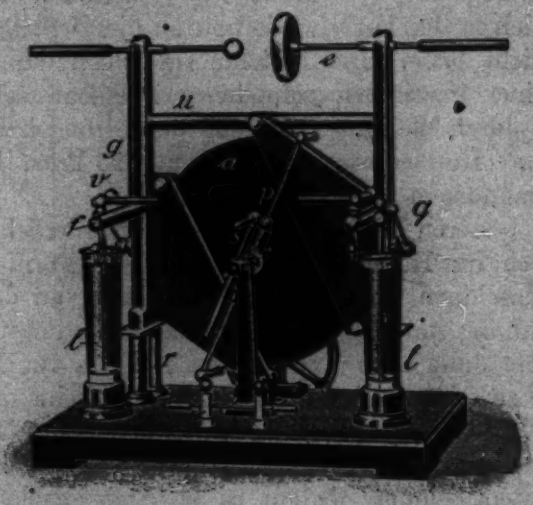


Fig. 1.

den Feldern b, das bei allen Influenzmaschinen ganz besonders zur Verschmutzung neigt und daher häufig auf das sorgfältigste gereinigt werden muß, fortgefallen ist, muß die neue Type für den praktischen Gebrauch der alten entschieden vorgezogen werden, um so mehr, als man erforderlichenfalls in staubigen Räumen über das offene Gestell $g\,u\,r$ einen seidenen Überzug ziehen kann, der die Elektroden e und die Lagerung freiläßt und daher auch während des Betriebes über der Maschine bleiben kann.

Dies vorausgeschickt, komme ich zu der Polarisatorschaltung und damit zunächst nochmals auf Fig. 1 zurück; aus ihr ist deutlich ersichtlich, daß der drehbare, von seinem Lagerbock gut isolierte Polarisator p einen Schalter s besitzt,

der die Einstellung eines veränderlichen Luftwiderstandes gestattet. Mit demselben arbeitet die Maschine nach dem in Fig. 2 wiedergegebenen Polarisationsdiagramm. Durch richtige Einstellung des Schalters *s*, die je nach den jeweiligen Entladespannungen bzw. Funkenlängen verschieden ist, läßt sich eine erhebliche Mehrleistung der Influenz- bzw. Kondensatormaschinen gegenüber der alten von Holtz[1]) herrührenden Schaltung seiner Influenzmaschine erster Art erzielen, die er zunächst ohne, dann vier Jahre später mit einem diametralen Konduktor, d. h. einem kurzschließenden Polarisator ausrüstete.

Durch Messungen mit einem Milliamperemeter stellte ich nun an einer größeren Kondensatormaschine fest, daß in dem Polarisator unter gewissen Umständen ein beträchtlicher Strom fließt. Angenommen, der positive Pol befindet sich bei der in Fig. 1 abgebildeten Maschine an der Kugelelektrode und diese sei weit von der Platte entfernt (vgl. auch Fig. 2), so fließt in dem Polarisator ein Strom von unten nach oben, während bei kleinen Funkenlängen ein solcher von oben nach unten fließt. Dieser letztere läßt sich für kleine Funkenlängen bzw. Entladespannungen, wie sie auch von größeren Influenz- und Kondensatormaschinen bei möglichst hoher Stromstärke häufig gewünscht und entnommen werden, mit Vorteil für die Nutzleistung ausnutzen. Man braucht dazu nur — wie in dem Diagramm Fig. 3 angegeben — die linke Elektrode mit dem oberen, die rechte mit dem unteren Polarisatorteil leitend zu verbinden. Die Folge ist, daß ein zwischen die Elektroden geschalteter Milliamperemeter bei der in Fig. 1 abgebildeten neuen Art von Kondensatormaschinen eine Zunahme der Stromstärke um rund 25 Proz. gegenüber der normalen Schaltung anzeigt.

Voraussetzung ist allerdings, daß der Polarisator im richtigen Winkel eingestellt wird. Während nämlich bei der Schaltung nach Fig. 2 die Stromstärke mit der Verkleinerung des Winkels zwischen der Horizontalen und dem Polarisator innerhalb des möglichen Stellungsbereiches bei der Kondensatormaschine nach Fig. 1 ständig wächst, besitzt sie

1) W. Holtz, Pogg. Ann. **126**. S. 157. 1865; J. C. Poggendorff, Pogg. Ann. **186**. S. 171. 1869.

bei der Schaltung nach Fig. 2 unter etwa 45° ein scharf ausgeprägtes Maximum, so daß die Nutzstromstärke bereits bei geringer Vergrößerung oder Verkleinerung des Polarisatorwinkels erheblich abnimmt. Die bei dieser Schaltung auf den Scheiben und Feldern entstehende Polarität wurde in Fig. 3 eingezeichnet.

Um die jeweils im Polarisator fließende Stromrichtung einem großen Auditorium kenntlich zu machen, kann man in denselben eine Geißlerröhre od. dgl. einschalten. Bei der in Fig. 2 auf den Scheiben und Feldern eingezeichneten Polarität, die bei größeren Elektrodenabständen (Funkenlängen) entsteht, fließt — wie die Röhre anzeigt — ein kräftiger Strom von unten nach oben durch den Polarisator. Schiebt man

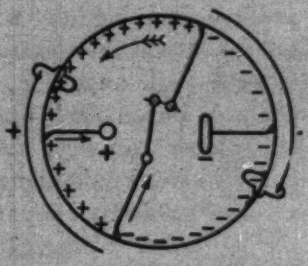


Fig. 2.

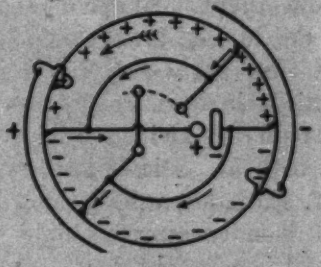


Fig. 3.

nun die Elektroden allmählich zusammen, so wird der Polarisatorstrom — wie man an der Abnahme des Leuchtens der Röhre erkennt — immer kleiner. Schließlich etwa bei einer mittleren Funkenlänge zwischen den Elektroden wird der Polarisationsstrom gleich Null; die Röhre erlischt völlig. Verringert man nun noch weiter die Länge des Funkenstroms, so beginnt die Geißlerröhre von neuem zu leuchten. Gleichzeitig zeigt sie aber, daß der Strom jetzt von oben nach unten durch den Polarisator fließt. Nunmehr wird der Strom um so stärker bzw. das Leuchten der Röhre um so heller, je mehr der Elektrodenabstand weiter verringert wird.

Bemerkenswert ist es noch, daß sich die Schaltbarkeit des Polarisators auch zur Herbeiführung eines Polwechsels benutzen läßt. Es zeigt sich nämlich, daß sich ein solcher dadurch in einfachster Weise erreichen läßt, daß man während

des Betriebes bei weit auseinandergestellten Elektroden den Schalter des möglichst senkrecht gestellten Polarisators einige Sekunden lang weit öffnet. Da man auf diese Weise jederzeit — ohne den Betrieb zu unterbrechen — die Stromrichtung der Kondensatormaschine wechseln kann, hat man bei unerwünschter Polarität, z. B. wenn der Strom in Fig. 1 von rechts nach links statt von der Kugel zur Platte geht, nicht erst nötig, die Elektroden der Maschine abzuschrauben und zu vertauschen.

Auch bei falschem Anschluß eines Apparates von genügend hohem Widerstand, z. B. einer harten Röntgenröhre od. dgl., braucht man nicht erst den Anschluß der Leitungen zu wechseln und damit eine wegen der hohen Spannung zumeist erforderliche Umstellung der Apparatur vorzunehmen. Da grundsätzlich alle Anschlußapparate an die ganz vorn an der Maschine befindlichen Haken bzw. an den beiden darüber befindlichen Vorschaltefunkenstrecken v (Fig. 1) angeschlossen werden sollen, kann man durch Weitstellung dieser den Widerstand fast bei einer jeden Apparatur, wie z. B. bei einer weichen Röhre so weit vergrößern, daß das Umpolen auch bei einer solchen ohne weiteres gelingt.

Durch die in den letzten Jahren gemachten Verbesserungen der Konstruktion, Schaltungsweise, der harmonischen Abmessungen u. dgl. ist die Leistungsfähigkeit der Kondensatormaschine weiter erheblich gesteigert worden. Es wird daher die hier folgende Tabelle von Interesse sein; in ihr wurden zum Vergleich auch die entsprechenden Werte der vordem fast ausschließlich im Handel befindlichen Influenzmaschine nach Holtz zweiter Art[1]) (Wimshurst) hinzugefügt. Als Maßstab für die enorme Spannung beachte man, daß die in der Tabelle angegebene Funkenlänge bei den beiden größten Typen von 55 cm Scheibendurchmesser zwischen Platte und einer Kugel von 50 mm Durchmesser gemessen wurde, also nicht wie bei Induktoren üblich, zwischen Platte und Spitze.

1) W. Holtz, Pogg. Ann. **130**. S. 128 u. 168. 1867; J. C. Poggendorff, Pogg. Ann. **136**. S. 171. 1869; **150**. S. 1. 1873. Über die auffallend geringe Leistung der mehrplattigen Influenzmaschinen dieses Systems vergleiche den Schluß meiner Annalenarbeit **39**. S. 1201. 1912.

Vergleichstabelle.

	Influenzmaschinen nach Holtz zweiter Art[1]) (Wimshurst), bisher fast ausschließl. im Handel				Kondensatormaschinen (Fig. 1)				
Durchmesser der rotierenden Scheibe	26	35	55	41	26	35	45	55	55
Anzahl der rotierenden Scheiben . . .	2	2	2	8	1	1	1	1	1
Größte erreichbare Funkenlg. in mm ca.	100	150	220	170	190	250	300	350	350
Größte erreichbare Stromstärke in Mikroampere ca. . . .	15	40	70	110	400	500	650	750	4000
Kraftbedarf in PS .					$^1/_8$	$^1/_6$	$^1/_5$	$^1/_4$	1

Zum Schlusse sei noch bemerkt, daß sich die Kondensatormaschine zwecks Demonstration auch als Influenzmaschine, und zwar als solche mit eingebetteten Sektoren[2]), die unter dem reklamehaften, nicht von mir herrührenden Namen „Starkstrom-Influenzmaschine“[3]) im Handel ist, mit entsprechender Minderleistung betreiben läßt.

1) Vgl. Anmerkung S. 299.

2) H. Wommelsdorf, Ann. d. Phys. **23.** S. 609. 1907 und **24.** S. 483. 1907.

3) Da die Maschine ausgesprochenen Schwachstrom liefert, ist der Name „Starkstrommaschine“ ungeeignet bzw. irreführend.

(Eingegangen 14. Mai 1920.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1920. № 20.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 63.

1. *Die Gravitation als elektrodynamische Erscheinung;* *von E. Wiechert.*

§ 1. Vorwort.

In einer 1916 erschienenen Arbeit[1]) behandelte ich die Frage, ob Wege zur Erklärung der Perihelbewegung des Merkur offen stehen, wenn man von den Ergebnissen der bisherigen Forschung ausgeht und sich den umwälzenden Vorstellungen der Relativitätstheorie nicht hingibt. Seither fand ich mehrfach Anlaß, mich der Frage von neuem zuzuwenden.

E. Gehrke[2]) und S. Oppenheim[3]) wiesen darauf hin, daß Wege, wie ich sie suchte, auch durch ältere Arbeiten schon gegeben sind. Jetzt ist die Nachricht gekommen, daß bei den Beobachtungen der Sonnenfinsternis am 29. Mai 1919 sich Ablenkungen der Lichtstrahlen beim Vorübergang an der Sonne gezeigt haben, welche den Voraussagen der „allgemeinen Relativitätstheorie" von A. Einstein recht gut entsprechen. Die Einsteinsche Theorie hat so einen Ruhmestitel gewonnen, der bleibend ist, wie auch immer ihr weiteres Schicksal sich gestalten sollte: Eine Entdeckung ist gemacht worden!

Die Sachlage für die Relativitätstheorie ist hier noch um vieles günstiger als bei der Perihelbewegung des Merkur, welche lange bekannt war und für welche vielfach Erklärungen gegeben waren. — Gegenüber dem neuen Erfolg wird man nun freilich nicht aus den Augen lassen dürfen, daß in der dritten Hinsicht, in welcher die allgemeine Relativitätstheorie nachprüfbare Aussagen macht, sie zu versagen scheint. In

1) E. Wiechert, Nachrichten d. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen 1916. S. 124—141; Physikal. Ztschr. 17. S. 442—448. 1916.

2) E. Gehrke, Ann. d. Phys. 51. S. 119—124. 1916.

3) S. Oppenheim, ebenda 53. S. 163—168. 1917.

der Nähe großer Masse sollten nach der Theorie alle Spektrallinien nach Rot verschoben werden; diese Verschiebung ist aber nach mehrfachen sorgfältigen Untersuchungen auf der Sonne jedenfalls in dem von der Theorie verlangten Ausmaß nicht vorhanden. So stellen sich ernste Bedenken ein und regen zu neuen Untersuchungen an.

In meiner Arbeit von 1916 hatte ich eine Ablenkung der Lichtstrahlen im Gravitationsfeld noch nicht in Rechnung gezogen. Das tue ich jetzt. Es ergibt sich eine Theorie, welche die Gravitation in sehr anschaulicher Weise als eine elektrodynamische Erscheinung darstellt. Trotz des völlig verschiedenen Ausgangspunktes stellt sich eine nahe Verwandtschaft der neuen Theorie mit der allgemeinen Relativitätstheorie heraus. Man muß bedenken, daß Prinzipien, wie sie die Relativitätstheorie verwendet, physikalisches Leben erst durch spezielle Vorstellungen gewinnen. Bei der allgemeinen Formulierung ist der physikalische Sinn solcher Prinzipien nur schwer zu erkennen. So glaubten z. B. viele Anhänger der speziellen Relativitätstheorie, das Relativitätsprinzip nötige, die Äthervorstellung aufzugeben, und dennoch gelangte die Theorie bei ihrer weiteren Ausgestaltung zur „allgemeinen" Relativitätstheorie selbst dahin, die Äthervorstellung grundlegend zu verwerten.[1]) — Man muß der Lehren der Geschichte der Physik gedenken, nach welchen allgemeine Gesetze das Ergebnis sehr verschiedener Grundvorstellungen sein können. Auch wenn also die physikalische Forschung das formale System der Relativitätstheorie ganz, oder doch in Abänderung annehmen wollte, wäre sie von der Ausarbeitung der physikalischen Einzelheiten keineswegs entbunden. Es wären ihr nur bei dieser Ausarbeitung durch die Prinzipien Beschränkungen auferlegt. Solche Beschränkungen bieten einerseits eine Erleichterung der Arbeit, da der Bereich der in Betracht zu ziehenden Möglichkeiten sich verengt, andererseits aber führen sie eine Gefahr herbei; denn die Möglichkeit liegt vor, daß der Wirklichkeit Zwang angetan wird. So wollen wir uns zwar davor hüten, die großzügige Arbeit der allgemeinen Relativitätstheorie gering zu schätzen, und wir wollen uns

1) A. Einstein, „Die Naturwissenschaften" 6. S. 697—702. 1918; Schlußbemerkungen.

auch an ihrer mathematischen Schönheit gern erfreuen, es sollen aber darum die Versuche nicht aufgegeben werden, die Theorie aufzubauen, indem wir von schon Bekanntem ausgehend uns fragen, welche Umwandlungen nötig sind, um den Erscheinungen gerecht zu werden. —

Von neuem und in noch eindringlicherer Weise wie bei Untersuchungen, die ich früher veröffentlichte, zeigt sich, daß die Materie nur verstanden werden kann, wenn man sie im Zusammenhang mit dem Weltäther, als Gebilde besonderer Art in diesem, auffaßt.

I. Teil.

Beobachtungsergebnisse und einzelne Versuche ihrer Deutung.

§ 2. Die Perihelbewegung des Merkur.

Achtet man nur auf die bekannten Massen des Sonnensystemes, so zeigen sich bei der Verwertung der Newtonschen Mechanik zwischen Beobachtung und Rechnung gewisse Abweichungen, „Restglieder", und es entsteht die Frage, ob und inwieweit dadurch Unvollkommenheiten der Theorie oder nur Beobachtungsfehler angezeigt werden. Es ist bekannt, daß durch solche Restglieder einstmals der Planet Neptun entdeckt wurde.

Restglieder für die inneren Planeten bezogen auf 100 Jahre sind in der Tabelle auf S. 308 nach Newcomb (1895) angegeben, zugleich mit den mittleren Fehlern der Bestimmung.

Ist w in abgerundeter Zahl die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der n-fache Wert des mittleren Fehlers überschritten wird, so ist für

$$(1) \qquad \begin{cases} n = 1, & = 2, & = 3, & = 4, \\ w = 1/3, & = 1/20, & = 1/400, & = 1/1000. \end{cases}$$

Beachtet man dies, so zeigt die Tabelle, daß jedenfalls die Perihelbewegung des Merkur und die Knotenbewegung der Venus, sehr wahrscheinlich auch die Perihelbewegung des Mars, sich nicht durch Beobachtungsfehler erklären, sondern Unvollkommenheiten der Theorie anzeigen.

Der scharfe Widerspruch zwischen Beobachtung und Theorie in der Perihelbewegung des Merkur hat seit seiner Aufdeckung durch Leverrier um die Mitte des vorigen Jahrhunderts viele Erklärungsversuche veranlaßt. Wir werden

später eine ganze Reihe solcher Versuche kennen lernen, welche eine Änderung an den Gesetzen der Mechanik, besonders an dem Newtonschen Gesetz der Gravitation vornehmen. Aber von keiner dieser Theorien, soweit sie für uns in Betracht kommen — auch nicht von der Einsteinschen Theorie —, wird dabei die Knotenbewegung der Venus und die Perihelbewegung des Mars erklärt. Entschließt man sich also dazu, irgendeine dieser Theorien anzunehmen, so ist man genötigt, noch die Mitwirkung einer andersartigen Ursache vorauszusetzen. E. Anding[1]) hat 1905 einen Versuch in dieser Richtung gemacht, der für uns besonders wichtig ist. H. Seeliger gibt eigene Untersuchungen in gleicher Richtung und kommt zu dem gleichen Resultat; auch E. Freundlich, obgleich Gegner von H. Seeliger in den für uns in Betracht kommenden Arbeiten und ein besonders eifriger Verfechter der allgemeinen Relativitätstheorie, billigt den Andingschen Standpunkt.

Der Versuch von E. Anding besteht in der Annahme, das Koordinatensystem, welches von der Astronomie zurzeit für die Berechnung der Planetenbahnen benutzt wird, das „empirische Koordinatensystem", sei in einer Drehung gegen das Inertialfeld begriffen. Indem die Perihelbewegung des Merkur als besonders zu erklären beiseite gelassen wird, folgert E. Anding aus den Newcombschen Werten für die Restglieder eine rückläufige Drehung um die Achse der Ekliptik im Betrage von

$$7{,}3'' \pm 2{,}3'' \tag{2}$$

im Jahrhundert. Bei der Berechnung dieser Zahlen ist die Perihelbewegung des Mars in Rechnung gesetzt. Das erscheint bei dem Standpunkt der vorliegenden Arbeit unbedenklich, da die zu berücksichtigenden Theorien der Perihelbewegung des Merkur nur etwa $^1/_7$ des Restgliedes in der Perihelbewegung des Mars erklären. —

Wollte man das empirische Koordinatensystem der Astronomie zugleich als Inertialsystem betrachten, so wäre nach

1) E. Anding, Artikel „Über Koordinaten und Zeit" in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. VI, 2, „Astronomie", 1905.

den Newcombschen Zahlen für das Vorrücken des Merkurperihels im Inertialfeld in 100 Jahren

$$\Delta\,\psi = 41{,}25'' \pm 2{,}1'' \tag{3}$$

anzusetzen, denn nach der Tabelle auf S. 308 ist für den Merkur $e\,(d\,\psi/d\,t) = 8{,}48'' \pm 0{,}45''$, e hat aber den Wert 0,2056. Wesentlich anders wird die Folgerung, wenn die Andingsche Drehung beachtet wird. Dann ergibt sich als wahrscheinlichster Wert für das Vorrücken des Merkurperihels im Inertialfeld in 100 Jahren

$$\Delta\,\psi = 41{,}25'' - 7{,}3'' = 34{,}0''. \tag{4}$$

Der mittlere Fehler ist hier größer zu schätzen als $\pm 2{,}3''$, aber — da für die Berechnungen von (2) und (3) teilweise die gleichen Beobachtungen benutzt wurden — kleiner als $\pm\sqrt{(2{,}3)^2 + (2{,}1)^2} = \pm 3{,}1''$. Wird $\pm 5''$ als noch möglicher Beobachtungsfehler in Rechnung gesetzt, so wäre bei Berücksichtigung der Andingschen Drehung für das Vorrücken des Merkurperihels im Inertialfeld eine Zahl im Bereich

$$29'' \text{ bis } 39'' \tag{5}$$

zu suchen. Wollte man die Andingsche Drehung nicht anerkennen, also auf die Knotenbewegung der Venus und die Perihelbewegung des Mars keine Rücksicht nehmen, so ergäbe sich der Bereich

$$36'' \text{ bis } 46''. \tag{6}$$

Über die Frage, wie denn die Drehung des empirischen Koordinatensystems gegen das Inertialfeld zu erklären sei, sagt E. Anding (l. c. S. 14): „Die verschiedenen stellarstatistischen Bestimmungen der Präzessionskonstante divergieren auf das Jahrhundert um 1″, höchstens 2″. Wollten wir aber den Fixsternen eine negative „Eigenpräzession“, wie man es nennen könnte, im Betrage von 7″ beilegen, so müßten doch wohl die Werte der Präzessionskonstante, wenn aus hellen, und wenn aus schwachen Sternen bestimmt, stärker differieren, als man gefunden hat. Die Sache bedarf stellarstatistisch einer weiteren Untersuchung. Bis dahin wird man die Ursachen der Anomalien im Planetensystem selbst suchen müssen.“ —

H. Seeliger[1]), der für die Drehung des empirischen Koordinatensystems 7,50″ im Jahrhundert folgert, bemerkt: „Man wird wohl kaum behaupten können, daß diese Zahlen den Betrag der Drehung des Inertialsystems $\Omega_2 = 7{,}50''$, wie ihn die säkularen Veränderungen der inneren Planetenbahnen ergaben, besonders wahrscheinlich machen. Denn es ist, trotz der speziellen Annahmen, die gemacht worden sind, immerhin verdächtig, daß eine Drehung des Fixsternhimmels hervorgeht, deren Achse sehr nahe senkrecht zur Ekliptik steht, die doch in keiner Weise eine Beziehung zum Fixsternhimmel zu haben scheint." — „Die vorstehenden Bemerkungen sind natürlich nur Ansätze zu Betrachtungen, die zum Teil erst in der Zukunft werden weitergeführt werden können. Namentlich wird, wie schon bemerkt, die Ableitung und Benutzung der Eigenbewegung entfernter Sterne von großer Bedeutung werden." . . . „Andererseits mögen bei den Säkularveränderungen der Planetenbahnen noch rein mechanische Vorgänge vorliegen, deren Einwirkung bisher nicht berücksichtigt worden ist, wie dies ohne Zweifel bei der Bewegung des Merkurperihels der Fall ist. Wir werden nach alledem wohl mit einiger Sicherheit den Satz aussprechen dürfen, daß sich das im Gebrauch befindliche astronomische empirische Koordinatensystem nicht um mehr als um einige und wahrscheinlich ganz wenige Bogensekunden im Jahrhundert um ein Inertialsystem drehen kann."

Diese Ausführungen zweier Astronomen zeigen klar, daß die Erklärung der Andingschen Drehung noch Schwierigkeiten bereitet. Da mag zunächst auf die Kleinheit der Drehung hingewiesen werden. Die Drehung entspricht für Sterne in 100 Lichtjahren = etwa 10^{15} km Entfernung einer Umlaufsgeschwindigkeit von 10 km/sec; sie entspricht ferner für einen Abstand von der Drehachse gleich der Entfernung der Erde von der Sonne ($150 \cdot 10^6$ km) einem Vorrücken um 50 km in einem Jahre. Wenn wir nun erfahren, daß die Astronomen im Zweifel sind, ob eine solche überaus kleine Drehung anerkannt werden könne oder nicht, so folgt offenbar, daß das Inertialfeld *in dem uns Menschen gewaltig groß erscheinenden*

1) H. Seeliger, Sitz.-Ber. der Münchener Akad., math.-phys. Kl., 36. S. 136. 1906.

Bereich der Fixsterne in außerordentlicher Schärfe einen einheitlichen und einfachen Bau besitzt. — Es entspricht dies völlig der wunderbaren Erscheinung, daß in der ganzen, nach vielen Zehntausenden von Lichtjahren messenden Ausdehnung des uns sichtbaren Himmelsraumes die materiellen Atome in ihrer Verkettung mit dem Äther nach dem Ausweis des Spektroskopes die gleiche Beschaffenheit zu haben scheinen wie auf unserer Erde.

Man könnte versucht sein, in der Andingschen Drehung Anzeichen für eine durch die Planeten bewirkte Drehung des Maßfeldes, bezüglich des Äthers, gegenüber der Sternenwelt zu vermuten, wenn man sich der Mach-Einsteinschen Spekulationen erinnert. Eine Hohlkugel der Masse M und mit dem Radius a, die mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert, bewirkt nach H. Thirring[1]), wenn die Einsteinsche Theorie benutzt wird, eine Mitführung des inneren Maßfeldes, deren Drehgeschwindigkeit näherungsweise durch

$$\omega' = \omega \tfrac{4}{3} \frac{k M}{c^2 a} \tag{7}$$

bestimmt wird. Geben wir der Hohlkugel eine Masse gleich der des Jupiter, einen Radius gleich dem der Jupiterbahn und eine Drehgeschwindigkeit entsprechend dem Umlauf des Jupiter, so folgt mittels (7) eine Drehung im Jahrhundert um etwa $^1/_{40000}$ Bogensekunde. Angesichts der Kleinheit dieser Zahl wird man ohne weiteres schließen dürfen, daß auch die in der Wirklichkeit zusammengeballte Masse des Jupiter nicht entfernt hinreicht, um bei Annahme der Einsteintheorie die Andingsche Drehung zu erklären. Die anderen Planeten kommen noch weniger in Betracht. Wollte man also in jener Drehung eine Mitführung des Maßfeldes, bezüglich des Äthers durch die Planeten sehen, so müßte eine sehr viel stärkere Einwirkung angenommen werden als nach der Einsteinschen Theorie.

§ 3. Versuche, die Perihelbewegung des Merkur unter Beibehaltung der Newtonschen Mechanik zu erklären.

Mehrfach hat man versucht, die Perihelbewegung des Merkur ohne Aufgabe der klassischen Mechanik durch Annahme der Mitwirkung noch unbekannter Massen des Sonnen-

1) H. Thirring, Phys. Ztschr. 19. S. 33—39. 1918.

systems zu erklären. Diese Massen müßten dann zwischen Sonne und Merkur gesucht werden. Besonders weit durchgeführt und besonders wichtig für uns ist eine Arbeit von H. Seeliger.[1]) Es werden hier zur Erklärung der Restglieder für die inneren Planeten außer einer Drehung des Koordinatensystems entsprechend der Andingschen Vorstellung Massen in Verbindung mit dem Zodiakallicht angenommen. Um die Rechnungen zu vereinfachen, gibt H. Seeliger diesen Massen räumliche Verteilung in der Gestalt ineinandergestellter homogener Rotationsellipsoide. Es zeigt sich, daß es erlaubt ist, Zahl, Gestalt und Dichte dieser Ellipsoide in weitem Maße zu ändern, ohne daß die Darstellung leidet. H. Seeliger behält schließlich nur zwei Ellipsoide bei, „Nr. 3" und „Nr. 5". Nr. 3 liegt ganz innerhalb der Merkurbahn, während Nr. 5 noch die Erdbahn in sich schließt, aber nicht mehr die Marsbahn. Auch Nr. 5 könnte noch ohne wesentliche Nachteile für die Darstellung fortgelassen werden. Die folgende Tabelle zeigt die Resultate der Theorie im Vergleich mit den Ergebnissen der Beobachtungen nach der Newcombschen Bearbeitung.

		β_3	β_5	r	Rechn.	Newcomb	
$e\frac{d\psi}{dt}$	Merkur	+7,396″	− 0,108	+ 1,203	+ 8,49″	+ 8,48″	±0,43″
	Venus	+0,015	− 0,009	+ 0,040	+ 0,05	− 0,[illegible]	0,25
	Erde	+0,012	− 0,037	+ 0,098	+ 0,07	+ 0,[illegible]	0,13
	Mars	+0,014	+ 0,033	+ 0,546	+ 0,59	+ 0,75	0,35
$\sin i\frac{d\Omega}{dt}$	Merkur	− 0,049	− 0,016	+ 0,713	+ 0,65	+ 0,61	0,52
	Venus	+0,088	+ 0,144	+ 0,346	+ 0,58	+ 0,60	0,17
	Mars	+0,014	+ 0,030	+ 0,189	+ 0,23	+ 0,03	0,22
$\frac{di}{dt}$	Merkur	+0,574	− 0,057	—	+ 0,52	+ 0,38	0,80
	Venus	+0,159	+ 0,009	—	+ 0,17	+ 0,38	0,33
	Mars	+0,003	− 0,020	—	− 0,02	− 0,01	0,20

e bedeutet die Exzentrizität, i die Neigung der Bahn, $d\psi/dt$ die Perihelbewegung, $d\Omega/dt$ die Knotenbewegung. Als Zeiteinheit dient das Jahrhundert. Unter „β_3", „β_5", „r" sind die Anteile zu den theoretischen Werten angegeben, welche auf die Ellipsoide Nr. 3 und Nr. 5 und auf die Drehung des Koordinatensystems kommen. Die Reihe unter „Rechnung"

1) H. Seeliger, Sitz.-Ber. d. Münchener Akad., math.-phys. Kl., 36. S. 595—622. 1906.

gibt dann die Summe der drei Anteile. Die beiden letzten Reihen zeigen das aus den Beobachtungen abgeleitete Restglied und den mittleren Fehler. *Man erkennt, daß durchweg eine vorzügliche Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung erreicht wird.*

Gegen die H. Seeligersche Arbeit hat E. Freundlich[1]) scharfe Einwände erhoben, die im wesentlichen besagen, die Dichte der Ellipsoide sei größer angenommen, als mit den Beobachtungen insbesondere über die Lichtstärke des Zodiakallichtes sich vertrage. H. Seeliger[2]) antwortet, daß man nur nötig habe, insbesondere für das Ellipsoid Nr. 3, auf welches es wesentlich ankommt, die Korngröße genügend groß anzunehmen, um die Einwände von E. Freundlich gegenstandslos zu machen. Man müßte Teilchen von etwa der Größe 100 m im Durchmesser annehmen; es stände auch nichts im Wege, liege sogar im Sinne der Arbeit, an Stelle der raumhaften Verteilung der Massen einzelne noch größere Körper vorauszusetzen. —

So scheint es denn nach den Ausführungen von H. Seeliger in der Tat möglich, die Perihelbewegung des Merkur auch dann zu erklären, wenn man ganz im Rahmen der Newtonschen Mechanik bleibt. Wenn in voller Anerkennung dieses Resultates im folgenden trotzdem andere Erklärungen werden bevorzugt werden, so ist der Grund dafür darin zu suchen, daß die Größe der Perihelbewegung in einer höchst auffälligen Beziehung zu der Lichtgeschwindigkeit steht, und so die Gedanken unwillkürlich zu der Vermutung innerer Zusammenhänge geführt werden. Heute wird man noch hinzufügen können, daß durch die Aufdeckung der Lichtablenkung im Gravitationsfeld der Sonne die Vermutung eine weitere mächtige Unterstützung gewonnen hat. Immerhin darf nicht übersehen werden, daß nach den Untersuchungen von H. Seeliger eine Mitwirkung sonnennaher Massen bei dem Zustandekommen der Perihelbewegung des Merkur möglich scheint. Der durch die Erweiterung der Gravitationstheorie zu erklärende Anteil an der Perihelbewegung könnte also vielleicht noch merklich kleiner sein, als im vorigen Paragraphen angenommen wurde,

1) E. Freundlich, Astron. Nachr. 201. Spalte 48—56. 1915.
2) H. Seeliger, ebenda Spalte 273—280.

d. h. merklich kleiner als etwa 34″ oder etwa 41″ im Jahrhundert, je nachdem die Andingsche Drehung angenommen wird oder nicht; beide Zahlen dürfen für die Theorie nur als obere Grenzen betrachtet werden.

§ 4. Ältere Versuche, die Perihelbewegung des Merkur bei Aufgabe des Newtonschen Gesetzes zu erklären.[1])

C. Neumann wies 1874 darauf hin, daß bei der Annahme unendlicher Ausdehnung der Welt und unendlicher Menge schwerer Masse in ihr das Newtonsche Gesetz zu ernsten Schwierigkeiten führe, weil die Kräfte der Gravitation dann unbestimmt werden. H. Seeliger führte 1895 und 1896 solche Gedanken allgemeiner durch und zeigte, daß die Schwierigkeiten verschwinden, wenn man an Stelle des Newtonschen Gesetzes die Formel

$$F = \frac{k m_1 m_2}{r^2} e^{-\frac{r}{\varrho}} \tag{8}$$

setzt, welche Laplace schon gelegentlich verwendet hat. ϱ bedeutet eine Konstante. C. Neumann ersetzte die Kraftgleichung (8) durch die Potentialgleichung

$$\Phi = -\frac{k M}{r} e^{-\frac{r}{\varrho}}, \tag{9}$$

wobei ϱ wieder eine Konstante ist. — A. Föppl schlug 1896 vor, zur Beseitigung der Schwierigkeiten neben den uns bekannten positiven schweren Massen kompensierend im Weltenraum in anderer Form verteilte negative schwere Massen anzunehmen. Ich möchte bemerken, daß die Gesetze von H. Seeliger und C. Neumann in eben dieser Weise gedeutet werden können. Bei dem Gesetz von H. Seeliger wäre der negativen Masse die Dichte zuzuschreiben

$$\mu = -\frac{1}{4\pi k} \frac{1}{\varrho^2} g \tag{10}$$

und bei dem Gesetz von C. Neumann die Dichte

$$\mu = \frac{1}{4\pi k} \Delta\Phi = \frac{1}{4\pi k} \frac{\Phi}{\varrho^2}. \tag{11}$$

1) Literaturzusammenstellungen findet man bei F. Tisserand, Traité de mécanique céleste 4. Cap. 28. 1896; S. Oppenheim, Kritik des Newtonschen Gravitationsgesetzes, Jahresber. d. Staats-Realschule Karolinenthal, Prag 1903, Hofbuchdruckerei v. A. Haase; J. Zenneck, Artikel „Gravitation" in der Enzykl. d. math. Wiss., V, 1, Physik, 1903. Für diese Enzykl. ist auch die Arbeit von Oppenheim bestimmt.

g bedeutet die Schwerebeschleunigung infolge eines klein gedachten Körpers, den die durch (10) angegebenen Massen kompensieren.

Sowohl H. Seeliger wie auch C. Neumann dachten seinerzeit daran, durch ihre Gesetze auch die Perihelbewegung des Merkur zu erklären. Das erwies sich aber nicht als angängig, da sich dann für die anderen Planeten Perihelbewegungen unmöglicher Größe ergeben würden. —

Weitaus günstigere Resultate gibt eine andere Gruppe von Erklärungsversuchen, die uns dem Ziel der vorliegenden Arbeit näher bringt. Bei diesen Theorien wird die Perihelbewegung eines Planeten im Jahrhundert dargestellt durch die Formel

$$\Delta\psi = q\,\frac{4\pi^3 a^2}{c^2 T^2 (1-e^2)}\,\frac{100\,J}{T}, \tag{12}$$

welche in mehr oder minder großer Annäherung gilt. a, b, $e = \sqrt{1-b^2/a^2}$, T, J bedeuten die Halbachsen, die Exzentrizität der Bahn, die Umlaufzeit und die Länge des Erdenjahres. c ist wieder die Lichtgeschwindigkeit; q stellt eine Zahl dar, die bei den verschiedenen Theorien verschieden groß ausfällt. So weit ich die Literatur übersehe, ist die Formel (12) mit c^2 im Nenner zuerst von F. Tisserand veröffentlicht worden. Ich werde sie daher die *Tisserandsche Formel* nennen.

Für den *Merkur* erhält der Faktor von q auf der rechten Seite in (12) den Wert 7,14″, es wird also

$$\Delta\psi = q \cdot 7{,}14''. \tag{13}$$

Nimmt man die Mitwirkung sonnennaher Massen nicht an, so ergäbe sich als wahrscheinlichster Wert nach § 2, wenn die Andingsche Drehung angenommen wird:

$$q = 4{,}8\,, \tag{14}$$

und wenn die Andingsche Drehung nicht in Rechnung gesetzt wird:

$$q = 5{,}7\,. \tag{15}$$

$\pm 5''$ in $\Delta\psi$ entspricht in q die Variation $\pm 0{,}7$; danach erscheinen bei Annahme der Andingschen Drehung

$$q = 4 \quad \text{und} \quad q = 5^1/_2 \tag{16}$$

schon wenig wahrscheinlich. An Stelle dieser Werte würden treten

(17) $$q = 5 \quad \text{und} \quad q = 6^1/_2 ,$$

wenn man bei Verzicht auf die Erklärung der Knotenbewegung der Venus und der Perihelbewegung des Mars die Andingsche Drehung nicht berücksichtigen wollte.

Rechnet man gemäß den Ausführungen von H. Seeliger mit der Mitwirkung sonnennaher Massen, so kämen für die Gravitationstheorie auch kleinere Werte von q in Betracht, bis herunter zu $q = 0$.

1872 wurde zuerst von F. Zöllner[1]), welcher seine Angaben seinem Leipziger Kollegen Scheibner verdankte, dann von F. Tisserand darauf hingewiesen, daß Fernwirkungen nach dem Weberschen Gesetz eine Perihelbewegung des Merkur ergeben. Nun wurden von verschiedenen Seiten auch die Gesetze von Riemann, Gauss und Clausius in bezug auf diese Frage untersucht (vgl. Tisserand, in dem vorhin zitierten Werke). Es folgt in der Tisserandschen Formel bei Annahme des Grundgesetzes von

W. Weber:	P. Riemann:	Gauss:	R. Clausius:
$q = 2$,	$q = 4$,	$q = 4$,	$q = 0$.

In jener Zeit wurde in den Grundgesetzen c als eine Konstante angesehen, deren Wert durch die Erfahrung festzustellen sei. W. Weber setzte c^2 gleich dem doppelten Wert des Quadrates der Lichtgeschwindigkeit; darauf hat man vielfach in den Grundgesetzen für c den Wert der Lichtgeschwindigkeit angenommen. Auch dann erschien damals selbst $q = 4$ noch als zu klein.

Maurice Lévy suchte (1890) volle Übereinstimmung zwischen Erfahrung und Beobachtung zu erreichen, indem er die Gesetze von W. Weber und P. Riemann in eines zusammenfaßte. —

P. Riemann führte in die Theorie das sogenannte „*effektive Potential*“ ein, welches für die vorliegende Arbeit von grundlegender Bedeutung ist. Es hat unmittelbare Beziehungen

---

1) J. C. F. Zöllner, Über die Statur der Kometen, Leipzig 1872, S. 334. — H. Seeliger, Verh. d. D. Phys. Ges. 20. S. 262. 1918, teilt mit, Scheibner habe seine Feststellung 1867 gemacht.

zu den Lagrangeschen Gleichungen, bzw. zu dem Hamiltonschen Prinzip, welche wir von der klassischen Mechanik übernehmen werden.

x sei irgendeine der allgemeinen Lagrangeschen Koordinaten zur Darstellung des Zustandes des Systems, $\dot{x} = dx/dt$ ihre Schwellung, X die zu x gehörige, auf das System von außen ausgeübte Kraft ($X\,dx =$ Arbeit), L die „Lagrangesche" Funktion, dann gehört zu x die „Lagrangesche Gleichung"

$$-\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = X. \tag{18}$$

L gilt als eine Funktion der x und $\dot{x}$. Als Gesamtenergie des Systems ergibt sich:

$$W = \sum \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L + \text{const}, \tag{19}$$

wobei die Summe über alle Koordinaten auszudehnen ist. Wenn das System abgeschlossen ist, also die sämtlichen X verschwinden:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0, \tag{20}$$

folgt als *„Energiegleichung"*

$$\sum \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = \text{const}. \tag{21}$$

Das Hamiltonsche Prinzip besagt, die Bewegung des Systems zwischen irgend zwei Zeitpunkten (1) und (2) genüge dem Minimalprinzip

$$\delta \int_1^2 L\,dt = 0. \tag{22}$$

Anfangs- und Endzustand sind bei der Variation als fest gegeben zu betrachten. Die Gleichungen (20) ergeben (22), (22) ergibt die Gleichungen (20). — Läßt sich der Formel

$$L = T - V \tag{23}$$

gemäß aus L ein Teil T absondern, den man den zur „kinetischen Energie" gehörigen Anteil nennen will, *so stellt V das Riemannsche effektive Potential* dar. Gemäß (19) ist dann

$$W^{(T)} = \sum \dot{x}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - T \tag{24}$$

die kinetische, und

$$W^{(V)} = -\sum \dot{x}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} + V \tag{25}$$

die potentielle Energie. Die potentielle Energie erscheint hiernach formal gleichwertig mit kinetischer Energie. Daran sind bekanntlich Versuche geknüpft worden, die potentielle Energie und die zugehörigen Kräfte, bzw. das effektive Potential durch „verborgene Bewegungen" zu erklären. —

Bei jenen älteren Versuchen, von der Perihelbewegung des Merkur Rechenschaft abzulegen, wird

$$T = \tfrac{1}{2} m v^2 \tag{26}$$

gesetzt, wobei m die Masse, v die Geschwindigkeit des Planeten bedeutet. Dem W. Weberschen Grundgesetz entspricht die Annahme

$$V = -\frac{k m M}{r}\left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right), \tag{27}$$

dem Riemannschen Grundgesetz die Annahme:

$$V = -\frac{k m M}{r}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right). \tag{28}$$

Maurice Lévy setzt:

$$V = -\frac{k m M}{r}\left(1 + \frac{1-a}{c^2}\dot{r}^2 + \frac{a}{c^2}v^2\right), \tag{29}$$

wobei a eine Konstante ist. Unter M ist die Masse der Sonne zu verstehen; die Mitbewegung der Sonne wird dabei als unmerklich betrachtet. Die Rechnungen, welche von diesen Formeln für T, V und damit für L zu der Tisserandschen Formel führen, sind ganz dieselben, wie sie später im II. Teile der vorliegenden Arbeit in entsprechenden Fällen durchgeführt werden.

Viel Beachtung hat früher und auch neuerdings eine Arbeit von P. Gerber[1]) gefunden, welche versuchte, aus dem beobachteten Wert der Perihelbewegung des Merkur einen Schluß auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation zu ziehen. Es wird angenommen, das Gravitationspotential besitze eine bestimmte Ausbreitungsgeschwindigkeit, die als Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gravitation gilt. Die Überlegungen ergeben unter der Voraussetzung, daß die

1) P. Gerber, Ztschr. f. Math. u. Phys. 43. S. 93—104. 1898; Ann. d. Phys. 52. S. 415—444. 1917.

Masse m sich relativ zur Masse M mit einer Geschwindigkeit bewegt, die stets klein gegenüber der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Potentials ist, für das effektive Potential die Näherungsformel

$$V = -\frac{k m M}{r} \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c}\right)^2}. \tag{30}$$

Für die Perihelbewegung folgt durch Rechnungen, die wiederum den im II. Teile angegebenen analog sind, die Tisserandsche Formel mit $q = 6$. Aus den Beobachtungen wird gefolgert, c sei gleich der Lichtgeschwindigkeit, die Gravitation breite sich also mit Lichtgeschwindigkeit aus. Die Schlüsse des Verfassers, welche zu (30) führen, sind nicht überzeugend; immerhin aber bleibt der Erfolg bestehen, daß in (30) eine einfache Formel gefunden ist, welche die Perihelbewegung des Merkur gut darstellt, wenn man die Andingsche Drehung nicht beachtet. Beachtet man diese, so erscheinen die Gesetze von Riemann und Gauss günstiger. —

Was den geschilderten Versuchen, die Perihelbewegung des Merkur zu erklären, ein so hohes Interesse verliehen hat, ist der merkwürdige Umstand, daß die Perihelbewegung nach Art und Größenordnung, zum Teil auch in vollem Betrage, richtig dargestellt wird durch einfache Formeln, welche als wesentlichen Bestandteil die Lichtgeschwindigkeit enthalten. *So wird man dahin geführt, eine enge Beziehung zwischen der Gravitation und der Elektrodynamik zu vermuten.* —

In einer Arbeit von 1916 habe ich die Perihelbewegung des Merkur schon einmal behandelt. Damals nahm ich die Lorentzschen Formeln für die Massenänderungen bei Bewegung an und verband damit eine Hypothese über das Gravitationspotential. Benutzt man die von M. Abraham angegebene Lagrangesche Funktion $-m_0\sqrt{c^2 - v^2}$ zur Darstellung der Massenänderungen, so kann mein damaliger Ansatz so dargestellt werden:

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{k m M}{r}\left(1 + n\frac{k M}{c^2 r}\right), \tag{31}$$

wobei c als überall gleich groß angenommen wird, und n eine Konstante bedeutet. Es ergibt sich die Tisserandsche Formel mit $q = 1 + 2n$. Damals nahm ich $q = 6$ als wahrscheinlichsten Wert an; heute würde ich im Hinblick auf die

Andingsche Drehung statt dessen $q = 5$ setzen, und es ergäbe sich also $n = 2$. Die Erklärung für das Glied mit n glaubte ich in einer scheinbaren negativen Masse im Gravitationsfeld zu finden. Für die Dichte dieser Masse folgt

$$\mu = -\frac{1}{4\pi k}\frac{2n}{c^2}g^2, \tag{32}$$

wenn g die Schwerkraft bedeutet. Indem ich dann später die scheinbare negative Masse durch eine Variation von c zu erklären suchte, ergab sich die im II. Teile dieser Arbeit entwickelte elektrodynamische Theorie der Schwerkraft. *Ihr Fortschritt wird erzielt, indem die beiden Glieder der rechten Seite von* (31) *in eines zusammengezogen werden.* Es entspricht dies genau der durch (23) ausgesprochenen Zusammenfassung der Potentialanteile in eine Funktion L und erscheint als Aufhebung einer künstlichen Zerteilung.

§ 5. Beobachtungsergebnisse über die Lichtablenkung im Gravitationsfeld.

Die Untersuchungen, welche im vorigen Paragraphen besprochen wurden, legen den Gedanken nahe, die Gravitation sei in irgendeiner Weise mit der Lichtbewegung, also mit dem Elektromagnetismus verknüpft. Es ist ein großes Verdienst Einsteins, auf weitere Möglichkeiten hingewiesen zu haben, derartige Gedanken an der Hand der Erfahrung zu prüfen. In Betracht kommen Ablenkung von Lichtstrahlen und Verschiebung von Spektrallinien im Gravitationsfeld.

Eine *Ablenkung von Lichtstrahlen* muß stattfinden, wenn die Gravitation die Lichtgeschwindigkeit beeinflußt. Dies ist nach der Einsteinschen Theorie der Fall. Für das Gravitationsfeld in der Umgebung eines Zentralkörpers mit der Masse M ist danach mit einer für uns genügenden Annäherung zu setzen:

$$c_r = \bar{c}\left(1 - 2\frac{kM}{\bar{c}^2 r}\right), \quad c_t = \bar{c}\sqrt{1 - 2\frac{kM}{\bar{c}^2 r}}\,. \tag{33}$$

Auskunft über die Herleitung der Formeln wird in § 11 gegeben werden. $\bar{c}$ bedeutet die Lichtgeschwindigkeit im störungsfreien Felde, also in großen Fernen, k ist die Gravitationskonstante, r der Abstand vom Mittelpunkt des Zentralkörpers. c_r und c_t bedeuten die Geschwindigkeiten parallel

und senkrecht zum Radiusvektor r. An Stelle von (33) wollen wir die allgemeineren Formeln

$$(34) \qquad c_r = \bar{c}\left(1 - \gamma_r \frac{k M}{\bar{c}^2 r}\right), \quad c_t = \bar{c}\left(1 - \gamma_t \frac{k M}{\bar{c}^2 r}\right)$$

annehmen, welche als Näherungsformeln gelten sollen, die Entwicklungen nach Potenzen von $1/r$ entsprechen. γ_r und γ_t sind zwei Konstanten, deren Werte bei der Einsteinschen Theorie 2 und 1 wären.

Für die Anwendung kommt allein der Fall in Betracht, wo c_r und c_t sich äußerst wenig von $\bar{c}$ unterscheiden. Demgemäß darf im Hinblick auf entsprechende optische Probleme für die Geschwindigkeit c in einer beliebigen Richtung mit genügender Genauigkeit gesetzt werden:

$$(35) \qquad c = c_r \cos^2(c, r) + c_t \sin^2(c, r).$$

Die Formeln (34) ergeben dann

$$(36) \qquad c = \bar{c}\left\{1 - \left(\gamma_r \cos^2(c, r) + \gamma_t \sin^2(c, r)\right) \frac{k M}{\bar{c}^2 r}\right\}.$$

Ein jeder der Lichtstrahlen verläuft in einer Ebene durch den Mittelpunkt des Zentralkörpers. h sei der kleinste Abstand von diesem. Ein Koordinatensystem x, y mit dem Anfangspunkt im Mittelpunkt des Zentralkörpers möge in der Strahlebene so gelegt werden, daß die x-Achse parallel der Richtung von h wird. Bei der geringen Änderung von c im Felde stellt der Lichtstrahl dann sehr nahe eine gerade Linie parallel der y-Achse dar.

Allgemein ist die Krümmung di eines Lichtstrahles auf der Bahnstrecke ds nach dem Huygensschen Prinzip gegeben durch

$$(37) \qquad \frac{di}{ds} = -\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial n},$$

wenn n die Normalrichtung zum Strahl in der Strahlebene bedeutet, gerechnet nach jener Seite, nach der hin i als positiv gilt. In unserem Fall darf bei der geringen Krümmung des Strahles unbedenklich

$$(38) \qquad \frac{di}{dy} = -\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial x}$$

geschrieben werden. Benutzt man nun (36), so folgt in genügender Annäherung für die gesamte Krümmung bei dem Verlauf aus großen Fernen bis wieder in große Fernen

$$(39)\quad i = -h\gamma_r \frac{kM}{c^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3y^2\,dy}{r^5} + h\gamma_t \frac{kM}{c^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{2\,dy}{r^3} - \frac{3h^2\,dy}{r^5}\right).$$

Die leicht auszuführende Integration ergibt

$$(40)\quad i = -\gamma_r \frac{2}{h}\frac{kM}{c^2}.$$

Das negative Vorzeichen deutet bei positivem γ_r auf eine nach dem Zentralkörper hingerichtete Ablenkung hin. Nach (40) wird innerhalb der für unsere Zwecke genügenden Genauigkeit die *Lichtablenkung* beim Vorübergang an einem schweren Zentralkörper *allein durch die Feldänderung der Radialgeschwindigkeit bestimmt*, während die Feldänderung der Quergeschwindigkeit keinen merklichen Einfluß ausübt.

Für die Sonne ist

$$(41)\quad \frac{kM}{c^2} = 1{,}448\ \text{km}, \quad a = 692000\ \text{km}$$

zu setzen, wobei a den Halbmesser bedeutet. Also folgt für die Ablenkung der Lichtstrahlen, welche an dem Sonnenrand vorübergehen, aus (39), wenn noch durch Multierung mit 206265 die Bogensekunde als Einheit eingeführt wird,

$$(42)\quad \bar{i} = -\gamma_r \cdot 0{,}864''.$$

Die Einsteinsche Theorie verlangt $\gamma_r = 2$, danach wäre die Ablenkung

$$\bar{i} = -1{,}73''$$

zu erwarten.

Ein Bericht über die Ergebnisse der Beobachtungen bei der Sonnenfinsternis am 29. Mai 1919 zur Bestimmung der Lichtablenkung beim Vorübergang an der Sonne wird in den „Astronomischen Nachrichten" 1919 gegeben.[1]) Danach kommen zwei englische Expeditionen in Betracht, nach Nordbrasilien und zur Insel Principe.

Die Brasilianische Expedition verwandte zu ihren photographischen Aufnahmen der Sterne in der Nachbarschaft der Sonne einen 13-Zöller und einen 4-Zöller. Die Ergebnisse der Plattenausmessungen für den 13-Zöller waren

$$\bar{i} = -0{,}93'' \pm 0{,}3'' \quad \text{und} \quad \bar{i} = -0{,}99'' \pm 0{,}3'',$$

1) Nach A. C. D. Cromelin, Nature, Nr. 2611, vom 13. Nov. 1919, Astron. Nachr. 210. Spalte 79—80. 1919.

also kleiner als die Einsteinsche Theorie verlangt. Nun zeigten sich die Bilder aber nicht fokussiert, vermutlich, weil der Spiegel des Zölestaten sich verzogen hatte. Der Versuch, diese Fehlerquelle zu berücksichtigen, führte zu dem Wert

$$\bar{i} = -1{,}53''.$$

Der 4-Zöller ergab $\bar{i} = -1{,}98'' \pm 0{,}12''$,

dies in guter Übereinstimmung mit der Einsteinschen Theorie.

Die Principeexpedition hatte ungünstiges Wetter, doch gelang es, fünf Sterne zu verwerten. Es wurde abgeleitet

$$i = -1{,}60'' \pm 0{,}3''.$$

Im ganzen wird in dem Referat die Meinung ausgesprochen, daß die Beobachtungen der beiden Expeditionen zugunsten der Einsteinschen Theorie ausgefallen seien. In der Tat darf nun als sichergestellt gelten, daß eine Lichtablenkung im Sinne der Einsteinschen Theorie vorhanden ist, und dies ist für die Theorie der Gravitation ein Ergebnis von gewaltiger Bedeutung. Unsicher bleibt aber das Urteil, ob quantitative Übereinstimmung der Einsteinschen Theorie mit der Wirklichkeit bestehe. Die Aufnahmen des 13-Zöllers der brasilianischen Expedition scheinen mehr auf $\gamma_r = 1$, entsprechend $i = -0{,}86''$, als auf $\gamma_r = 2$ hinzuweisen, vielleicht könnte auch ein Zwischenwert in Betracht kommen. Die Ausmessungen der Principeexpedition ließen sich wohl mit allen Werten von 1 bis 2 in Übereinstimmung bringen. Es bleiben die Aufnahmen des 4-Zöllers der brasilianischen Expedition, die durchaus auf $\gamma_r = 2$ hinzuweisen scheinen. Wie nun aber bei dem 13-Zöller ein Zufall störend eingegriffen hat, so könnten wohl auch noch weitere komplizierende Umstände mitwirken. Betrachte ich alle die mitgeteilten Angaben, so kann ich mich der Ansicht nicht entziehen, daß alle Werte 1 bis 2 heute noch als möglich gelten müssen, und daß manches sogar mehr für die kleineren Werte, als für den Einsteinschen Wert 2 zu sprechen scheint. *Wir werden später erfahren, daß der Wert $\gamma_r = 1$ auf ganz besonders einfache theoretische Verhältnisse hinweisen würde. Daneben werden wir besonders den Fall $\gamma_r = 4/3$ ins Auge fassen, der $i = -1{,}15''$ ergibt.* Sollte es nicht möglich sein, daß einer dieser beiden Fälle zuträfe? Hoffentlich werden in nicht zu ferner Zeit neue Untersuchungen zu einer Entscheidung führen.

§ 6. Beobachtungsergebnisse über die Verschiebung der Spektrallinien im Gravitationsfeld.

Für die *Verschiebung der Spektrallinien* im Gravitationsfeld eines Zentralkörpers ergibt die Einsteinsche Theorie, wie in § 11 gezeigt werden wird, das Gesetz

$$\frac{T}{\bar{T}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2kM}{\bar{c}^2 r}}} . \tag{43}$$

Dabei bedeuten T und $\bar{T}$ die Schwingungsperioden im Abstand r und im ungestörten Felde ($r = \infty$). Allgemeiner wollen wir statt (43) die hier genügende Näherungsformel

$$\frac{T}{\bar{T}} = 1 + \sigma \frac{kM}{\bar{c}^2 r} \tag{44}$$

schreiben, *so daß der Einsteinschen Theorie der Wert* $\sigma = 1$ *zukommt*. Es folgt dann für die Änderung $\Delta\lambda$ der Wellenlänge λ

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \sigma \frac{kM}{\bar{c}^2 r} . \tag{45}$$

Die Verschiebung entspricht einem Dopplereffekt für eine Bewegung der Lichtquelle von dem Beobachter fort, wobei die äquivalente Geschwindigkeit durch

$$v = \sigma \frac{kM}{\bar{c}^2 r} \bar{c} \tag{46}$$

angegeben wird. Für die Spektrallinien des Sonnenlichtes liefern (41), (45) und (46) die Werte

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\sigma}{478000} = \sigma \cdot 2{,}1 \cdot 10^{-6}; \quad v = \sigma \cdot 0{,}63 \frac{\text{km}}{\text{sec}} . \tag{47}$$

Bei den für die Beobachtung besonders geeigneten Linien beträgt die Verschiebung rund 0,01 Angströmeinheiten und ist noch gut meßbar. — 1914 berichtet K. Schwarzschild[1]) über eine Prüfung. Er sagt in der Einleitung: „Auf den ersten Blick scheint es, als ob die Einsteinsche Verschiebung sich an den Linien des Sonnenspektrums deutlich zu erkennen gäbe. Die meisten Linien des Sonnenspektrums sind nach

1) K. Schwarzschild, Sitz.-Bericht d. Berliner Akademie. 1914. S. 1201—1213.

Rot verschoben, verglichen mit den entsprechenden terrestrischen Linien. Man hat diese Verschiebungen bisher meist als Druckverschiebungen gedeutet und daraus die bekannte Angabe von 5 Atmosphären Druck in der umkehrenden Schicht der Sonne abgeleitet. Die Zahlen stimmen aber auch quantitativ merkwürdig gut mit der Einsteinschen Verschiebung, wenn man z. B. das Mittel aus den Eisenlinien nimmt, die Hr. Evershed beobachtet hat. Bei näherem Zusehen erweisen sich aber die Verhältnisse als viel verwickelter."

Schwarzschild verwertet für die eigenen Beobachtungen die bei 3883 Ångströmeinheiten beginnende Stickstoffbande, „da bei dieser eine Druckverschiebung in Abrede gestellt wird". Die Messungen umfassen das Intervall 3844—3883 Å; der Einsteintheorie, also dem Wert $\sigma = 1$, entspricht hier eine Rotverschiebung von nahe 0,008 Å.

In der Mitte der Sonnenscheibe ergaben 21 Linien der Intensität 00 bis 1 eine Rotverschiebung von

$$+ 0{,}0022 \pm 0{,}0006 \text{ Å} = 0{,}17 \pm 0{,}05 \text{ km/sec.}$$

13 Linien der größeren Intensitäten 2—4 lieferten

$$+ 0{,}0045 \pm 0{,}0014 \text{ Å} = 0{,}36 \pm 0{,}11 \text{ km/sec.}$$

Die Beobachtungsergebnisse sind auf S. 329 graphisch dargestellt. Das Verhalten der Linien beim Übergang von der Mitte der Sonnenscheibe zum Rand beschreibt Schwarzschild so: „... es erfolgt relativ zur Lage der Linien in der Sonnenmitte eine Violettverschiebung. Von 0,86 Radien an tritt dann wieder eine Rotverschiebung ein, die als „Randeffekt" bezeichnet werden kann. Für die stärkeren Linien ist der Randeffekt nicht deutlich, es ist wesentlich nur eine Abnahme der Wellenlänge von der Mitte bis in die Nähe des Sonnenrandes zu konstatieren." — Sieht man vom Randeffekt ab, so ist die Abnahme der Rotverschiebung von der Mitte nach dem Rande hin geradeso, wie es der Annahme der Entstehung der Verschiebung durch absteigende Bewegung der erzeugenden Gasmassen entspricht. Das Ergebnis der Untersuchung wird in der folgenden Tabelle zusammengestellt, welche die Verschiebung der N-Bande gegen die terrestrischen Wellenlängen für verschiedene Punkte der Sonnenscheibe angibt.

Abstand v. d. Mitte	Tausendstel Ångström 0,00	0,72	0,86	0,93	0,97
Alle Linien	+ 2,9	+ 1,6	+ 1,1	+ 3,6	+ 4,0
Stärkere Linien	+ 4,2	+ 2,4	+ 1,4	+ 3,1	+ 2,1
Schwächere Linien	+ 2,2	+ 1,2	+ 1,1	+ 3,9	+ 5,3

Der zur Einsteintheorie gehörige Wert 8,1 wird nirgends erreicht. — K. Schwarzschild diskutiert auch noch Messungen anderer Beobachter; davon wird später die Rede sein. —

Eine weitere Untersuchung der Verschiebungen der Spektrallinien des Sonnenlichtes zur Prüfung der Einsteinschen Theorie ist im Mount Wilson Solar Observatory von Charles E. St. John[1]) vorgenommen worden. Soweit neue Beobachtungen in Betracht kommen, handelt es sich um dieselbe Stickstoffbande, die K. Schwarzschild auswählte; ebenso wie bei diesem werden die Linien in zwei Gruppen der Intensitäten 00 bis 1 und 2 bis 4 geteilt, und ebenso wird den Linien geringerer Intensität, d. h. den feineren Linien, ein höheres Gewicht beigelegt.

St. John verglich teils direkt die N-Linien auf der Sonne und im Lichtbogen, teils indirekt unter Zuhilfenahme von Eisenlinien und von Messungen des Lageunterschiedes am Rande und in der Mitte der Sonnenscheibe. Für die Mitte ergaben dabei 25 Linien der Klasse $\mathfrak{A}$, umfassend Intensitäten 00—1, eine Rotverschiebung von

$$-0{,}001 \text{ Å},$$

18 Linien der Klasse $\mathfrak{B}$, umfassend teils einfache Linien der Intensität 2—4, teils Doppellinien geringerer Intensität, eine Rotverschiebung von

$$+0{,}0014 \text{ Å}.$$

Für den *Sonnenrand* sind die entsprechenden Zahlen bei 17 Linien der Klasse $\mathfrak{A}$

$$+0{,}000 \text{ Å},$$

und bei 18 Linien der Klasse $\mathfrak{B}$

$$+0{,}0086 \text{ Å}.$$

Um den Vergleich mit den K. Schwarzschildschen Messungen und den später zu besprechenden Untersuchungen

1) A. Charles E. St. John, Astrophys. Journ. 46. S. 249—265. 1917.

von L. Grebe und A. Bachem zu ermöglichen, soll noch bemerkt werden, daß die *direkten* Messungen des Lageunterschiedes in der Sonnenmitte und im Lichtbogen ergaben: für 25 Linien der Klasse 𝔄 die Rotverschiebung

$$+ 0{,}0006 \pm 0{,}0006 \text{ Å},$$

für 18 Linien der Klasse 𝔅

$$+ 0{,}0024 \pm 0{,}0006 \text{ Å}.$$

Für den Sonnenrand ergaben Vergleiche mit dem Lichtbogen unter Zuhilfenahme von Eisenlinien: 17 Linien der Klasse 𝔄

$$+ 0{,}0000 \pm 0{,}0006 \text{ Å}$$

und 18 Linien der Klasse 𝔅

$$+ 0{,}0037 \pm 0{,}0007 \text{ Å}.$$

Die Ergebnisse dieser Messungen sind in der graphischen Darstellung auf S. 329 wiedergegeben.

St. John faßt seine Untersuchungen so zusammen: „Die Größe der Verschiebung nach Rot, welche von der Einsteinschen Theorie verlangt wird, beträgt nahe 0,008 Å für das untersuchte Spektralgebiet. Im Vergleich damit zeigen die Beobachtungen im Zentrum der Sonnenscheibe eine mittlere Verschiebung von ungefähr 0,001 Å nach Violett für die 25 Linien größeren Gewichtes und von 0,001 Å nach Rot für die 18 Linien niederen Gewichts, also eine Nullverschiebung für die 43 Linien. Da die Verschiebung gemäß der Relativitätstheorie unabhängig sein müßte von dem Charakter der strahlenden Zentren, so verlangt dieser Widerstreit zwischen Rechnung und Beobachtung für die Mitte der Sonnenscheibe die Annahme eines Einflusses, welcher eine Verschiebung der Sonnenlinien nach Violett bewirkt von gerade der Größe des vorausgesagten Effektes. Anomale Refraktion, wenn wirksam, würde die Linien nach Rot verschieben; die Wellenlängen der verwerteten Linien werden vom Drucke nicht merklich beeinflußt; es gibt kein Anzeichen dafür, daß die Wellenlänge von der Temperatur der Lichtquelle abhängt; von bekannten Ursachen bleibt nur die Möglichkeit einer nach außen gerichteten Bewegung der Sonnendämpfe in dieser Höhenlage mit einer Geschwindigkeit von 0,634 km/sec, welche den vorausgesetzten Gravitationseffekt verdeckt. Am Sonnenrand würde die radiale Bewegung quer zur Sehlinie erfolgen,

der Dopplereffekt würde verschwinden und die Gravitationsverschiebung von 0,008 Å nach Rot müßte erscheinen. Für die Linien, auf deren Messung am Rande es besonders ankommt, die 17 Linien der Klasse 𝔄 in Tab. II, ist der mittlere Unterschied zwischen Sonnenrand und Lichtbogen gleich Null. Es gibt drei Gründe, diesem Mittelwert ein hohes Gewicht beizulegen; nämlich: Bei der höchsten benutzten auflösenden Kraft zeigen die Linien kein Anzeichen von Zweiteilung; die Feinheit der Linien vermindert die Gefahr des Zusammenfallens mit fremden Linien und vermehrt so die Wahrscheinlichkeit, daß wir es mit einwandfreien Linien zu tun haben; und ihre Trennung von benachbarten Linien ist hinreichend für Präzisionsmessungen."

„Werden die Resultate geringeren Gewichtes für die 18 zusammengesetzten und breiteren Linien der Klasse 𝔅 mit hinzugenommen, so ist die Verschiebung nach Rot am Rande 0,0018 Å, ein Viertel des berechneten Betrages. Die Verschiebung, welche die breiteren Linien zeigen, kann jedoch dem Zusammentreffen mit Linien anderer Elemente zugeschrieben werden. Adams fand, daß am Rande eine Verschiebung nach Rot für die Metallinien allgemeine Regel ist. Beim Übergang vom Zentrum zum Rande ist das Mittel für 120 Linien 0,007 Å. Unentdecktes Zusammentreffen mit solchen Linien ist geeignet, eine systematische Verschiebung nach Rot bei Linien zu veranlassen, die an sich frei vom Randeffekt und in normaler Weise ohne Verschiebung sind."

„Adams fand für 14 Linien im Ultraviolett relativ zum Zentrum eine Verschiebung von 0,002 Å nach Rot; damit ist das Mittel der 85 Linien in Tab. II in Übereinstimmung. Er schreibt diesen Unterschied zwischen Zentrum und Rand einem aufsteigenden Konvektionsstrom zu. Die 25 Linien der Klasse 𝔄, Tab. I, Linien tiefster Höhenlage, zeigen an einen Aufstieg der Dämpfe aus dem Sonneninnern mit 0,08 km/sec. Dies paßt gut mit dem 0,12 km/sec zusammen, welche Adams anzunehmen vorschlägt. Die Verschiebung nach Rot beim Übergang von der Mitte zum Rande für diese Linien, welche tiefliegenden Schichten angehören, scheint verursacht durch das Verschwinden des Doppler-Fizeau-Effektes in den aufsteigenden Strömen jener Höhenlage, in der diese schwachen Linien entstehen. Für die starken Linien

der Klasse B kann man die kleine Verschiebung nach Rot in der Sonnenmitte erklären durch eine nach unten gerichtete Strömung in den größeren Höhen, welcher alle Linien hoher Ursprungslage unterworfen zu sein scheinen. Für beide Arten der Linien, starke und schwache, ist aber die Verschiebung von der Größenordnung der Beobachtungsfehler und es kann auf ihr verschiedenes Verhalten nicht viel Gewicht gelegt werden." In der Zusammenstellung am Schlusse der Arbeit heißt es in bezug auf den noch unerklärten Randeffekt: „Es besteht ein Randeffekt, der nicht auf Rechnung von Bewegung kommt, an welchem Druck, Höhenlage und Intensität der Linien beteiligt zu sein scheinen in verschiedenem Grade bei den verschiedenen Elementen."

Sowohl Schwarzschild wie St. John behandeln außer den Stickstofflinien auch Linien anderer Elemente. Schwarzschild berücksichtigt und eliminiert dabei den Randeffekt und eine absteigende Strömung, welche er aus den über die Sonnenscheibe verteilten Messungen abgeleitet hat. Die dann übrig bleibenden Verschiebungen, in äquivalente Dopplergeschwindigkeiten umgerechnet, werden als „reduzierte Geschwindigkeiten" bezeichnet. Verschiebungen nach Rot gelten als +, Verschiebungen nach Violett als −. Die Resultate sind folgende:

Linien ohne Randeffekt:

Autor	Linie	Ursprung	Intensität	Abstiegsgeschw. km/sec	Reduz. Geschw. km/sec	Randeffekt km/sec
Perot u. Lindsteedt	5172,856	Mg	20	1,6	+ 0,3	−
St. John	3933,825	Ca	1000	1,1	0,0	−
Schwarzschild	3883 usw.	N	2—3	0,3	0,0	−

Linien mit Randeffekt:

Perot	4625,227	Fe	5	0,0	− 0,1	+ 0,8
Perot	5896,155	Na	20	1,4	+ 0,1	+ 0,9
Schwarzschild	3883 usw.	N	0—1	0,2	0,0	+ 0,3

In bezug auf die Eisenlinien sagt Schwarzschild: „Hr. Evershed bemerkte, daß die Rotverschiebung mit der Stärke der Linien geht. Hr. Royds findet aus ausge-

wählten symmetrischen, von der Dampfdichte wenig abhängigen Linien:

Intensität nach Rowland	2—4	5—7	8—10	über 10
Rotverschiebung	+ 0,2	+ 0,2	+ 0,4	+0,8 km/sec.

Man sieht, daß eine dem Einsteineffekt (0,63 km/sec) entsprechende Verschiebung erst bei Linien von erheblicher Intensität (etwa 10) auftritt."

St. John teilt zunächst die schon veröffentlichten eigenen Beobachtungen von 1910 mit, welche sich auf Kalzium in hochliegenden Schichten beziehen:

	H_3	K_3
1 mm vom Rande	3968,478 Å	3933,667 Å
am Rande	476	665
im Bogenlicht	476	667

Es ist hier keine Rotverschiebung angedeutet.

Aus Messungen an 25 Eisenlinien mit einer mittleren Wellenlänge von 6300 Å findet St. John für die Mitte der Sonnenscheibe eine Rotverschiebung von 0,004 Å, während die Einsteinsche Theorie hier 0,013 Å verlangt, „ein Widerspruch zwischen Rechnung und Beobachtung, der zu groß ist, um durch Beobachtungsfehler erklärt werden zu können".

Überblickt man die Arbeiten von K. Schwarzschild und St. John im ganzen, so scheint es ausgeschlossen, daß auf der Sonne ein Gravitationseffekt vom Betrage der Einsteinschen Theorie besteht. K. Schwarzschild bemerkt: „Es spricht besonders gegen den Einsteinschen Effekt, daß alle untersuchten schwächeren Linien im Sonnenspektrum, sowohl die des Eisens wie die des Stickstoffs, überhaupt nur sehr geringe Verschiebungen sowohl gegen die terrestrischen Linien, wie gegen die Mitte der Sonnenscheibe aufweisen."

Man wird mit erheblicher Bestimmtheit auf die Annahme hingewiesen, daß ein merklicher Gravitationseffekt überhaupt fehlt, daß also $\sigma = 0$ *sei.* Aber einiges ist doch auffällig, z. B. der Randeffekt. Da möchte ich folgendes bemerken. Bildet man das Mittel aus den Ergebnissen von K. Schwarzschild und St. John für die N-Linien am Rande der Sonne, so erhält man für die Linien der Intensität 00—1, bezüglich für die

Linien größerer Intensität und die Doppellinien eine Rotverschiebung von

$$0{,}0027\ \text{Å} \text{ bzw. } 0{,}0028\ \text{Å},$$

somit $^1/_3$ des Wertes, den die Einsteintheorie vorschreibt (0,0081 Å). Sicher spielt hier der Zufall mit, und man wird auch daran denken müssen, daß nach St. John das Mitwirken nicht erkannter Metallinien mit Randeffekt zu fürchten ist. Aber immerhin wird auch, solange eine Erklärung des Randeffektes nicht gefunden ist, *die Möglichkeit berücksichtigt werden müssen, daß doch ein geringer Gravitationseffekt, vielleicht im Betrage von $^1/_3$ des Wertes der Einsteintheorie, also mit*

$$\sigma = {}^1/_3$$

vorhanden sein könnte.

Wie Cromelin in seinem im vorigen Paragraphen erwähnten Bericht über die Sonnenfinsternisexpeditionen im Mai 1919 mitteilt, soll auch Evershed zu Folgerungen gegen den Gravitationseffekt der Relativitätstheorie gekommen sein, doch sind mir Einzelheiten nicht bekannt geworden.

1919 haben L. Grebe und A. Bachem[1]) eine weitere ausführliche Untersuchung der Stickstoffbande 3883 Å veröffentlicht. Die Messungen umfassen 36 Linien der Intensität 00—4, von denen 32 auch dem Beobachtungsmaterial von Schwarzschild und 22 dem von St. John angehören. Die Verfasser leiten aus den eigenen Messungen für die Mitte der Sonnenscheibe eine Rotverschiebung von 0,30 km/sec ab, während die mitaufgeführten Messungen von Schwarzschild 0,25 km/sec und die von St. John 0,05 km/sec ergeben. So finden denn auch die Verfasser eine erheblich geringere Verschiebung, als der Relativitätstheorie entspricht. Ihr Beobachtungsmaterial ist in der graphischen Darstellung auf S. 329 in gleicher Weise wiedergegeben, wie das von K. Schwarzschild und St. John. Man erkennt die gute Übereinstimmung. Die Verfasser treten dennoch für die Relativitätstheorie ein, indem sie glauben, die Ursache für die Abweichung in einer Störung infolge Unsymmetrie des Baues der Stickstofflinien finden zu können. Nach ihrer Meinung wird bei der Absorption in den Spektrallinien der

1) L. Grebe und A. Bachem, Verhandl. d. D. Phys. Ges. 21. S. 454—464. 1919.

Sonne ein breiterer Streifen völlig ausgelöscht und wirkt so mit gleichmäßiger Stärke, während in den Emissionslinien des Bogenlichtes bei Unsymmetrie des Baues dem Beobachter ein anderes Bild der Lichtverteilung und damit eine andere Lage der Linie dargeboten werde. Um die Verhältnisse der Absorptionslinien nachzuahmen, machten die Verfasser zwei Aufnahmen des Bogenlichtes mit starker Überexposition. Die eine der Platten zeigte dann gegenüber normaler Belichtung eine Verschiebung von 0,13 km/sec, die andere, noch stärker überbelichtete Platte eine Verschiebung von 0,22 km/sec. Benutzt man diese Ergebnisse zur Korrektur der Sonnenbeobachtungen, so folgt statt des direkt gefundenen Wertes 0,3 km/sec jetzt eine Rotverschiebung von 0,43 bzw. 0,52 km/sec, gegen 0,63 km/sec nach der Einsteinschen Theorie. Die Verfasser schließen:

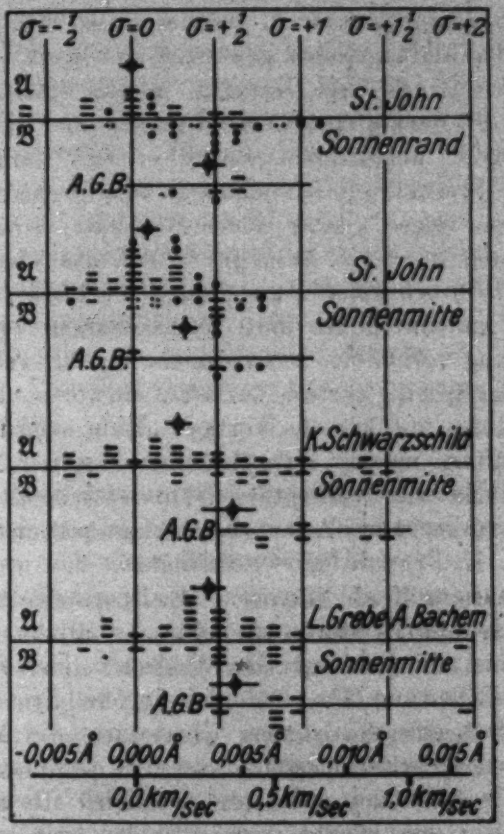
„Es scheint also der angedeutete Effekt in der Tat vorhanden zu sein. Eine systematische Untersuchung dieser Erscheinung, die imstande wäre, alle scheinbar regellosen Verschiebungen der Sonnenlinien zu erklären, soll, sobald die dazu nötigen Mittel zur Verfügung stehen, in Angriff genommen werden."

Die Verfasser haben soeben[1]) über denselben Gegenstand eine neue Arbeit veröffentlicht. Wieder handelt es sich um die Stickstoffbande bei 3883 Å. Mittels eines Mikrophotometers wurden die Linien auf Unregelmäßigkeit des Baues untersucht. Nur solche Linien, welche keine Unsymmetrien erkennen ließen, wurden beibehalten; das waren im ganzen neun Linien des Materiales der früheren Veröffentlichung der Verfasser; sieben davon gehören auch den Beobachtungen Schwarzschilds und fünf den Beobachtungen von St. John an. In der beigefügten graphischen Darstellung (vgl. Fig. 1) sind die Messungen an diesen Linien mit der Bezeichnung A.G.B. = Auswahl Grebe-Bachem gesondert dargestellt. Man erkennt, daß bei den Messungen von St. John sich nichts wesentliches ändert; bei den Messungen von Schwarzschild dagegen gruppieren sich die ausgewählten Linien sehr gut um den Einsteinschen Wert der Verschiebung ($\sigma = 1$). Bei den Messungen der Verfasser selbst wird der Einsteinsche Wert nur von einer einzigen Linie überschritten und

1) C. Grebe u. A. Bachem, Ztschr. f. Phys. 1. S. 51—54. 1920.

diese Linie liegt weit abseits von den übrigen, so daß man das Gefühl einer ungewöhnlichen Besonderheit hat. Da die

Verschiebungen der Linien der Stickstoffbande bei 3883 Å.



Jede Beobachtung ist durch eines der Zeichen —, •, ·· angezeigt. Bei St. John bedeutet • eine Beobachtung minderer Sicherheit, ·· zeigt eine Doppellinie an.

Die 𝔄-Seite umfaßt Linien der Intensität 00 bis 1, die 𝔅-Seite Linien größerer Intensität, bei St. John auch Doppellinien. -•- kennzeichnet den Mittelwert; die Länge der horizontalen Arme ist dabei gleich dem mittleren Fehler.

A.G.B. = Auswahl Grebe-Bachem.

Fig. 1.

Verfasser überdies die Erwägungen von K. Schwarzschild und St. John unberücksichtigt lassen und nicht beachten, daß doch auch andere Beobachtungen als solche an der

3888-Bande vorliegen, so überzeugt ihr Schluß, die Einsteinverschiebung sei nach Sinn und Größe nunmehr nachgewiesen, keineswegs. Ehe man sich entschließen könnte, den Verfassern zu folgen, wird man zum mindesten abwarten müssen, bis das Beobachtungsmaterial, welches sie so sehr verkleinert haben, wieder umfangreicher geworden sein wird. —

E. Freundlich[1]) hat versucht, mittels statistischer Methoden am Fixsternhimmel Anzeichen für die Einsteinsche Rotverschiebung aufzufinden, indem er sich darauf stützte, daß gewisse Sternklassen systematisch Rotverschiebungen der Spektrallinien zeigen. Aber seine Resultate fanden scharfe Zurückweisung durch H. Seeliger[2]), der aus eben den von E. Freundlich benutzten Beobachtungen schließt, daß „nicht nur keine Andeutung für das Vorhandensein einer Gravitationswirkung vorhanden ist, vielmehr nur ein vollkommener Widerspruch gegen die letztere". Darauf antwortete E. Freundlich[3]) vorläufig mit kurzen Worten: „Eine endgültige quantitative Prüfung meiner Hypothese wird erst möglich sein, wenn mehr Material vorliegt." Während ich mit dem Abschluß der vorliegenden Arbeit beschäftigt war, ist eine neue Arbeit von E. Freundlich[4]) erschienen, die wiederum für den Gravitationseffekt eintritt. E. Freundlich schließt: „Für die Helium-(B-)Sterne und für die absolut hellen K- und M-Sterne, die wir auf Grund unserer bisherigen astronomischen Erfahrung für besonders große Systeme halten müssen, liefert eine statistische Überlegung die Möglichkeit, den mittleren Gravitationseffekt von den Dopplereffekten zu trennen. Es offenbart sich mit ziemlicher Gewißheit eine allgemeine Rotverschiebung ihrer Spektren, wie es nach der allgemeinen Relativitätstheorie zu erwarten ist.

2. Daß die statistisch gefundene Rotverschiebung bei den B-Sternen kein Dopplereffekt ist, sondern in den Emissionsbedingungen auf den Sternoberflächen ihren Grund hat, folgt aus der allgemeinen Rotverschiebung der Sterne der Orionnebelgruppe gegenüber dem Spektrum des Nebels." ...

---

1) E. Freundlich, Phys. Ztschr. 16. S. 115—117. 1915; Astron. Nachr. 202. Sp. 17—24. 1915.

2) H. Seeliger, Astron. Nachr. 202. Sp. 83—86. 1916.

3) E. Freundlich, ebenda 202. Sp. 147—148. 1916.

4) E. Freundlich, Phys. Ztschr. 20. S. 561—570. 1919.

„4. Faßt man die ruhenden Kalziumlinien in den Spektren von B- und O-Sternen als durch eine weite Kalziumatmosphäre hervorgerufen auf, so läßt sich eine Rotverschiebung der Sternlinien gegenüber den Kalziumlinien als Gravitationseffekt deuten." . . .

Man wird eine Kritik der E. Freundlichschen Arbeit von astronomischer Seite abwarten müssen. Was aber früher in bezug auf diese Versuche gesagt wurde, wird auch jetzt noch Geltung haben: Die physikalischen Verhältnisse auf den Fixsternen, wo man sowohl mit Bewegungen der Gestirne, als auch der Gasmassen rechnen muß, sind noch schwerer zu übersehen als die auf der Sonne. Nehmen wir aber an, ein Gravitationseffekt sei vorhanden, so können uns die Beobachtungen schwerlich die Frage beantworten, ob der ganze Einsteineffekt oder nur ein Bruchteil bestehe. — Trotz dieser Bedenken darf der Wert derartiger Untersuchungen nicht unterschätzt werden.

II. Teil.

Versuch einer elektrodynamischen Theorie der Gravitation.

§ 7. Elektrodynamische Theorie der Gravitation bei Annahme relativer Isotropie des Feldes.

Das Fundament der Theorie soll die Annahme sein, daß die molekulare Materie aus elektrischen Teilchen aufgebaut ist. Es wird damit die Elektrisierung als eine Grundeigenschaft aller Bausteine der Materie erklärt. Die Annahme erscheint als die natürliche Folgerung aus den Ergebnissen der molekular-physikalischen Forschung der letzten drei Dezennien. Einst lehrte die Elektrodynamik in der Elektrisierung eine wesentliche Ursache der *Trägheit* kennen, nun soll der Nachweis versucht werden, daß die Elektrisierung auch eine wesentliche Ursache der *Gravitation* ist.

Nach dem Vorgang von H. A. Lorentz in seiner Arbeit von 1904 soll angenommen werden, daß in bezug auf die entscheidenden elektromagnetischen und mechanischen Eigenschaften alle molekularen Teilchen sich ebenso verhalten wie die Elektronen. Wir wollen dies noch genauer dahin formulieren, daß wir als Musterbeispiel für das Verhalten der molekularen Teilchen der Materie das Verhalten von Abbildern wählen, welche wir *Elektronen* nennen, und die wir im Falle der Ruhe als *Kugeln mit gleichmäßiger elektrischer Oberflächen-*

ladung ansehen. Damit wird der „Satz des gleichen Anscheins", von dem im § 10 die Rede sein wird, in gewissem Bereich auf das Gravitationsfeld übertragen.

Des weiteren soll als Leitfaden für die Entwicklung der Theorie der Begriff der *Lagrangeschen Funktion* in jener Form gewählt werden, deren Einführung in die Elektrodynamik M. Abraham[1]) zu danken ist. M. Abraham bevorzugte damals das starre Elektron. In seiner Arbeit von 1904 wandte H. A. Lorentz die Theorie auf den Fall der „Lorentzdeformation" an. Die Lagrangesche Funktion L für ein Elektron erscheint in jenen älteren Arbeiten, wo der vom Äther gebotene Untergrund als homogen galt, nur als Funktion der Geschwindigkeit v. Es ist bei der Annahme einer *Oberflächenladung* der Elektronen zu setzen

$$L = -\frac{2}{3}\,\frac{e^2}{a}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \tag{48}$$

wobei e, a, c als fest gegeben erscheinen. Für hinreichend langsame Geschwindigkeitsänderungen, für „quasistationäre" Zustände darf für die x-Richtung, die als Beispiel für irgendeine Richtung gelten soll, gemäß (18) gesetzt werden

$$-\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = X, \tag{49}$$

wobei X die x-Komponente der auf das Elektron einwirkenden bewegenden Kraft ist, und $\partial L/\partial x = 0$ wird. Schreibt man dabei

$$m_x \ddot{x} = X, \tag{50}$$

so wird m_x als die „träge Masse" für die x-Richtung bezeichnet. Es folgt nach den Formeln (49), (50) für die „longitudinale Masse" m_l und die „transversale Masse" m_t:

$$m_l = \frac{\partial^2 L}{\partial v^2}, \quad m_t = \frac{1}{v}\,\frac{\partial L}{\partial v}; \tag{51}$$

bei Verwertung von (48) entstehen die von H. A. Lorentz 1904 angegebenen Formeln

$$m_l = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad m_t = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{52}$$

1) M. Abraham, Nachr. d. Ges. d. Wiss. z. Göttingen 1902. S. 20–41; Ann. d. Phys. 10. S. 105–179. 1903; Theorie der Elektrizität, Leipzig u. Berlin, Teubner, 2. Bd., 3. Aufl. 1914.

wobei

$$m_0 = \frac{-L_0}{c^2} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{a}\frac{1}{c^2} \tag{53}$$

die zu $v = 0$ gehörige „Ruhemasse" bezeichnet.

Die Gesamtenergie des Elektrons ist nach (19) bei Annahme von (48) bis auf eine additive Konstante durch

$$W = v\frac{\partial L}{\partial v} - L = \frac{2}{3}\frac{e^2}{a}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{54}$$

gegeben. Die additive Konstante von (19) wurde hier $= 0$ gesetzt. Es bleibt dann die Frage offen, ob (54) im ganzen eine wirkliche Energie darstellt, oder einen konstanten Teil als Rechnungsgröße mit enthält. Wir kommen darauf am Schluß des § 12 noch einmal zu sprechen. Es folgt nach (53), (54)

$$m_0 = \frac{W_0}{c^2}\,. \tag{55}$$

Dieser Zusammenhang zwischen träger Masse und Energie wird in der Relativitätstheorie als allgemeingültig angenommen. — Die elektromagnetische Energie des Elektrons ist nach M. Abraham durch

$$E = \frac{e^2}{2a}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(1+\frac{1}{3}\frac{v^2}{c^2}\right) \tag{56}$$

gegeben. So erscheint die Gesamtenergie W größer als die elektromagnetische Energie; da die Differenz aber nicht konstant ist, sondern von v abhängt, muß für das der Lorentzdeformation unterworfene Elektron, wie bekannt, neben der elektromagnetischen Energie noch eine andere Energie als mitwirkend angenommen werden. Ich will sie in der vorliegenden Arbeit „*Kohäsionsenergie*" nennen und mit K bezeichnen. Es ist dann

$$W = E + K\,, \tag{57}$$

wobei nach (54) und (56) K durch

$$K = \frac{1}{6}\frac{e^2}{a}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{58}$$

gegeben wird. Die Festsetzung (57) überträgt die Unbestimmtheit der additiven Konstanten von W auf K. Für die Kohäsionsenergie K in der Darstellung (58) läßt sich eine sehr einfache Deutung auffinden. Die von uns hier angenommene Ober-

flächenladung des Elektrons wird durch die elektromagnetischen Kräfte nach außen getrieben, es müssen also, um den Bestand des Elektrons zu ermöglichen, Gegenkräfte wirksam sein; diese können als *Druckkräfte* aufgefaßt werden. Betrachten wir zunächst den Fall der Ruhe. Dann ist der das Elektron zusammenhaltende „Kohäsionsdruck" gegeben durch

$$(59) \qquad p = \frac{1}{2}\varepsilon \mathfrak{E} = \frac{4\pi}{2}\varepsilon^2 = \frac{1}{8\pi}\frac{e^2}{a^4} = \frac{1}{4}\frac{-L_0}{\frac{4}{3}\pi a^3}.$$

Das Volumen des Elektrons bei der Geschwindigkeit v ist

$$(60) \qquad \Omega = \frac{4}{3}\pi a^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Die zugehörige *Volumenergie des Kohäsionsdruckes* p stellt nach (58), (59), (60) gerade die Kohäsionsenergie dar:

$$(61) \qquad K = p\,\Omega.$$

Für den Fall der verschwindenden Geschwindigkeit ergeben sich die einfachen Beziehungen

$$(62) \qquad W_0 = -L_0 = E_0 + K_0 = \frac{4}{3}E_0 = 4K_0,$$

$$(63) \qquad m_0 = \frac{W_0}{c^2} = \frac{4}{3}\frac{E_0}{c^2} = 4\frac{p\,\Omega_0}{c^2}.$$

Alle bisher im vorliegenden Paragraphen für die Elektronen mitgeteilten Formeln wurden unter der Annahme eines *homogenen* Äthers abgeleitet. Jetzt soll mit einem *inhomogenen Feld* gerechnet werden. Wollte man sich dabei ganz den allgemeinen Gedanken A. Einsteins anschließen, so müßte im allgemeinen *relative Anisotropie* vorausgesetzt werden; damit will ich ausdrücken, daß der Äther an irgendeiner Stelle verglichen mit dem an irgendeiner anderen Stelle im allgemeinen als anisotrop gelten müßte. *Statt dessen soll in diesem Paragraphen zur Vereinfachung der Theorie versucht werden, mit der Annahme der relativen Isotropie auszukommen.* Wir beschränken uns dabei durchaus auf die Behandlung *stationärer Felder.*

In erster Linie wird uns das spezielle Beispiel des *„Gravitationsfeldes in der Umgebung eines Zentralkörpers"* beschäftigen. Dann soll angenommen werden, es handle sich um die Umgebung eines kugelig gebauten Körpers von so überwiegend großer Masse, daß dagegen der Einfluß aller übrigen für die Untersuchung in Betracht kommenden Körper auf das Gravi-

tationsfeld vernachlässigt werden darf. Weiter wird angenommen werden, das Gravitationsfeld sei in sehr weiten Fernen vom Zentralkörper, wo dessen Einfluß nicht mehr merklich ist, homogen. Der Einfluß des Zentralkörpers erscheint dann als „*Störung*" in einem sonst homogenen Felde. Die Koordinaten $x, y, z, r, \varphi, \vartheta$ mit Anfangspunkten im Mittelpunkt des Zentralkörpers sollen auf das störungsfreie Feld bezogen werden, also auf das Feld, welches sich für die Rechnung ergibt, wenn man sich den Zentralkörper beseitigt denkt. Bei all den Symbolen c, a, ... werden die zum störungsfreien Feld gehörigen Werte durch Überstreichen ausgezeichnet werden. So bedeutet also z. B. $\bar{c}$ den Wert der Lichtgeschwindigkeit in sehr weiten Fernen vom Zentralkörper. Im Störungsfeld ist c als Funktion der Entfernung r anzusehen. Die Hypothese der relativen Isotropie verlangt dabei, die Lichtgeschwindigkeit als an jedem Ort nach allen Richtungen gleich groß anzusehen.

Die elektrische Ladung e soll an jedem Orte so gemessen werden, daß bei Ruhe $e^2/2a$ nach wie vor überall die elektrische Energie darstellt. Dabei wird e dann als die „*freie*" Ladung bezeichnet werden.

Im folgenden vergleichen wir Zustände und Vorgänge an irgendeiner Stelle des Gravitationsfeldes mit den äquivalenten im störungsfreien Felde.

Den theoretischen Umständen angemessen werden wir *Potenzbeziehungen* zwischen den verschiedenen Größen annehmen. Wir schreiben demgemäß

$$\frac{e}{\bar{e}} = \left(\frac{c}{\bar{c}}\right)^{\varrho}, \quad \frac{L_0}{\bar{L}_0} = \left(\frac{c}{\bar{c}}\right)^{1/\gamma}, \tag{64}$$

wobei ϱ und γ zunächst unbekannte Zahlen bleiben. Wegen (48), (53), (59) ist dann

$$\frac{a}{\bar{a}} = \left(\frac{c}{\bar{c}}\right)^{2\varrho - \frac{1}{\gamma}}, \quad \frac{p}{\bar{p}} = \left(\frac{c}{\bar{c}}\right)^{\frac{4}{\gamma} - 6\varrho}, \quad \frac{m_0}{\bar{m}_0} = \left(\frac{c}{\bar{c}}\right)^{\frac{1}{\gamma} - 2}. \tag{65}$$

Da die Elektronen mit der angenommenen Flächenladung als Musterbeispiele für das Verhalten der wirklichen molekularen Bausteine der Materie dienen sollen, so folgt, daß die Formeln (64), (65) zugleich für alle molekularen Bausteine gelten müssen. Unter a kann daher die Länge irgendeiner Strecke verstanden werden und unter p der Kohäsionsdruck auf irgendeinem Flächenelement.

Für die Kraft F, die ein Teil der molekularen Bausteine infolge der inneren Wechselwirkungen erfährt, ergibt sich, da sie direkt proportional ist mit dem Quadrat der Ladungen und umgekehrt proportional mit dem Quadrat der Entfernungen, bzw. direkt proportional mit den Drucken und den Größen der Flächen,

$$\frac{F}{\bar{F}} = \frac{e^2/a^2}{\bar{e}^2/\bar{a}^2} = \frac{p\,a^2}{\bar{p}\,\bar{a}^2} = \left(\frac{c}{\bar{c}}\right)^{\frac{2}{\gamma}-2\varrho}. \tag{66}$$

T sei die Ablaufszeit eines physikalischen Vorgangs, dann ist die jeweilige Beschleunigung bei einer äquivalenten Bewegung direkt proportional mit den Längen und umgekehrt proportional mit T^2, andererseits umgekehrt proportional mit der Trägheit und direkt proportional mit den Kräften, also ist

$$\frac{a}{\bar{a}}\,\frac{\bar{T}^2}{T^2} = \frac{\bar{m}}{m}\,\frac{F}{\bar{F}}. \tag{67}$$

Wird zunächst m und $\bar{m}$ durch m_0 und $\bar{m}_0$ ersetzt, so folgt

$$\frac{T}{\bar{T}} = \left(\frac{c}{\bar{c}}\right)^{2\varrho-\frac{1}{\gamma}-1} \tag{68}$$

und wegen (65)

$$\frac{c\,T}{a} = \frac{\bar{c}\,\bar{T}}{\bar{a}}. \tag{69a}$$

Also ist auch, da die Geschwindigkeiten bei äquivalenten Bewegungen proportional mit a und umgekehrt proportional mit T sind:

$$\frac{v}{c} = \frac{a}{Tc} = \frac{\bar{a}}{\bar{T}\bar{c}} = \frac{\bar{v}}{\bar{c}}. \tag{69b}$$

Weil nun die Trägheit durch v/c bestimmt wird, folgt für äquivalente Bewegungen

$$\frac{m}{\bar{m}} = \frac{m_0}{\bar{m}_0}. \tag{70}$$

So war der Ersatz von $m/\bar{m}$ durch $m_0/\bar{m}_0$ in (67) erlaubt, und es dürfen (68), (69a), (69b), (70) als gültig angenommen werden. (68) ist insbesondere auf die Schwingungsperioden der *Spektrallinien* anzuwenden und gibt dann die Verschiebung dieser Linien im Gravitationsfeld an. $c\,T$ und $\bar{c}\,\bar{T}$ geben die vom Licht in den äquivalenten Zeiten T und $\bar{T}$ durchlaufenen Strecken an, (69a) spricht hiernach den folgenden Satz aus: *Die Lichtgeschwindigkeit erscheint überall im Gravitationsfeld*

gleich groß, wenn sie durch lokale Messungen unter Benutzung äquivalenter Längen und Zeiten festgestellt wird.

Da die Lagrangesche Funktion L zunächst nur für die Vorgänge im homogenen Maßfeld aufgestellt worden ist, darf nicht ohne weiteres angenommen werden, sie gäbe auch jene Kräfte an, welche ihren Ursprung in der Inhomogenität des Feldes haben. Bei der energetischen Bedeutung von L liegt es aber nahe, ihr nach dem Vorgang von M. Abraham diese Anwendbarkeit zuzuschreiben. *Indem wir diesen Schritt nun tun, ergibt sich eine Theorie der Gravitation.*

Um die Bedeutung der Hypothese für unseren Standpunkt zu zeigen, soll die *statische Gravitation* untersucht werden. Dazu ist anzunehmen, daß die Bewegungen des Körpers, auf den L sich bezieht, genügend langsam erfolgen, um zu erlauben, v gegen c zu vernachlässigen. Gemäß der erweiterten Bedeutung, die L beigelegt wird, ist dann zu setzen

$$g\, m_0 = \left(-\frac{\partial L}{\partial r} + \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)_0 = -\frac{\partial L_0}{\partial r}, \tag{71}$$

$$g = \bar{c}^2 \left(\frac{c}{\bar{c}}\right)^2 \frac{1}{L_0}\frac{\partial L_0}{\partial r}, \tag{72}$$

wobei g die „Schwerkraft", gemessen durch die Anfangsbeschleunigung beim freien Fall, bedeutet. (71) ergibt im Hinblick auf (62) für ein Elektron mit Oberflächenladung

$$\begin{cases} g\, m_0\, d\, r = d\, E_0 + d\,(\tfrac{4}{3}\, a^3 \pi\, p) \\ \qquad\quad = \tfrac{4}{3}\pi\, a^3\, d\, p + (d\, E_0 + p\, 4\pi\, a^2\, d\, a)\,. \end{cases} \tag{73}$$

Angesichts dieser Formel soll die Schwerkraft g in zwei Teile $g^{(p)}$ und $g^{(c)}$ zerlegt werden:

$$g = g^{(p)} + g^{(c)}, \tag{74}$$

von denen $g^{(p)}$ auf Rechnung des Kohäsionsdruckes p kommt, wenn dieser als ein vom Äther auf das Elektron ausgeübter Druck aufgefaßt wird. *Dieser Anteil der Schwerkraft, der mechanischen Ursprungs* erscheint, ist unabhängig davon, ob das Elektron bei der Verschiebung die Größe verändert oder nicht, also wird er bestimmt durch

$$g^{(p)}\, m_0\, d\, r = \Omega_0\, d\, p; \quad \Omega_0 = \tfrac{4}{3}\pi\, a^3; \tag{75}$$

$$g^{(p)} = \frac{1}{4}\,\bar{c}^2 \left(\frac{c}{\bar{c}}\right)^2 \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial r}. \tag{76}$$

Für den zweiten Teil der Schwerkraft ergeben (73) und (75)

$$dE_0 = g^{(e)} m_0 \, dr - p \, 4\pi a^2 \, da . \tag{77}$$

Links sehen wir die Zunahme der elektrischen Energie; das erste Glied rechts zeigt die Arbeit der äußeren Kräfte an, welche durch $g^{(e)}$ vermittelt wird, das zweite Glied rechts bringt die Arbeit des Kohäsionsdruckes bei der Volumänderung des Elektrons. Wäre e unveränderlich und also die Volumänderung die einzige Ursache für die Änderung der elektrischen Energie, so wäre $dE_0 =$ der Arbeit des Kohäsionsdruckes $= -p\,4\pi a^2 da$, also $g^{(e)} = 0$. *Hiernach erscheint $g^{(e)}$ elektrodynamischen Ursprungs*, nämlich als Folge einer Änderung der freien Elektrizität. *Es wird dieser Teil der Schwerkraft jenen Kräften analog, welche in dielektrischen Flüssigkeiten elektrisch geladene Körper von Orten niederer zu Orten höherer Dielektrizitätskonstanten treiben.*

Die Hypothese der Erklärung der Schwerkraft durch die Lagrangesche Funktion L kann nach diesen Überlegungen so aufgefaßt werden, als werde für die Schwerkraft eine mechanische Ursache in dem Wechsel des Kohäsionsdruckes und eine elektrodynamische Ursache in dem Wechsel der freien Elektrisierung angenommen. Die Theorie im ganzen wird trotz dieser Zerlegung der Ursachen als *„elektrodynamische Theorie der Schwerkraft"* bezeichnet werden dürfen, denn es besteht zwischen allen den wirksamen Änderungen ein innerer Zusammenhang.

Für den *elektrodynamischen Anteil der Schwerkraft* ergibt (74) in Verbindung mit (72) und (76)

$$g^{(e)} = \bar{c}^2 \left(\frac{e}{\bar{e}}\right)^2 \left(\frac{1}{L_0}\frac{\partial L_0}{\partial r} - \frac{1}{4}\frac{1}{p}\frac{\partial p}{dr}\right) . \tag{78}$$

Bei Verwertung der Beziehungen (64), (65) folgt für die Potentiale Φ, $\Phi^{(p)}$, $\Phi^{(e)}$ der statischen Schwerkraft und ihre beiden Anteile

$$g = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad g^{(p)} = \frac{\partial \Phi^{(p)}}{\partial r}, \quad g^{(e)} = \frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial r}, \tag{79}$$

$$\Phi = \frac{\bar{c}^2}{2\gamma}\left(\frac{e}{\bar{e}}\right)^2 + \text{const}, \tag{80}$$

$$\Phi^{(p)} = (1 - \tfrac{3}{4}\gamma\varrho)\,\Phi, \qquad \Phi^{(e)} = \tfrac{3}{4}\gamma\varrho\,\Phi . \tag{81}$$

Eine andere Methode, Φ zu bestimmen, welche die Berechnung von m_0 vermeidet, kann an die weiter unten an-

gegebene Formel (108) geknüpft werden. Von dieser Methode wird in §§ 9 und 10 Gebrauch gemacht werden.

Es ist von nicht geringem Interesse, zu bemerken, daß A. Einstein die Formel (80) für den Fall $\gamma = 1$ bei seinem ersten Versuch verwertete, eine Theorie der Gravitation zu schaffen; dann erst ging er die Wege, welche zur allgemeinen Relativitätstheorie führten. Auch M. Abraham benutzte in seiner ersten Gravitationstheorie den Ansatz (80) mit $\gamma = 1$. —

Wir wenden uns nun der *Untersuchung des elektromagnetischen Feldes* zu. In der gewöhnlichen Elektrodynamik, wo das Maßfeld als homogen betrachtet wird, nimmt man für den freien Äther die Gleichungen an:

$$\frac{d\mathfrak{E}}{dt} = c \operatorname{vers} \mathfrak{M}, \qquad \frac{d\mathfrak{M}}{dt} = -c \operatorname{vers} \mathfrak{E}, \tag{82}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathfrak{M} = 0. \tag{83}$$

$$\mathsf{E} = \frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{E}^2 \, d\omega + \frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{M}^2 \, d\omega, \tag{84}$$

$$\mathfrak{F} = e\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{M}]\right). \tag{85}$$

„Version", abgekürzt „vers", gehört zu den drei von Maxwell vorgeschlagenen Ausdrücken:

$$\text{version} = \text{curl} = \text{rotation}.$$

Den Ausdruck Rotation, der jetzt in deutschen Arbeiten viel gebraucht wird, möchte ich vermeiden, weil er in unwillkommener Weise geeignet ist, den wichtigen Unterschied zwischen „polarem" und „achsialem" Vektor oder „Rotor" zu verwischen.

Es ist unsere Aufgabe, die Gleichungen (82) bis (85) so umzugestalten, daß sie für das inhomogene Gravitationsfeld passend werden. Von der Freiheit der Definition von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$ machen wir solchen Gebrauch, daß (84) unverändert bestehen bleibt. Da schon festgesetzt wurde, daß $e^2/2a$ die elektrische Energie einer geladenen Kugel angeben soll, ist dann auch (85) unverändert beizubehalten. Es bleibt also nur noch eine Umwandlung von (82) und (83). *Hier entspricht unserer Annahme*

$$\frac{\varepsilon}{e} = \left(\frac{\sigma}{e}\right)^2 \tag{86}$$

der Ansatz

$$(87)\qquad \frac{1}{c^2}\frac{d\mathfrak{E}}{dt} = \operatorname{vers}(c^1 - e\,\mathfrak{M}); \quad \frac{1}{c^2}\frac{d\mathfrak{M}}{dt} = -\operatorname{vers}(c^1 - e\,\mathfrak{E});$$

$$(88)\qquad \operatorname{div}\frac{1}{c^2}\mathfrak{E} = 0; \quad \operatorname{div}\frac{1}{c^2}\mathfrak{M} = 0.$$

Um dies einzusehen, beachte man, daß für eine Fläche Σ, die von der geschlossenen Linie Λ berandet ist und ganz im freien Äther liegt, die erste der Gleichungen (87) ergibt

$$(89)\qquad \frac{d}{dt}\int_{\Sigma}\frac{\mathfrak{E}_n}{c^2}\,d\sigma = \int_{\Lambda} c^1 - e\,\mathfrak{M}_\lambda\,d\lambda.$$

c^2 durfte unter das Integralzeichen genommen werden, weil nur stationäre Gravitationsfelder berücksichtigt werden. Wird Σ durch Zusammenziehen von Λ zu einem Punkt in eine geschlossene Fläche verwandelt, so folgt, daß das Integral

$$(90)\qquad \int\frac{\mathfrak{E}_n}{c^2}\,d\sigma$$

konstant bleibt, so lange die Fläche im freien Äther liegt, also nicht von Materie durchsetzt wird. Enthält der Innenraum keine Materie, so muß der Fall verschwindender elektromagnetischer Erregung als zulässig gelten, also das Integral (90) verschwinden: *Für geschlossene Flächen, die ganz im freien Äther liegen und nur freien Äther umschließen, ist*

$$(91)\qquad \int\frac{\mathfrak{E}_n}{c^2}\,d\sigma = 0.$$

Daraus folgt unmittelbar der weitere Satz, daß im freien Äther die erste der Gleichungen (88) gelten muß.

Ferner ergibt sich nun durch bekannte Überlegungen, daß alle geschlossenen Flächen, die dieselbe Materie und nur diese enthalten, denselben Wert des Integrals (90) besitzen. — Denken wir uns einen materiellen Körper, der sich beliebig im Raume bewegt, dabei aber niemals mit anderer Materie in unmittelbare Berührung kommt. Dann lassen sich immer Flächen angeben, welche, ganz im freien Äther liegend, ihn umschließen, und allen muß derselbe Integralwert zugehören. *So erscheint der Integralwert als Eigentum der Materie zuzugehören, genauer gesprochen, ihrer Verkettung mit dem Äther.* In eben dieser Verkettung sehen wir den Grund für den Bestand der Materie, folglich ist der Integralwert auch dann als un-

veränderlich zu betrachten, wenn die Materie irgendwie mit anderer in Berührung kommt; vorausgesetzt wird dabei nur, daß sie nach jeder Berührung wieder im alten Stande beisammen ist. —

Ist der untersuchte materielle Körper so klein, wie z. B. ein Atom oder Elektron, daß um ihn eine Fläche gelegt werden kann, auf welcher c nicht merklich variiert; so folgt

$$\int \frac{\mathfrak{E}_n}{c^2}\, d\sigma = \frac{1}{c^2}\int \mathfrak{E}_n\, d\sigma = 4\pi\frac{e}{c^2}, \tag{92}$$

wobei e die „freie" elektrische Ladung bedeutet. Da nun der Integralwert unveränderlich sein soll, so entsteht der Satz

$$\frac{e}{\bar{e}} = \left(\frac{c}{\bar{c}}\right)^n, \tag{93}$$

der begründet werden sollte. Analogieschlüsse führen zu den zweiten der Gleichungen (87), (88). —

Eine weitere Ausführung der Theorie wird geboten, wenn wir beachten, daß das Newtonsche Gesetz jedenfalls in sehr weitgehender Annäherung gilt. Näherungsweise ist also wegen (80)

$$\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{c}{\bar{c}}\right)^2 = -\frac{k M'}{\bar{c}^2 r} + \text{const}, \tag{94}$$

wobei M' eine Größe sein soll, die mit großer Annäherung die schwere Masse des Zentralkörpers im Sinne der gewöhnlichen Mechanik darstellt. In § 5 wurde festgestellt, daß selbst für eine so große Masse wie die Sonne $k M'/\bar{c}^2$ nur den Wert 1,45 km besitzt. $k M'/\bar{c}^2 r$ erscheint also als eine gegen 1 sehr kleine Zahl. *So führt* (94) *dazu, den Ansatz*

$$\frac{c}{\bar{c}} = 1 - \gamma\frac{k M'}{\bar{c}^2 r} + \varepsilon\left(\frac{k M'}{\bar{c}^2 r}\right)^2 \tag{95}$$

zu machen, welcher als Anfang einer Reihenentwicklung nach Potenzen von $1/r$ *anzusehen ist.* ε ist eine Konstante. Bezeichnet n den Exponenten derjenigen Potenz von $c/\bar{c}$, in deren Reihenentwicklung das Glied zweiter Ordnung, d. h. das $1/r^2$ enthaltende Glied verschwindet, so folgt mit einer Genauigkeit, die jedenfalls noch bis zur zweiten Ordnung geht,

$$\left(\frac{c}{\bar{c}}\right)^n = 1 - n\gamma\frac{k M'}{\bar{c}^2 r} \tag{96}$$

und es ist dabei

$$n = 1 - \frac{2\varepsilon}{\gamma^2}, \quad \varepsilon = \frac{1-n}{2}\gamma^2. \tag{97}$$

$n = 0$ kann als Anzeichen des Logarithmus gelten; sobald $n = 0$ wird, tritt nämlich

$$\lg \frac{c}{\bar{c}} = -\gamma \frac{k M'}{\bar{c}^2 r} \tag{98}$$

an Stelle von (96). Im Hinblick auf (96) ist

$$\Delta c^n = -\operatorname{div} \operatorname{grad} c^n = 0 \tag{99}$$

als eine *Feldgleichung* anzusehen, welche im Störungsfeld noch bis auf Glieder zweiter Ordnung richtig ist. Bedenkt man, daß c für die Beschaffenheit des Maßfeldes charakteristisch ist, so liegt es sehr nahe, zu vermuten, daß für c eine einfache Feldgleichung besteht und daß demgemäß n eine einfache Zahl sei, eine Zahl wie 0 oder $^1/_2$, oder 1, und dergleichen. Dieser Gedanke wird uns bei der Beurteilung der Theorie weiterhin ein Leitfaden sein. An Stelle von (95) tritt nun

$$\frac{c}{\bar{c}} = 1 - \gamma \frac{k M'}{\bar{c}^2 r} + \frac{1-n}{2} \gamma^2 \left(\frac{k M'}{\bar{c}^2 r} \right)^2 . \tag{100}$$

(80 und (100) ergeben

$$\Phi = -\frac{k M'}{r} \left[1 + \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \gamma \frac{k M'}{\bar{c}^2 r} \right] . \tag{101}$$

Nimmt man für die Bildung von (101) das Newtonsche Gesetz als gültig an, so scheint die Umgebung eines Zentralkörpers erfüllt von schwerer Masse der Raumdichte

$$\mu = \frac{1}{4 \pi k} \Delta \Phi = \frac{2-n}{4 \pi k \bar{c}^2} \gamma g^2 . \tag{102}$$

Um den Vergleich der Theorie mit der Erfahrung vorzubereiten, beachten wir zunächst, daß (80) in Verbindung mit (99), wenn die Geringfügigkeit der Variation von c beachtet wird, die Gültigkeit des Newtonschen Gesetzes in erster Annäherung gewährleisten. (100) sagt in Verbindung mit den Darlegungen in § 5 aus, daß für die Lichtablenkung im Gravitationsfeld eines Zentralkörpers

$$i = -2 \gamma \frac{1}{h} \frac{k M}{\bar{c}^2} \tag{103}$$

gesetzt werden darf. Nach (68) in Verbindung mit (100) ergibt sich für die Verschiebung der Spektrallinien im Gravitationsfeld in der hier genügenden ersten Annäherung die frühere Formel (44):

$$\frac{T}{\bar{T}} = 1 + \sigma \frac{k M}{\bar{c}^2 r} , \tag{104}$$

wobei nun gilt

$$\sigma = 1 - \gamma\,(2\varrho - 1)\,. \tag{105}$$

Zur Berechnung der Perihelbewegung eines Planeten bieten sich Energiesatz und Flächensatz dar. Der Energiesatz (21) erhält die Form

$$v\frac{\partial L}{\partial v} - L = \text{const}, \tag{106}$$

und kann darum dargestellt werden durch

$$\frac{L_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{\bar{c}^2}}} = \frac{\bar{L}_0}{\sqrt{C}}, \tag{107}$$

oder:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2 = \bar{c}^2\left(\frac{c}{\bar{c}}\right)^2\left[1 - C\left(\frac{c}{\bar{c}}\right)^{2/\gamma}\right], \tag{108}$$

wobei C eine Konstante ist, die sehr nahe den Wert 1 hat. Der Flächensatz wird durch die Lagrangesche Gleichung

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = 0 \tag{109}$$

gegeben und erhält die Form

$$-\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{r^2\dot{\psi}L_0}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{\bar{c}^2}}} = \text{const}. \tag{110}$$

Bei Rückblick auf (107) folgt:

$$r^2\dot{\psi} = \left(\frac{c}{\bar{c}}\right)^2 f, \tag{111}$$

wobei f die Integrationskonstante bezeichnet. Setzt man $1/r = x$, so ergeben (108) und (111):

$$\left(\frac{dx}{d\psi}\right)^2 + x^2 = \left(\frac{\bar{c}}{c}\right)^2\frac{\bar{c}^2}{f^2}\left[1 - C\left(\frac{c}{\bar{c}}\right)^{2/\gamma}\right]. \tag{112}$$

Hier ist rechts die Entwicklung (95) zu verwerten; dabei kann in dem entstehenden sehr kleinen Gliede mit dem Faktor x^2 die Konstante C durch 1 ersetzt werden. Dann folgt

$$\left(\frac{dx}{d\psi}\right)^2 = (-x^2 + Ax + B)\left[1 - \left(5\gamma - 2 - \frac{2\varepsilon}{\gamma}\right)\frac{\bar{c}^2}{f^2}\left(\frac{kM}{\bar{c}^2}\right)^2\right] \tag{113}$$

und also

$$\frac{dx}{\sqrt{-x^2+Ax+B}} = d\psi\left[1 - \left(5\gamma - 2 - \frac{2\varepsilon}{\gamma}\right)\frac{\bar{c}^2}{2f^2}\left(\frac{kM}{\bar{c}^2}\right)^2\right], \tag{114}$$

wobei A und B Konstanten sind. Integration ergibt die Gleichung

$$(115)\quad x = \frac{1}{r} = \frac{1}{R}\sin\left\{\psi\left[1 - \left(5\gamma - 2 - \frac{2\sigma}{\gamma}\right)\frac{(kM)^2}{2f^2c^2}\right] + \psi_0\right\} + \frac{1}{R_m},$$

welche für das Vorrücken des Perihels bei einem Umlauf des Planeten den Betrag liefert

$$(116)\quad \Delta\psi = \left(5\gamma - 2 - \frac{2\sigma}{\gamma}\right)\frac{\pi(kM)^2}{f^2c^2}.$$

Ist T die Umlaufszeit, a die große Halbachse, ε die Exzentrizität, so darf hier gesetzt werden

$$(117)\quad f = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{T}, \quad kM = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$$

und es folgt nun bei Benutzung von (97) die Tisserandsche Formel (12) mit

$$(118)\quad q = 5\gamma - 2 - \frac{2\sigma}{\gamma} = \gamma(n+4) - 2.$$

§ 8. Vergleich der gewonnenen Theorie der Gravitation mit der Erfahrung.

Nach der gewonnenen elektrodynamischen Theorie gilt das Newtonsche Gesetz in erster, schon sehr weitgehender, Annäherung. Die Theorie gibt überdies die drei Konstanten γ, ϱ, n an die Hand, um weiteren Erfahrungen gerecht zu werden. Da nun gerade Beobachtungsergebnisse in drei Hinsichten in Betracht kommen, Lichtablenkung, Verschiebung der Spektrallinien und Perihelbewegung, so könnte es scheinen, als ob uns bei dem Vergleich der Theorie mit der Erfahrung nichts weiter als eine Konstantenbestimmung übrig bliebe. So liegt die Sache aber keineswegs. Zunächst sind die Beobachtungsergebnisse nicht sicher. Nach § 5 und § 6 ist

γ im Intervall 1 bis 2,
σ im Intervall 0 bis 1

zu suchen, wobei sich ergab, daß für σ Werte oberhalb etwa $^1/_3$ unwahrscheinlich sind. Nehmen wir eine Mitwirkung sonnennaher Massen nicht an, so muß

q in der Nähe von 4,8

liegen, und zwar so, daß $q = 4$ sowie $q = 5^1/_2$ schon unwahrscheinlich sind, und $q = 6$ noch weniger in Betracht kommt.

Wird mit der Möglichkeit der Mitwirkung sonnennaher Massen gerechnet, so können kleinere Werte von q als 4 bis herab zu $q = 0$ zugelassen werden.

So sehen wir uns bei dem Vergleich mit der Erfahrung sehr ernsten Unsicherheiten gegenüber. Da müssen wir die Sache von einer anderen Seite betrachten. *Sollte die Theorie die Wirklichkeit darstellen, so muß sie sich bei der Einfachheit ihrer Grundlagen und ihres Aufbaus auch einfach gestalten.* Dies kann nach vielfachen Erfahrungen der Physik erwartet werden, denn die Wirklichkeit hat sich noch immer einfach gezeigt, wo man sie recht verstehen lernte. Eben das Prinzip der Einfachheit hat, wie in §§ 10 und 11 gezeigt werden wird, H. A. Lorentz und A. Einstein bei den hier in Betracht kommenden Arbeiten geleitet. Unsere Aufgabe wird es also nun sein, ausgezeichnete Fälle der entwickelten Theorie aufzusuchen und zuzusehen, ob diese der Erfahrung gerecht werden können.

Ich selbst fand den Eingang in die entwickelte Theorie, indem ich mir die Frage vorlegte, ob vielleicht die statische Gravitation sich vollständig durch die Variation des Kohäsionsdrucks erkläre. Es ist nach (81)

$$\Phi^{(r)} = (1 - \tfrac{3}{4}\gamma\varrho)\,\Phi\,, \qquad \Phi^{(e)} = \tfrac{3}{4}\gamma\varrho\,\Phi\,. \tag{119}$$

Eine *„reine Ätherdrucktheorie der Gravitation"* würde also $\gamma\varrho = 0$ verlangen. Da γ nach den Beobachtungen von 0 verschieden ist, müßte $\varrho = 0$ sein. Nun ist nach (105)

$$\sigma = 1 - \gamma(2\varrho - 1), \quad \varrho = \frac{1-\sigma}{2\gamma} + \frac{1}{2}, \tag{120}$$

es würde also $\sigma = 1 + \gamma$ folgen, und da nach den Beobachtungen über die Lichtablenkung $\gamma \leqq 1$ ist, müßte $\sigma \leqq 2$ sein. Das gäbe eine Rotverschiebung, die mindestens doppelt so groß als die von Einstein angenommene wäre. Hierin liegt ein scharfer Widerspruch mit der Erfahrung und *es ist darum eine reine Ätherdrucktheorie unmöglich.* — Eine *„rein elektrische Theorie der Gravitation"* andererseits würde nach (119) und (120) verlangen:

$$\gamma\varrho = \tfrac{3}{3}\,, \quad \sigma = \gamma - \tfrac{1}{3}\,. \tag{121}$$

Da γ mindestens $= 1$ ist, müßte σ mindestens $= 2/3$ sein, das scheint ein so bedenklich hoher Wert, daß auch eine rein

elektrische Erklärung der Gravitation kaum in Betracht kommt. (119), (120) ergeben

$$\Phi^{(r)} = \frac{1 + 3\sigma - 3\gamma}{4}\Phi. \tag{122}$$

Der Faktor von Φ wird hier negativ, wenn $\gamma \gtrless 1$, $\sigma < {}^2/_3$ gesetzt wird: *Danach scheinen die Beobachtungen anzuzeigen, daß der vom Kohäsionsdruck herrührende Anteil der Gravitation der beobachteten Gravitation entgegenwirkt.*

ϱ muß innerhalb des Intervalls $\frac{1}{2}$ bis 1 liegen. Wäre nämlich $\varrho > 1$, so müßte wegen $\gamma \gtrless 1$ nach (120) $\sigma < 0$ sein, ebenso ergäbe $\varrho < \frac{1}{2}$ nach (120) $\sigma > 1$; beides ist nach den Beobachtungen ausgeschlossen, denn $\sigma < 0$ würde eine Violettverschiebung der Spektrallinien, $\sigma > 1$ eine größere Rotverschiebung als nach der Einsteinschen Theorie bedeuten. Es werden im folgenden die Fälle $\varrho = 1$, $\varrho = {}^3/_4$, $\varrho = {}^2/_3$, $\varrho = {}^1/_2$ Beachtung finden. —

Während Lichtablenkung und Verschiebung der Spektrallinien Erscheinungen „erster Ordnung" sind, nämlich solche, welche von Gliedern mit $1/r$ in den Reihenentwicklungen nach $1/r$ abhängen, ist die Perihelbewegung eine Erscheinung „zweiter Ordnung". Die zugehörige Erscheinung „erster Ordnung" ist hier durch das Newtonsche Gesetz gekennzeichnet. Für q fanden wir die Bestimmungsgleichung

$$q = \gamma(n + 4) - 2, \tag{123}$$

wobei n der Feldgleichung

$$\Delta c^n = -\operatorname{div}\operatorname{grad} c^n = 0 \tag{124}$$

zugehört. Um die Übersicht zu erleichtern, mag bemerkt werden, daß folgende Fälle in Erwägung gezogen werden sollen:

$$\left\{\begin{array}{lll} \gamma = 1, & n = 3, & q = 5; \\ \gamma = {}^4/_3, & \left\{\begin{array}{ll} n = {}^3/_4, & q = 4{}^1/_3, \\ n = 1, & q = 4{}^2/_3; \end{array}\right. \\ \gamma = {}^3/_2, & \left\{\begin{array}{ll} n = {}^2/_3, & q = 5, \\ n = 1, & q = 5{}^1/_2; \end{array}\right. \\ \gamma = 2, & \left\{\begin{array}{ll} n = -{}^1/_2, & q = 5, \\ n = -{}^1/_3, & q = 5{}^1/_3, \\ n = -{}^1/_4, & q = 5{}^1/_2. \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{125}$$

Wir richten die Aufmerksamkeit zunächst auf den allereinfachsten Fall, den die Theorie überhaupt zu bieten vermag:

I. Fall: $\varrho = 1$.

Dann ergeben sich für das elektromagnetische Feld genau wie in der gewöhnlichen Elektrodynamik für den freien Äther die Gleichungen

$$\frac{d\mathfrak{E}}{dt} = c \operatorname{vers} \mathfrak{M}, \quad \frac{d\mathfrak{M}}{dt} = -c \operatorname{vers} \mathfrak{E}; \tag{126}$$

der Unterschied ist nur, daß c als veränderlich gelten muß, und demgemäß für den freien Äther

$$\operatorname{div} \frac{\mathfrak{E}}{c} = 0, \quad \operatorname{div} \frac{\mathfrak{M}}{c} = 0 \tag{127}$$

zu setzen ist. Zwischen γ und σ folgt wegen (120) die Beziehung

$$\sigma = 1 - \gamma. \tag{128}$$

Da nach den Beobachtungen σ nicht negativ sein kann, γ aber schwerlich kleiner als 1 gesetzt werden darf, so werden wir mit fast unwiderstehlichem Zwang dahin geführt, neben $\varrho = 1$ nun noch

$$\gamma = 1, \quad \sigma = 0 \tag{129}$$

anzunehmen. Wir müssen also, wenn wir uns entschließen, den für die Theorie an erster Stelle stehenden ausgezeichneten Fall (126), (127) anzunehmen, voraussetzen, *daß die Lichtablenkung im Gravitationsfeld nur die Hälfte des Wertes in der Einsteinschen Theorie beträgt, und daß eine merkliche Verschiebung der Spektrallinien im Gravitationsfeld nicht vorhanden ist.*

Es ergeben sich dann die einfachen Formeln

$$\frac{e}{\bar{e}} = \frac{a}{\bar{a}} = \frac{c}{\bar{c}}, \quad \frac{m_0}{\bar{m}_0} = \left(\frac{c}{\bar{c}}\right)^{-1}, \quad \frac{p}{\bar{p}} = \left(\frac{c}{\bar{c}}\right)^{-2}, \tag{130}$$

$$\begin{cases} \Phi = \Phi^{(p)} + \Phi^{(e)} = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{\bar{c}}\right)^2 + \text{const}, \\ \Phi^{(e)} = \frac{2}{3}\Phi, \quad \Phi^{(p)} = -\frac{1}{3}\Phi, \quad \Phi'^{(p)} = -\frac{1}{3}\Phi^{(e)}. \end{cases} \tag{131}$$

Der vom Kohäsionsdruck herrührende Anteil der statischen Schwerkraft arbeitet hiernach der beobachtbaren Schwerkraft entgegen, und zwar so, daß er ein Drittel jenes Anteils aufhebt, der von den elektrischen Kräften herrührt.

Da für die Perihelbewegung 4,8 als wahrscheinlichster Wert für q gefunden wurde, so ergibt sich nach (123) $n =$ etwa 2,8. *Hiernach ist offenbar*

$$n = 3$$

zu setzen, woraus dann

$$q = 5$$

folgt. Nun wird

$$\left(\frac{\varrho}{\bar{\varrho}}\right)^3 = 1 - 3\frac{kM'}{c^2 r}, \tag{132}$$

und als genaue, oder doch bis auf Größen zweiter Ordnung gültige *Feldgleichung für das Gravitationsfeld* folgt:

$$\Delta c^3 = -\operatorname{div}\operatorname{grad} c^3 = 0. \tag{133}$$

Daß hier gerade der Exponent 3 auftritt, scheint in ausgezeichnetem Maße den Umständen gemäß zu sein. Wir werden vielleicht annehmen dürfen, daß sich darin die Dreizahl der Dimensionen des Raumes widerspiegelt.

Blicken wir nun zurück, *so wird behauptet werden können, daß die Theorie in der hier gefundenen Ausführung in überaus einfachem und durchsichtigem Aufbau Gravitation und Elektrodynamik verbindet, und so ein gewaltiges Erscheinungsgebiet zusammenfaßt, während sie mit den Beobachtungen recht wohl zusammenzupassen scheint.*

Immerhin soll die Vorsicht nicht außer acht gelassen werden, mit der Möglichkeit komplizierterer Verhältnisse zu rechnen. Glauben doch die Bearbeiter der Beobachtungen bei der Sonnenfinsternis im Mai 1919, die volle von der Einsteinschen Theorie vorausgesagte Ablenkung der Lichtstrahlen sei mit den Ergebnissen im Einklang, und finden doch die Ansichten von Schwarzschild und St. John in bezug auf die Verschiebung der Spektrallinien im Licht der Sonne auch Widerspruch. So bleibt es nötig, weitere Möglichkeiten der Ausgestaltung der Theorie zu beachten.

II. Fall: $\varrho = {}^3/_4$.

Es gelten hier für das elektromagnetische Feld die Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\xi^3}\frac{d\mathfrak{E}}{dt} = \operatorname{vers}\xi\,\mathfrak{M}, \quad \frac{1}{\xi^3}\frac{d\mathfrak{M}}{dt} = -\operatorname{vers}\xi\,\mathfrak{E}; \\ \operatorname{div}\frac{\mathfrak{E}}{\xi^3} = 0, \quad \operatorname{div}\frac{\mathfrak{M}}{\xi^3} = 0. \\ c = \xi^4. \end{array}\right. \tag{134}$$

(120) ergibt

$$\sigma = 1 - \frac{\gamma}{2}. \tag{135}$$

Hier scheinen im Hinblick auf die Tabelle (125) die Unterfälle:

$$(136)\quad \begin{cases} \gamma = 1\,, & n = 3\,, & q = 5 & \text{und} & \sigma = \frac{1}{2}\,, \\ \gamma = \frac{4}{3}\,, & \begin{cases} n = \frac{3}{4}\,, \\ n = 1\,, \end{cases} & \begin{matrix} q = 4^1/_3 \\ q = 4^2/_3 \end{matrix} & \text{und} & \sigma = \frac{1}{3}\,, \\ \gamma = 2\,, & n = -\frac{1}{4}\,, & q = 5^1/_2 & \text{und} & \sigma = 0 \end{cases}$$

den Umständen angemessen. Besonders die zu $\gamma = {}^4/_3$ gehörigen Unterfälle sind sehr wohl geeignet, die Aufmerksamkeit auf sich zu ziehen. Je nachdem $n = {}^3/_4$, oder $n = 1$ gesetzt wird, würde sich für die Feldgleichung ergeben:

$$(137)\qquad \Delta\,\xi^3 = \Delta\,c^{3/4} = 0\,, \quad \text{oder} \quad \Delta\,\xi^4 = \Delta\,c = 0\,.$$

Ich möchte glauben, daß in erster Linie einer dieser beiden Fälle in Betracht käme, wenn der Fall I sich nicht der Erfahrung entsprechend erweisen sollte. Die Beziehungen (131) zwischen Φ, $\Phi^{(e)}$, $\Phi^{(p)}$ blieben dabei bestehen.

III. Fall: $\varrho = {}^2/_3$.

Die elektromagnetischen Feldgleichungen erhalten hier die Form

$$(138)\quad \begin{cases} \frac{1}{\xi^2}\,\frac{d\,\mathfrak{E}}{d\,t} = \operatorname{vers}\xi\,\mathfrak{M}\,, & \frac{1}{\xi^2}\,\frac{d\,\mathfrak{M}}{d\,t} = -\operatorname{vers}\xi\,\mathfrak{E}\,; \\ \operatorname{div}\frac{\mathfrak{E}}{\xi^2} = 0\,, & \operatorname{div}\frac{\mathfrak{M}}{\xi^2} = 0\,; \\ c = \xi^3\,. \end{cases}$$

(120) ergibt:

$$(139)\qquad \sigma = 1 - \frac{\gamma}{3}\,.$$

Wird die Tabelle (125) zu Rate gezogen und beachtet man die Form der Gleichungen (138), so scheinen folgende Unterfälle in Betracht zu kommen:

$$(140)\quad \begin{cases} (\gamma = 1\,, & n = 3\,, & q = 5 & \text{und} & \sigma = \frac{2}{3})\,, \\ \gamma = \frac{4}{3}\,, & n = 1\,, & q = 4^2/_3 & \text{und} & \sigma = \frac{5}{9}\,, \\ \gamma = \frac{3}{2}\,, & \begin{cases} n = \frac{3}{5}\,, \\ n = 1\,, \end{cases} & \begin{matrix} q = 5 \\ q = 5^1/_2 \end{matrix} & \text{und} & \sigma = \frac{1}{2}\,, \\ \gamma = 2\,, & n = -\frac{1}{3}\,, & q = 5^1/_3 & \text{und} & \sigma = \frac{1}{3}\,. \end{cases}$$

Der erste dieser Unterfälle ist dadurch ausgezeichnet, daß er konstante Kohäsionsdrucke, also eine rein elektrische Er-

klärung der Gravitation ergäbe; aber er erscheint wegen der zu großen Rotverschiebung ($\sigma = 2/3$) ausgeschlossen. — Der letzte Unterfall, $\gamma = 2$, ist insofern ausgezeichnet, als er für die Lichtablenkung im Gravitationsfeld denselben Betrag ergibt, wie die Einsteintheorie. Als Feldgleichung würde dabei folgen

$$\Delta \frac{1}{\xi} = \Delta c^{-1/2} = 0. \tag{141}$$

IV. Fall: $\varrho = 1/2$.

Als elektromagnetische Feldgleichungen finden wir

$$\frac{1}{\sqrt{c}} \frac{d\mathfrak{E}}{dt} = \operatorname{vers} \sqrt{c}\, \mathfrak{M}, \quad \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{d\mathfrak{M}}{dt} = -\operatorname{vers} \sqrt{c}\, \mathfrak{E}; \tag{142}$$

$$\operatorname{div} \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{c}} = 0, \quad \operatorname{div} \frac{\mathfrak{M}}{\sqrt{c}} = 0. \tag{143}$$

Nach (120) wird:

$$\sigma = 1;$$

es ergibt sich also hier ebendieselbe Rotverschiebung der Spektrallinien wie in der Einsteinschen Theorie. Gemäß der Tabelle (125) heben sich die folgenden Fälle heraus:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \gamma = 1, & n = 3, & q = 5 \\ \gamma = 4/3, & n = 1, & q = 4^2/_3 \\ \gamma = 3/2, & n = 1, & q = 5^1/_2 \\ \gamma = 2, & n = -1/3, & q = 5 \end{array} \right\} \text{ und } \sigma = 1. \tag{144}$$

Zu $\gamma = 4/3$ gehört hier konstanter Kohäsionsdruck, also eine rein elektrische Gravitationstheorie. —

Blicken wir nun zurück auf die Ergebnisse des vorliegenden Paragraphen, so erkennt man, daß die Theorie in der bisherigen Ausführung recht wohl geeignet scheint, den vorliegenden Beobachtungen zu entsprechen. Obenan steht der Fall I mit $\sigma = 0$, $\gamma = 1$; sehr günstig scheint ferner der Fall II mit $\sigma = 1/3$, $\gamma = 1/3$. Auch der Fall III könnte vielleicht in Betracht kommen, besonders wenn weitere Untersuchungen über die Verschiebung der Spektrallinien im Gravitationsfeld zu der Folgerung $\sigma = 1/2$ oder $= 5/9$ führen sollten.

Wenn aus weiteren Untersuchungen über die Lichtablenkung im Gravitationsfeld auf den vollen Betrag ge-

schlossen werden sollte, den die Einsteintheorie ergibt, $\gamma = 2$, dann könnte unsere Theorie in der bisher gegebenen Ausführung ohne weiteres herangezogen werden, aber es müßte, wie Tabelle (125) und genauer die obigen Darlegungen für die Fälle II, III, IV zeigen, mit negativen Werten von n gerechnet werden. Solange eine Theorie über die Ätherstruktur und ihre Variationen im Gravitationsfeld nicht vorliegt, läßt sich gegen negative n-Werte ein Einwand gewiß nicht machen, doch scheint es bedeutungsvoll, zu beachten, daß der Theorie noch ein weiterer Weg zur Verfügung steht, sich der Erfahrung anzupassen. Er wird im folgenden Paragraphen dargetan werden.

§ 9. Elektromagnetische Theorie der Gravitation bei Annahme relativer Anisotropie des Maßfeldes.

Neben die einfachste Annahme

$$(145) \qquad \frac{d\mathfrak{E}}{dt} = c \operatorname{vers} \mathfrak{M}, \quad \frac{d\mathfrak{M}}{dt} = -c \operatorname{vers} \mathfrak{E}$$

für die Feldgleichungen im variierenden Gravitationsfeld wurde im vorigen Paragraphen auch die Annahme gesetzt

$$(146) \quad \frac{1}{c^\varrho}\frac{d\mathfrak{E}}{dt} = \operatorname{vers}(c^{1-\varrho}\mathfrak{M}), \quad \frac{1}{c^\varrho}\frac{d\mathfrak{M}}{dt} = -\operatorname{vers}(c^{1-\varrho}\mathfrak{E}).$$

Es entspricht dabei die Einführung des Exponenten ϱ der sehr nahe liegenden Überlegung, daß bei Veränderung der Ätherbeschaffenheit die zeitlichen und die räumlichen Variationen der elektromagnetischen Erregungen in verschiedener Weise beeinflußt werden könnten. — Auch bei dem Ansatz (146) wird noch angenommen, daß für die räumlichen Variationen stets alle Raumrichtungen sich gleich verhalten. Diese Annahme, die der relativen Isotropie des Gravitationsfeldes, ist die einfachste, welche sich bietet, und darf darum in erster Linie Beachtung beanspruchen. Aber ebenso gewiß ist auch, daß sie nicht notwendig ist. So soll denn nun als ein weiteres Mittel zur Verallgemeinerung der Theorie nach dem Vorgang der Einsteinschen Theorie relative Anisotropie des Gravitationsfeldes angenommen werden. Ich will mich darauf beschränken, das Wesentlichste hervorzuheben. —

In der Umgebung eines Zentralkörpers sind nun für die Lichtbewegung die radiale und die tangentiale Geschwindigkeit c_r und c_t als verschieden anzusehen. Der Faktor der

Lagrangeschen Funktion, welcher der Lorentzdeformation entspricht, muß demgemäß die Form

$$\sqrt{1-\frac{v_r^2}{c_r^2}-\frac{v_t^2}{c_t^2}} \tag{147}$$

erhalten, wobei v_r und v_t die radiale und die tangentiale Komponente der Geschwindigkeit darstellen:

$$v^2 = v_r^2 + v_t^2, \quad v_r^2 = \dot{r}^2, \quad v_t^2 = r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\psi}^2. \tag{148}$$

Da Potenzbeziehungen zwischen den verschiedenen, das Feld und das Verhalten der Materie bestimmenden Größen angenommen werden, ist zu setzen

$$\frac{c_t}{\bar{c}} = \left(\frac{c_r}{\bar{c}}\right)^\eta, \tag{149}$$

$$L = L_0\sqrt{1-\frac{v_r^2}{c_r^2}-\frac{v_t^2}{c_t^2}}, \quad L_0 = L_0\left(\frac{c_r}{\bar{c}}\right)^{1/\gamma}. \tag{150}$$

Der Energiesatz (21) ergibt hier

$$\left(\frac{c_r}{\bar{c}}\right)^{1/\gamma}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_r^2}{c_r^2}-\frac{v_t^2}{c_t^2}}} = \frac{1}{\sqrt{C}}, \tag{151}$$

also für eine radiale Bewegung

$$v_r^2 = \bar{c}^2\left(\frac{c_r}{\bar{c}}\right)^2\left[1 - C\left(\frac{c_r}{\bar{c}}\right)^{2\gamma}\right]. \tag{152}$$

Wird diese Formel auf den beginnenden Fall angewandt, so folgt

$$C = \left(\frac{\bar{c}}{c_r}\right)_0^{2/\gamma}, \tag{153}$$

und (152) ergibt für eine unendlich kleine durchfallene Strecke $h = -dr$

$$v_r^2 = \frac{\bar{c}^2}{\gamma}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{c_r}{\bar{c}}\right)^2 h. \tag{154}$$

Beachtet man noch $v_r^2 = 2gh$, $g = \partial\Phi/\partial r$, so folgt für das Potential der statischen Schwerkraft

$$\Phi = \frac{\bar{c}^2}{2\gamma}\left(\frac{c_r}{\bar{c}}\right)^2 + \text{const}. \tag{155}$$

Mit Rücksicht auf das Newtonsche Gesetz ist ähnlich wie bei den entsprechenden Ausführungen des § 7 anzunehmen

$$\frac{c_r}{\bar{c}} = 1 - \gamma\frac{kM'}{\bar{c}^2 r} + \varepsilon\left(\frac{kM'}{\bar{c}^2 r}\right)^2; \tag{156}$$

$$\left(\frac{c_r}{\bar{c}}\right)^n = 1 - n\gamma\frac{kM'}{\bar{c}^2 r}, \qquad \varepsilon = \frac{1-n}{2}\gamma^2, \tag{157}$$

sowie, bis auf Glieder zweiter Ordnung gültig:

$$\Delta c_r^n = -\operatorname{div}\operatorname{grad} c_r^n = 0. \tag{158}$$

Um die Änderung des Zeitverlaufs der physikalischen Vorgänge im Gravitationsfeld zu behandeln, schreiben wir in Analogie zu (69a)

$$\frac{T}{\bar{T}} = \frac{a_r}{\bar{a}}\frac{\bar{c}}{c_r} = \frac{a_t}{\bar{a}}\frac{\bar{c}}{c_t}. \tag{159}$$

In dieser Annahme kann man eine Anwendung des Anscheinsatzes sehen, der im nächsten Paragraphen besprochen werden wird. Setzen wir dann wieder an:

$$\frac{T}{\bar{T}} = 1 + \sigma\frac{kM'}{\bar{c}^2 r} + \cdots, \tag{160}$$

so folgt wegen (156), (149)

$$\frac{T}{\bar{T}} = \left(\frac{c_r}{\bar{c}}\right)^{-\frac{\sigma}{\gamma}}, \qquad \frac{a_r}{\bar{a}} = \left(\frac{c_r}{\bar{c}}\right)^{1-\frac{\sigma}{\gamma}}, \qquad \frac{a_t}{\bar{a}} = \left(\frac{c_r}{\bar{c}}\right)^{\eta-\frac{\sigma}{\gamma}}. \tag{161}$$

Für die Planetenbewegung in der ($\vartheta = 90^0$)-Ebene ergibt, ähnlich wie in § 7 der Flächensatz in Verbindung mit (151)

$$r^2\dot{\psi} = f\left(\frac{c_t}{\bar{c}}\right)^2. \tag{162}$$

C und f sind die beiden Integrationskonstanten, wobei C wiederum, wie in § 7, sehr nahe gleich 1 ist. Wird wieder $1/r = x$ gesetzt, so folgt in genügender Annäherung

$$\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x^2 - 2\gamma(1-\eta)\frac{kM'}{\bar{c}^2}x^3\\ &\qquad = \text{Lineare Funkt. von } x + \left(-\frac{2\varepsilon}{\gamma} + (8\eta - 3)\gamma - 2\right)\\ &\qquad\qquad \frac{\bar{c}^2}{f^2}\left(\frac{kM'}{\bar{c}^2}\right)^2 x^3.\end{aligned}\right. \tag{163}$$

Wird hiermit die entsprechende frühere Formel (113) verglichen, so zeigt sich etwas wesentlich Neues in dem Auftreten des Gliedes mit dem Faktor x^3. Zu einem solchen Gliede führt auch die Einsteinsche Theorie und zwar bildet es dort die einzige Ursache der Perihelbewegung. Aus den Darlegungen

von A. Einstein[1]) folgt, daß das x^2-Glied in (163) zu dem Faktor q in der Tisserandschen Formel (12) den Anteil gibt

$$\Delta q = 6\gamma(1-\eta). \tag{164}$$

Das x^2-Glied der rechten Seite in (163) fügt dazu

$$\Delta q = -\frac{2s}{\gamma} + (8\eta - 3)\gamma - 2. \tag{165}$$

So folgt im ganzen, wenn noch (157) berücksichtigt wird:

$$q = \gamma(n + 2\eta + 2) - 2. \tag{166}$$

Relative Isotropie wird durch $c_t = c_r$, also $\eta = 1$ gekennzeichnet. Wird nun relative Anisotropie angenommen, so muß erwartet werden, daß die stärkere Änderung im Felde eines Zentralkörpers die radiale Geschwindigkeit c_r treffen wird, d. h., daß c_t kleiner sein wird als c_r. Dann aber folgt nach (166), daß zu gleichen Werten von q und n bei relativer Anisotropie größere Werte von γ gehören als bei relativer Isotropie. Nun wurden die Untersuchungen des vorliegenden Paragraphen unternommen, um zu zeigen, daß der Theorie ein Weg zur Verfügung steht, größere Werte von γ einzuordnen, ohne negative Werte von n verwenden zu müssen. Wir sehen jetzt einen solchen Weg in der Tat vor uns: Selbst der Wert $\gamma = 2$, den die Einsteintheorie annimmt, erscheint nun bei positivem n gut möglich, denn z. B. für $\gamma = 2$, $\eta = 1/2$, $n = 1$ ergibt (166) $q = 5$. — Auch bei dem Standpunkt der in der vorliegenden Arbeit entwickelten Theorie der Gravitation muß mit der Möglichkeit gerechnet werden, daß der Äther im Gravitationsfeld relativ anisotrop ist; wir erkennen nun, daß dieses insbesondere dann zur Geltung kommen könnte, wenn weitere Beobachtungen den Nachweis führen sollten, daß die Lichtablenkung jenen Betrag erreicht, der von der Einsteinschen Theorie vorausgesagt wurde. Freilich ergäbe sich auch dann durchaus kein bindender Schluß.

Von besonderem Interesse ist es, daß die Zahlenwerte von γ, n und η, welche der Einsteinschen Theorie angehören, nämlich $\gamma = 2$, $n = 1$ und $\eta = 1/2$ zu der Formel (166) zu $q = 6$ führen, d. h. gerade zu jenem Werte, den auch die Einsteinsche Theorie ergibt. Wie wir in § 11 erfahren werden,

---

[1]) A. Einstein, Sitz.-Ber. d. Berliner Akad., 1915, S. 838.

ist dieses kein Zufall; es besteht vielmehr zwischen der Einsteinschen Theorie und der Theorie in der vorliegenden Arbeit ein inniger Zusammenhang, der hier zur Geltung kommt.

§ 10. Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie.

In Arbeiten, welche für die neuere Entwicklung der Elektrodynamik von höchster Bedeutung waren, behandelte H. A. Lorentz 1892—1904 die Frage, wie es zu erklären sei, daß die Bewegung der Erde gegen den Äther der Beobachtung entgeht. Er verfolgte in immer weitergehenden Ausführungen den Gedanken, der Grund dafür sei, daß sich für den Beobachter im bewegten System formal veränderte Maßbeziehungen über räumliche und zeitliche Vorgänge einstellen, welche ihm das Urteil über Länge, Gleichzeitigkeit und Zeitverlauf umwandeln, und welche so die Änderungen verhüllen. Die Behauptung, daß dieses möglich sei, entweder in einem beschränkten Bereich der Erscheinungen wie in der Lorentzschen Theorie, oder in allgemeiner Gültigkeit, wie in der Einsteinschen Theorie, nenne ich den *Satz des gleichen Anscheins*. Die Frage nach der erkenntnistheoretischen Bedeutung des Satzes bleibt außer Betracht. Doch wollen wir beachten, daß der Satz frühere philosophische Erörterungen ins Gedächtnis ruft. Insbesondere wird man an Betrachtungen erinnert, welche Helmholtz an das Spiegelbild in einer Gartenkugel knüpfte: In der Kugel erscheinen die Gegenstände verzerrt; denkt man sich aber die Ausmessungen im Spiegelbild durch Maßstäbe vorgenommen, welche den Verzerrungen ebenfalls unterworfen sind, so ergeben sich für das Bild genau die gleichen Maßbeziehungen, wie für die gegenständliche Welt. —

1892 waren unter den Physikern die Meinungen darüber noch geteilt, ob man annehmen müsse, der Äther bewege sich mit der Erde oder nicht. H. A. Lorentz entschied sich, die Erfahrungen gegeneinander abwägend, in Anlehnung an Fresnel für die Annahme des ruhenden Äthers. Die Arbeit von 1892 brachte zunächst zur Erklärung des negativen Erfolges des Michelsonexperiments die Hypothese der *Lorentzdeformation*. 1895 wurde eine Zeithilfsgröße eingeführt, *Ortszeit* genannt, der im bewegten System ein neues System schein-

barer Gleichzeitigkeit entspricht. 1899 gelangte H. A. Lorentz dann zu entscheidenden Fortschritten, indem er das Koordinatensystem x, y, z, t im ruhenden System und das Koordinatensystem x', y', z', t', welches sich statt dessen im bewegten System als formal gleichwertig einstellt, durch die folgende Transformation verband:

$$(167)\quad \left\{ x' = lx,\quad y' = ly,\quad z' = l\frac{z - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},\quad t' = l\frac{t - \frac{v}{c^2}z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \right.$$

c ist die Lichtgeschwindigkeit, v die Relativgeschwindigkeit der beiden Systeme gegeneinander, l eine Konstante. Für die Formänderung der Körper bei der Bewegung hatte H. A. Lorentz bis dahin nur mit der Lorentzdeformation gerechnet. Jetzt faßt er einen allgemeineren Fall als möglich ins Auge, indem er eine durch den Faktor l angezeigte gleichmäßige Änderung aller Dimensionen und der Zeit noch hinzufügt. Als etwas wesentlich Neues gegen früher finden wir, daß für das bewegte System eine andere Zeiteinheit als für das ruhende System gewählt wird, so daß also eine Änderung der Ablaufgeschwindigkeit der Vorgänge als Folge der Bewegung vorgesehen wird. Das System der Ortszeiten wird so gewählt, daß die Geschwindigkeit des Lichtes trotz aller Änderungen auch im bewegten System für alle Richtungen genau denselben Zahlwert erhält, den gleichen Wert wie im ruhenden System. Als *Lorentztransformation* pflegt man heute nach dem Vorgang von Poincaré die Transformation zu nehmen, welche sich aus (167) ergibt, wenn l den speziellen Wert 1 erhält. Man kann demgemäß (167) die *allgemeinere Lorentztransformation* nennen. In einer Arbeit von 1904, wo H. A. Lorentz seine Theorie weiter verbesserte, kam er zu dem Schlusse, es sei $l = 1$ zu setzen: So ergab sich denn für die neue Fassung der Theorie durch Vermehrung der Bestimmtheit die *Lorentztransformation* der gebräuchlichen Bezeichnungsweise.

Es wird in der Lorentzschen Theorie angenommen, die Koordinatensysteme könnten so gewählt werden, daß für die molekular-materiellen Körper und das elektromagne-

tische Feld die Euklidsche Geometrie (wenigstens im Bereich des in Betracht gezogenen Raumes) und das Trägheitsgesetz in der Newtonschen Form[1]) gelten. Dazu kommt dann die formale Gleichheit der Lichtgeschwindigkeit nach allen Seiten. Raum-Zeit-Maßsysteme solcher Art werde ich als *„Newton-Lorentz-Maßsysteme"* bezeichnen. Jeder Unterlichtschreitung[2]) ist ein solches Maßsystem zugeordnet.

H. A. Lorentz führte auch 1904 die Theorie in den Einzelheiten nicht weit genug durch, um dem Anscheinsatz Gültigkeit für *alle* elektromagnetischen Erscheinungen zu gewinnen. Ferner stellte er die Transformation (167) nicht in zusammengefaßten Formeln dar, wie es hier geschehen ist, sondern führte sie schrittweise durch; so traten wichtige Verkettungen der benutzten Maßsysteme nicht offen hervor, auf welche später A. Einstein hinwies. — Der Gravitation wird in der Arbeit keine Erwähnung getan. —

1905 begründete A. Einstein seine *„Relativitätstheorie"*. Die Theorie in der damaligen Ausführung wird jetzt „spezielle" Relativitätstheorie genannt. *Das zugehörige „Relativitätsprinzip" kann man ansehen als die Feststellung, der Anscheinsatz sei naturnotwendig und habe daher strenge Gültigkeit für alle Naturerscheinungen.* Da A. Einstein in dem „Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit" die „Gleichzeitigkeit" ebenso feststellt wie H. A. Lorentz und auch die Lichtschreitungen als von der Materie und ihren Bewegungen unabhängig erklärt, da er ferner die Euklidsche Geometrie und

---

1) „Die Materie besitzt das Vermögen, zu widerstehen; deshalb verharrt jeder Körper, der sich selbst überlassen ist, in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichmäßigen, geradlinigen Bewegung."

2) Unter *Schreitung* verstehe ich wie in früheren Arbeiten den Bewegungszustand eines Punktes, wie er durch die jeweilige Geschwindigkeit dargestellt wird, wenn man ihn nicht in Beziehung auf irgendein Bezugssystem, sondern im Hinblick auf die Welt im ganzen auffaßt. Der Unterschied zwischen Schreitung und Geschwindigkeit ist derselbe, wie der zwischen dem Ort, den ein Körper in einem bestimmten Zeitpunkt seines Geschickes in der Welt tatsächlich einnimmt und dem durch Koordinaten gegebenen relativen Ort. Der letztere ändert sich, wenn das Koordinatensystem durch ein anderes ersetzt wird, der tatsächlich eingenommene Ort aber bleibt davon unberührt. Ebenso ändert sich die Geschwindigkeit mit dem Koordinatensystem, während die Schreitung vom Koordinatensystem unabhängig ist.

das Newtonsche Trägheitsgesetz verwertet, so kommt seine Theorie ebenfalls zu den Newton-Lorentzschen Maßsystemen. — Die Festlegung der Lichtschreitungen unabhängig von der Materie nötigt zu folgender Alternative: Entweder muß die Relativitätstheorie zur Erklärung der festen Lagerung der Lichtschreitungen einen von der Materie und ihren Bewegungen unabhängigen Äther annehmen; oder sie führt, wenn sie den Äther leugnet, zu einem Raum-Zeit-Absolutismus, der noch weit über jenen hinausgeht, auf welchen einst Newton die Mechanik aufbaute: Es muß dem Absolutismus dann auch die Festlegung der Lichtschreitungen übertragen werden.[1]) In der vorliegenden Arbeit kommt die Alternative nicht zur Geltung, denn da wir in jener anfänglichen Relativitätstheorie mit Einstein jetzt nur einen auf unendlich kleine Raum-Zeit-Gebiete beschränkten Spezialfall der allgemeinen Relativitätstheorie zu sehen haben, für diese aber auch nach A. Einstein die Äthervorstellung gelten soll, so haben wir allen jenen Aussagen der speziellen Relativitätstheorie, welche für uns in Betracht kommen, die Äthervorstellung zugrunde zu legen. —

Als „Lorentzgruppe" soll ein zu der Gesamtheit der Unterlichtschreitungen gehöriges System von dreifach unendlich vielen Newton-Lorentzschen Maßsystemen bezeichnet werden, von denen je zwei durch die Lorentztransformation untereinander verbunden sind. Wir machen uns hier einen Umstand zunutze, der in der Einsteinschen Theorie zutage getreten ist, wonach von allen Newton-Lorentzschen Maßsystemen, die aus einem einzigen durch die Lorentztransformation entstehen, jedes mit jedem anderen durch die Lorentztransformation zusammenhängt.

In allen Gliedern einer Lorentzgruppe zeigt die Lichtgeschwindigkeit denselben Zahlwert; dieser gehört also der Gruppe im ganzen an. Ein Maßstab, der in einem der zur Gruppe gehörigen Maßsysteme bei Ruhe im System die Längeneinheiten für die verschiedenen Richtungen angibt, tut nach dem Satz vom gleichen Anschein dasselbe für jedes andere System, und eine „Uhr", die man sich unter Verwertung

1) Vgl. meine Arbeiten „Relativität und Äther", Phys. Ztschr. 12. S. 689—707, 737—758. 1911; Artikel „Mechanik" im Band Physik der „Kultur d. Gegenwart", Leipzig bei Teubner, 1915, S. 5—65.

irgendeines der dem Satze vom gleichen Anschein unterworfenen Vorgänge arbeitend denkt, gibt, wenn sie auf den Bewegungszustand der verschiedenen zur Gruppe gehörigen Maßsysteme gebracht wird, überall in gleicher Weise die Zeiteinheit an. So erscheinen die Maßsysteme einer Lorentzgruppe durch den Satz vom gleichen Anschein fest miteinander verbunden. Sie sind alle mit einem Male bestimmt, wenn für die Längeneinheit ein bestimmter Maßstab und für die Zeiteinheit eine bestimmte Uhr vorgeschrieben wird. Die Bestimmung kann auch geschehen, indem man den Zahlwert der Lichtgeschwindigkeit willkürlich festsetzt und dazu noch eine der beiden Einheiten durch einen Maßstab oder eine Uhr vorschreibt.

Die Einsteinsche „allgemeine" Relativitätstheorie nimmt für die räumlichen und zeitlichen Beziehungen der molekularen Materie und des elektromagnetischen Feldes ein Maßfeld an, welches seinerseits von der Materie und dem elektromagnetischen Felde abhängt. So entsteht ein wesentlicher Unterschied gegenüber der „speziellen" Relativitätstheorie insofern, als nun das Maßfeld von Ort zu Ort und mit der Zeit variiert. Wir haben die Beschaffenheit des Trägers des Maßfeldes, des Äthers, als veränderlich in Raum und Zeit zu betrachten. —

Wegen des Unterschiedes der Maßbeziehungen von Ort zu Ort wird eine Bewegung, die an einer Stelle des Raumes als beschleunigungslos erscheint, von anderen Stellen aus beobachtet, sich im allgemeinen als beschleunigt darstellen: Darin besteht in der Einsteinschen Theorie jene Naturerscheinung, die man als *Gravitation* zu bezeichnen pflegt.

Die Ausbreitung des Maßfeldes wird nach A. Einstein durch Differentialgleichungen dargestellt. Als Bestimmungsstücke dienen Größen, auf welche A. Einstein durch die Minkowskische Raum-Zeit-Länge hingeführt worden ist. Nach den Minkowskischen Darlegungen hat der Ausdruck

$$(168) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = -c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

für jedes beliebige Paar unendlich naher Raum-Zeit-Punkte ein und denselben, positiven oder negativen, Zahlwert in allen durch die Lorentztransformation verbundenen Koordinatensystemen, also in allen den Newton-Lorentzschen Maß-

systemen einer Lorentzgruppe. — dx, dy, dz, dt kennzeichnen eine Schreitung, die durch die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}} = \frac{dl}{dt} \tag{169}$$

dargestellt wird; dl bezeichnet dann das Raum-Längenelement. Ist $ds^2 < 0$, $v < c$, handelt es sich also um eine *Unterlichtschreitung*, so gibt es ein bestimmtes Newton-Lorentz-Maßsystem, in welchem die Schreitung sich als Ruhe darstellt ($dl = 0$); bezeichnet man in diesem System das zugehörige Zeitdifferential mit $d\tau$, so ist gemäß (168)

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2; \tag{170a}$$

hiernach wird $d\tau^2$ und also auch ds^2 meßbar durch eine Uhr, der man die Schreitung des Ruhe-Maßsystems gibt. — Ist $ds^2 > 0$, $v > c$; handelt es sich also um eine *Überlichtschreitung*, so gibt es ein bestimmtes Newton-Lorentz-Maßsystem, in welchem die Schreitung Gleichzeitigkeit darstellt ($dt = 0$); bezeichnet man in diesem System das zugehörige Raumlängenelement mit $d\lambda$, so ist gemäß (168)

$$ds^2 = d\lambda^2. \tag{170b}$$

$d\lambda^2$ und also auch ds^2 wird jetzt meßbar durch einen Maßstab, dem man die Schreitung des Maßsystems der „Gleichzeitigkeit" gibt. — Ist endlich $ds^2 = 0$, so wird $v = c$, *die Gleichung* $ds^2 = 0$ *kennzeichnet also die Lichtschreitungen.*

Ich werde ds als das *Minkowskische Raum-Zeit-Längen-Element* bezeichnen. — In der Relativitätstheorie erhält ds^2 das umgekehrte Vorzeichen, als ich es ihm in der vorliegenden Arbeit gebe; für die Theorie ist das gleichgültig. —

Erteilt man ds die nun dargelegte physikalische Bedeutung, so kann in dem Ansatz (168) *eine analytische Formulierung des Satzes vom gleichen Anschein gesehen werden.*

A. Einstein verwendet die Minkowskische Raum-Zeit-Länge mit der Verallgemeinerung, daß die Maßbeziehungen als veränderlich in Raum und Zeit angesehen werden. Die Formel (168) bleibt demgemäß zwar noch gültig, aber nur für unendlich kleine Raum-Zeit-Gebiete, wenn für diese „lokale" Bezugssysteme passend ausgewählt werden. Zur allgemeinen Darstellung der Theorie werden für die vierdimensionale

Mannigfaltigkeit der Raum-Zeit-Punkte allgemeine Raum-Zeit-Koordinatensysteme x_1, x_2, x_3, x_4 benutzt, wo dann an Stelle von (168) die Formel

$$(171)\quad \left\{\begin{aligned} ds^2 = {} & g_{11}\,dx_1^2 + g_{12}\,dx_1\,dx_2 + g_{13}\,dx_1\,dx_3 + g_{14}\,dx_1\,dx_4 \\ & + g_{22}\,dx_2^2 + g_{23}\,dx_2\,dx_3 + g_{24}\,dx_2\,dx_4 \\ & + g_{33}\,dx_3^2 + g_{34}\,dx_3\,dx_4 \\ & + g_{44}\,dx_4^2 \end{aligned}\right.$$

tritt. Die Faktoren g_{11}, g_{12}, ..., welche im allgemeinen als Funktionen von Ort und Zeit gelten müssen, kennzeichnen für die betreffende Raum-Zeit-Stelle die Maßbeziehungen. Die Differentialgleichungen sind so zu bilden, daß ihre physikalischen Aussagen unabhängig vom gewählten Raum-Zeit-Koordinaten-System und allein abhängig von der durch Maßstab und Uhr bestimmbaren Raum-Zeit-Länge werden. A. Einstein wählt den sonstigen physikalischen Erfahrungen entsprechend Differentialgleichungen zweiter Ordnung, und zwar, wie er uns mitteilt, die einfachsten, welche sich dem Zwecke entsprechend aufstellen lassen. Es sind die folgenden 10:

$$(172)\qquad G_{\mu\nu} - \lambda\, g_{\mu\nu} = -\varkappa\,(T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, T),$$

wobei die Bedeutung der $G_{\mu\nu}$ bestimmt wird durch

$$(173)\quad \left\{\begin{aligned} G_{\mu\nu} = {} & -\mathfrak{S}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \alpha\end{matrix}\right\} + \mathfrak{S}_\alpha \mathfrak{S}_\beta \left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \beta\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\nu\beta\\ \alpha\end{matrix}\right\} \\ & + \frac{\partial^2 \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\mu\, \partial x_\nu} - \mathfrak{S}_\alpha \left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \alpha\end{matrix}\right\} \frac{\partial \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}, \end{aligned}\right.$$

$$(174)\qquad \left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \alpha\end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}\,\mathfrak{S}_\beta\, g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right). \text{ [1]}$$

g bedeutet die Determinante der g_{11}, g_{12}, ..., $g^{\alpha\beta}$ ist die zu $g_{\alpha\beta}$ koordinierte und normierte Subdeterminante. Die $T_{\mu\nu}$ samt der durch sie bestimmten Größe T geben die Energie und deren Veränderungen in der Materie und im elektromagnetischen Felde an; λ und $\varkappa$ bedeuten universelle Kon-

1) Beim Vergleich der Formeln mit den Angaben von A. Einstein muß beobachtet werden, daß A. Einstein in systematischer Weise die Summenzeichen fortläßt; vgl. seine Abhandlung Ann. d. Phys. 49. S. 781. 1916.

stanten. Im freien Äther sind die rechten Seiten der Gleichungen (172) gleich Null zu setzen. — Die Glieder mit λ auf den linken Seiten der Gleichungen (172) sind dazu bestimmt, die Schwierigkeiten des Unendlichen zu beseitigen, von denen im § 4 die Rede war. Es ist charakteristisch für die Theorie und vom physikalischen Standpunkt höchst überraschend, daß in die Grundgleichungen alle vier Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 formal in gleicher Weise eingehen, trotzdem sie so Verschiedenartiges wie Raum und Zeit darstellen. Der formalen Gleichstellung der Koordinaten entspricht der Umstand, daß die Grundgleichungen der Form nach von der Wahl des Raum-Zeit-Koordinatensystems x_1, x_2, x_3, x_4 unabhängig sind. In dem von A. Einstein benutzten Namen „allgemeine Relativitätstheorie" kommt diese Unabhängigkeit zum Ausdruck.

Bezeichnen wir als „Strahlenfläche" oder „Strahlengeschwindigkeitsfläche" oder „Wellenfläche" in der üblichen Weise eine Fläche, welche sich ergibt, wenn von einem Raumpunkt aus auf jeden Radiusvektor eine Strecke abgetragen wird, welche der zugehörigen Lichtgeschwindigkeit proportional ist, so erscheint in einem lokalen Koordinatensystem, in welchem für ds^2 die einfache Formel (168) gilt, die Strahlenfläche als Kugel. Den für jene Stelle nach der Einsteinschen Theorie außerdem möglichen verschiedenen Maßsystemen werden durch (171), wenn ds durch 0, sowie dx_1, dx_2, dx_3 durch x, y, z und dx_4 durch einen festgedachten Wert t ersetzt werden, Strahlenflächen (x, y, z) zugeordnet in Form von Ellipsoiden, die im allgemeinen drei verschiedene Achsen haben und nicht zentriert sind, also nicht nur Verschiedenheit der Lichtgeschwindigkeit nach verschiedenen Richtungen, sondern auch nach entgegengesetzten Richtungen anzeigen. Jede der Strahlenflächen kennzeichnet für das betreffende Maßsystem die Lichtschreitungen, und beansprucht zu deren Feststellung neun der Bestimmungsgrößen, nämlich die Verhältnisse $g_{11} : g_{12} : \ldots$. Dem zehnten Bestimmungsstück entspricht die Feststellung einer Längeneinheit mittels eines Maßstabes oder der Zeiteinheit mittels einer Uhr. —

Durch die g_{11}, g_{12}, ... wird das Maßfeld, der Zustand des Weltuntergrundes, des Äthers, dargestellt. Von der Materie und dem elektromagnetischen Felde wird angenommen, daß sie sich dem Maßfeld unterordnen. Eine Erweiterung dieser

Unterordnung erfolgt zur Begründung der Mechanik, indem als bestimmend für die „freie", also überall lokal „beschleunigungslose" Bewegung eines unendlich klein gedachten materiellen Körpers die „geodätische" oder „kürzeste" Linie in der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit angenommen wird, nämlich diejenige Bewegung, welche der für jedes Stück der Bahn bei festgehaltenen Endpunkten geltenden Extremalgleichung

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} ds = 0 \tag{175}$$

entspricht. Ich werde diese Festsetzung im folgenden das Einsteinsche *Prinzip der kürzesten Raum-Zeit-Linie* nennen. —

Lehrreich ist es, zu sehen, wie die Zehnzahl der Bestimmungsstücke, welche die Einsteinsche Theorie darbietet, notwendig und hinreichend ist, um die Beschaffenheit des Weltuntergrundes an jeder Stelle bei Annahme des Satzes vom gleichen Anschein darzustellen. Für die Einheiten der Länge und der Zeit können ein Maßstab und eine Uhr willkürlich vorgeschrieben werden. Der Satz vom gleichen Anschein sagt dann aus, daß bei örtlichen Messungen der Lichtgeschwindigkeit, wo die dort sich einstellenden Einheiten für Länge und Zeit benutzt werden, überall der gleiche Zahlenwert der Lichtgeschwindigkeit hervorgeht. Wird also dieser Zahlenwert irgendwo bestimmt, so gilt er nun allgemein. Will man an irgendeiner Stelle ein Newton-Lorentz-Maßsystem durch ein rechtwinkliges Koordinatensystem kennzeichnen, so sind je drei Bestimmungsstücke nötig, um 1. festzustellen, was beschleunigungslos ist, 2. die drei rechten Winkel zu bestimmen, welche zur Konstruktion des rechtwinkligen Achsenkreuzes erforderlich sind, und 3. die Längeneinheiten auf den drei Achsen festzulegen. Nun bleibt noch ein Bestimmungsstück übrig; dies ist notwendig, um den Gang der Uhr und damit die Zeiteinheit zu bestimmen. Da der Zahlenwert der Lichtgeschwindigkeit bekannt ist, so ist das System der Lichtschreitungen nun ohne weiteres gegeben. —

Nach den vorstehenden Darlegungen *kann man die Einsteinsche allgemeine Relativitätstheorie ansehen als die Durchführung des an die Lichtschreitungen geschlossenen Satzes vom gleichen Anschein bei Annahme eines veränderlichen Maßfeldes und bei Verwertung der Minkowskischen Raum-Zeit-Länge*

zur Charakterisierung der Maßverhältnisse. — Die Darlegungen lassen erkennen, wie äußerst einfach die Grundlagen der Einsteinschen Theorie sind. Wenn die Formeln (172), (173), (174) verwickelt aussehen, so liegt der Grund nur in der großen Anzahl der in Betracht kommenden Variablen; die Verwicklung betrifft also einen nebensächlichen Umstand.

In der Formel (168) erscheint die Zeitgröße $c\sqrt{-1}\,t$ mathematisch gleichwertig mit den Raumgrößen x, y, z. Diese Gleichwertigkeit, welche alle Formeln und Formelsysteme der Relativitätstheorie beherrscht, und von H. Minkowski für die spezielle Theorie entdeckt, von A. Einstein auf die allgemeine Relativitätstheorie übertragen wurde, trägt in hohem Maße zu der mathematischen Schönheit der Theorie bei. Es ist oftmals die Neigung hervorgetreten, daran für Raum und Zeit erkenntnistheoretische Folgerungen zu knüpfen. Da ist es nützlich, den Faktor $\sqrt{-1}$ nicht außer acht zu lassen, welcher die mathematische Gleichstellung erst möglich macht: *Um dieses Faktors willen erscheinen in der Relativitätstheorie Raum und Zeit so verschieden wie* 1 *und* $\sqrt{-1}$. Das entspricht der Wirklichkeit durchaus. H. Minkowski selbst hat die Sachlage vortrefflich mit den folgenden Worten beleuchtet[1]): „Man kann danach das Wesen dieses Postulates mathematisch sehr prägnant in die mystische Formel kleiden:

$$3 \cdot 10^5 \text{ km} = \sqrt{-1}\,\text{sec}\,." \tag{176}$$

§ 11. Beziehungen zwischen der Einsteinschen Theorie und der Theorie der vorliegenden Arbeit.

Die Einsteinschen Feldgleichungen (172), (173), (174) ergeben, wie K. Schwarzschild[2]) zeigte, für den freien Äther in der Umgebung eines Zentralkörpers, wobei die rechten Seiten in (172) verschwinden, die folgende Darstellung des Minkowskischen Raum-Zeit-Elementes

$$ds^2 = -\bar{c}^2\left(1-\frac{\alpha}{R}\right)dt^2 + \frac{dR^2}{1-\frac{\alpha}{R}} + R^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\psi^2), \tag{177}$$

$$R = r\left[1+\left(\frac{\alpha}{r}\right)^3\right]^{1/3}. \tag{178}$$

1) H. Minkowski, Phys. Ztschr. 10. S. 109. 1909.

2) K. Schwarzschild, Sitz.-Ber. d. Berliner Akad. 1916. S. 189 bis 196.

Die λ-Glieder wurden nicht berücksichtigt; doch sind sie in dem verhältnismäßig kleinen Teil der Welt, der hier in Betracht kommt, ohne wesentlichen Einfluß. r, ϑ, ψ bedeuten Polarkoordinaten im gewöhnlichen Sinne des Wortes und entsprechen den Maßbeziehungen des ungestört gedachten Feldes; sie sind also von der gleichen Bedeutung, wie die Koordinaten, welche bisher in der vorliegenden Arbeit gebraucht wurden. a ist eine Größe, die von dem Zentralkörper abhängt, und, wie wir erfahren werden, $2kM'/\bar{c}^2$ darstellt; so ist denn a gegenüber allen vorkommenden Werten von r so klein, daß es durchaus erlaubt ist, in den Rechnungen R durch r zu ersetzen. — Wir beschränken die Anwendungen von (177) auf die Ebene $\vartheta = 90^0$, dann kann statt (177) und (178) einfacher geschrieben werden

$$ds^2 = -\bar{c}^2\left(1-\frac{a}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{a}{r}} + r^2\,d\psi^2. \tag{179}$$

Gemäß der im vorigen Paragraphen erklärten Bedeutung von ds wird durch (179) die Lichtbewegung dargestellt, wenn $ds = 0$ gesetzt wird. So folgt für die radiale und die Quergeschwindigkeit des Lichtes:

$$c_r = \bar{c}\left(1-\frac{a}{r}\right), \quad c_t = \bar{c}\sqrt{1-\frac{a}{r}}; \quad \frac{c_t}{\bar{c}} = \left(\frac{c_r}{\bar{c}}\right)^{1/2}. \tag{180}$$

Um die Längenänderungen der Körper zu erhalten, welche sich zeigen, wenn die Körper aus dem störungsfreien Gebiet für $r = \infty$ in das Gravitationsfeld gebracht werden und hier während der Beobachtung in Ruhe sind, verwenden wir nach Vorschrift des vorigen Paragraphen (179) unter den Annahmen $ds^2 > 0$, $dt = 0$, dann folgt für $d\psi = 0$

$$\frac{a_r}{\bar{a}} = \frac{dr}{ds} = \sqrt{1-\frac{a}{r}} = \left(\frac{c_r}{\bar{c}}\right)^{1/2}, \tag{181}$$

wobei a_r und $\bar{a}$ entsprechende Längen parallel r in der Entfernung r und im störungsfreien Felde ($r = \infty$) bedeuten. Ebenso folgt aus (179), wenn $dr = 0$ gesetzt wird, für die Längen in den Richtungen senkrecht r

$$\frac{a_t}{\bar{a}} = \frac{r\,d\psi}{ds} = 1. \tag{182}$$

Zum Vergleich der Ablaufzeiten der physikalischen Vorgänge im störungsfreien Gebiet ($r = \infty$) und im Gravitations-

feld bei Ruhe setzen wir unter der Annahme $ds^2 < 0$, $dr = 0$, $d\psi = 0$ und erhalten in den früher benutzten Bezeichnungen

$$\frac{T}{T'} = \frac{dt}{\frac{ds}{c}\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\alpha}{r}}} = \left(\frac{c_r}{c}\right)^{-1/2}. \tag{183}$$

Zur Feststellung der Planetenbewegung bzw. des Vorrückens des Perihels, führt der Satz (175), den ich als das Einsteinsche Prinzip der Bewegung in der kürzesten Raum-Zeit-Linie bezeichnete.

Wird (175) in der Form

$$\int_1^2 \frac{\delta\, ds^2}{ds} = 0 \tag{184}$$

geschrieben und denkt man sich zunächst nur die Zeit t variiert, so folgt

$$\int_1^2 \left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\frac{dt}{ds}\, d\,\delta t = 0, \tag{185}$$

und nach partieller Integration

$$\left[\frac{\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\delta t}{\frac{ds}{dt}}\right]_1^2 - \int_1^2 \delta t\, d\frac{1-\frac{\alpha}{r}}{\frac{ds}{dt}} = 0. \tag{186}$$

Da δt für Anfang und Ende des Intervalls verschwinden muß, hat das erste Glied dieser Gleichung den Wert 0 und das zweite ergibt wegen der Willkür der δt

$$\frac{1-\frac{\alpha}{r}}{\frac{ds}{dt}} = \text{const} \tag{187}$$

oder

$$\frac{\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)^{1/2}}{\sqrt{1-\frac{v_r^2}{c_r^2}-\frac{v_t^2}{c_t^2}}} = \text{const}. \tag{188}$$

Bei Variation von ψ ergibt (184) ähnlich

$$\frac{r^2\psi\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)^{1/2}}{c_t^2\sqrt{1-\frac{v_r^2}{c_r^2}-\frac{v_t^2}{c_t^2}}} = \text{const}. \tag{189}$$

Die Gleichungen (188) und (189) deuten offensichtlich darauf hin, daß die Einsteinsche Theorie für ein statisches Maßfeld sich dem Schema der Theorie der vorliegenden Arbeit einordnen läßt. *In der Tat entspricht die Einsteinsche Theorie dem Ansatz*

$$L = L_0 \left(\frac{c_r}{\bar{c}}\right)^{1/2} \sqrt{1 - \frac{v_r^2}{c_r^2} - \frac{v_t^2}{c_t^2}} \,. \tag{190}$$

(188) stellt dann den Energiesatz dar, (189) bedeutet die zu ψ gehörige Lagrangesche Gleichung. — Als spezieller Fall der Theorie des vorigen Paragraphen ist die Einsteinsche Theorie durch die Konstantenwerte

$$\gamma = 2\,, \quad \sigma = 1\,, \quad \eta = \tfrac{1}{2}\,, \quad n = 1\,, \quad q = 6 \tag{191}$$

gekennzeichnet. Der Zusammenhang zwischen dem Raum-Zeit-Element ds und der Lagrangeschen Funktion L wird durch

$$\frac{L}{L_0} = \frac{ds\sqrt{-1}}{\bar{c}\,dt} \tag{192}$$

hergestellt. Nach (192) ist

$$\delta \int_1^2 ds = \text{const} \times \delta \int_1^2 L\,dt; \tag{193}$$

das Einsteinsche Prinzip der Bewegung in kürzester Raum-Zeit-Linie erscheint hiernach in dem von uns betrachteten Falle des statischen Gravitationsfeldes genau gleichwertig mit dem Hamiltonschen Prinzip.

Hier wird die Erinnerung erweckt an die Diskussionen um die Begründung der Mechanik in vergangenen Jahren, wo ebenfalls in der erkenntnistheoretischen Deutung der Variationsprinzipien weitgehende Verschiedenheiten auftraten. So wurde vom „Prinzip der kleinsten Wirkung", vom „Prinzip des kleinsten Zwanges" gesprochen. Auch das „Fermatsche Prinzip" verdient hier Erwähnung, wonach die Lichtstrahlen in Bahnen kleinster Ankunftszeit sich bewegen. — Lehrreich ist die Verschiedenheit des Standpunktes, je nachdem man das Prinzip der kürzesten Raum-Zeit-Länge und das Hamiltonsche Prinzip verwendet: Im ersten Falle scheinen für die Bahn der Körper die Maßbeziehungen des Ätherfeldes allein maßgebend, denn sie bestimmen für sich schon die Bahnen

kürzester Raum-Zeit-Länge; im zweiten Falle scheinen Ätherbeschaffenheit und Körperbeschaffenheit zusammen zu wirken, denn beide zusammen bestimmen z. B. die Deformationen der Körper, welche für die Wirksamkeit der Kräfte in Betracht kommen. Man könnte vielleicht geneigt sein, in der gleichzeitigen Gültigkeit beider Prinzipien ein Spiel des Zufalls zu sehen, aber man wird sogleich darüber belehrt, daß innige Verbindungen bestehen, wenn man beachtet, daß die Maßbeziehungen des Ätherfeldes ja vermittelst der Raum-Zeit-Länge beurteilt werden, und in dieser das Verhalten der materiellen Körper zur Geltung kommt. —

Es soll nun festgestellt werden, welche Besonderheit es für die Theorie der vorliegenden Arbeit zur Folge hat, wenn sie die Minkowskische Raum-Zeit-Länge im Sinne der Einsteinschen Theorie verwertet. Welches auch immer die Annahmen über die Differentialgleichungen des Maßfeldes sein mögen, jedenfalls führt die Anwendung der Raum-Zeit-Länge bei der Darstellung des Feldes in der Umgebung eines Zentralkörpers zu der Formel

$$(194)\quad \begin{cases} ds^2 = -\bar{c}^2 g_{44}' dt^2 + g_{14} dt dr + g_{11} dr^2 \\ \qquad\qquad + g_{22} r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\psi^2), \end{cases}$$

wobei g_{44}', g_{14}, g_{11}, g_{22} Funktionen von r sind. Beachtet man die Auseinandersetzungen im Anfang des vorliegenden Paragraphen, so kann hierfür gesetzt werden:

$$(195)\quad ds^2 = -\bar{c}^2 \left(\frac{\bar{T}}{T}\right)^2 \left(dt^2 + \frac{2G}{c_r^2} dt dr - \frac{dr^2}{c_r^2} - \frac{r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\psi^2)}{c_t^2}\right),$$

wobei aber G eine Funktion von r ist. c_r bedeutet aber hier nicht mehr die Radialgeschwindigkeit des Lichtes. Diese erscheint verschieden, je nachdem das Licht sich auf den Zentralkörper hin oder von ihm fort bewegt. Nennen wir für den Augenblick v die radiale Lichtgeschwindigkeit in einer dieser Richtungen, so folgt nach (195), wenn $ds = 0$, $d\vartheta = 0$, $d\psi = 0$ gesetzt wird:

$$(196)\quad v = c_r \sqrt{1 + \frac{G^2}{c_r^2}} \pm G.$$

Das obere Zeichen rechts ergibt die nach außen, das untere Zeichen die nach innen gerichtete Geschwindigkeit. G erscheint hiernach als eine radial gerichtete Geschwindigkeit

des das Licht tragenden Äthers. Da erfahrungsgemäß das Licht in dem Bereich des Sonnensystems, in welchem sich die Planeten bewegen, sehr nahe geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit läuft, so muß G hier überall als kleiner Bruchteil von c_r angesehen werden.

Als Energiesatz liefert (195) bei Verwendung des Einsteinschen Prinzips der kürzesten Raum-Zeit-Länge bei Variation von t

$$\frac{\bar{T}}{T}\,\frac{1+\frac{G\,v_r}{c_r^2}}{\sqrt{1+2\,\frac{G\,v_r}{c_r^2}-\frac{v_r^2}{c_r^2}-\frac{v_t^2}{c_t^2}}}=\frac{1}{\sqrt{C}}, \tag{197}$$

wobei C die Integrationskonstante ist. Wir wenden (197) auf den „beginnenden Fall" an, so daß im Anfangszustand $v_r=0$, $v_t=0$ ist. Dann stellt C den Wert von $(T/\bar{T})^2$ im Anfangspunkt der Bahn dar. Wird er durch den Index 0 ausgezeichnet, so kann für (197) gesetzt werden:

$$\left(\frac{T}{\bar{T}}\right)^2\left(\frac{\bar{T}}{\bar{T}}\right)_0^2=\frac{1+2\,\frac{G\,r_r}{c_r^2}+\left(\frac{G\,v_r}{c_r^2}\right)^2}{1+2\,\frac{G\,r_r}{c_r^2}-\frac{v_r^2}{c_r^2}}\,. \tag{198}$$

Wird diese Gleichung logarithmiert und angewendet auf eine so kurze Zeit nach dem Beginn des Falles, daß nur ein unendlich kleines Stück $h=-dr$ des Radius durchlaufen ist, so kann bei Entwicklungen statt (198) geschrieben werden

$$2\,\frac{\bar{T}}{T}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{T}{\bar{T}}\right)h=-\frac{v_r^2}{c_r^2}\left(1+\frac{G^2}{c_r^2}\right). \tag{199}$$

Bedeutet g wieder wie früher die Fallbeschleunigung bei beginnendem Fall, so ergibt (199) wegen $v_r^2=2\,g\,h$

$$g=-\,\bar{c}^2\,\frac{c_r^2}{\bar{c}^2}\left(1+\frac{G^2}{c_r^2}\right)^{-1}\frac{\bar{T}}{T}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{T}{\bar{T}}\right). \tag{200}$$

Näherungsweise ist $g=k\,M/r^2$, $c_r/\bar{c}=1$, $T/\bar{T}=1$, und da außerdem G klein gegen c_r sein muß, so folgt näherungsweise

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{T}{\bar{T}}\right)=-\,\frac{k\,M}{\bar{c}^2\,r^2}, \tag{201}$$

also

$$\frac{T}{\bar{T}}=1+\sigma\,\frac{k\,M}{\bar{c}^2\,r}+\ldots, \qquad \sigma=1. \tag{202}$$

Im Hinblick auf die in § 6 dargelegte Bedeutung von σ für die Verschiebung der Spektrallinien im Gravitationsfeld ergibt sich hiernach folgender Satz:

Soll die Minkowskische Raum-Zeit-Länge für die Maßbeziehungen des Gravitationsfeldes bestimmend sein und das Prinzip der kürzesten Raum-Zeit-Länge gelten, wie es A. Einstein annimmt, so muß im Gravitationsfeld eine Verschiebung der Spektrallinien nach Rot erfolgen, und zwar genau in dem Betrage, welchen die A. Einsteinsche Theorie vorschreibt: Die Verschiebung darf weder größer noch kleiner sein.

Die Größe der Gravitationsverschiebung kann für die Sonne mit ihrem Rechnungswert verglichen werden. *So bietet sich hier ein entscheidendes Mittel zur Prüfung der Fundamente der allgemeinen Relativitätstheorie.* Es folgt, daß die negativen Ergebnisse der Untersuchungen von K. Schwarzschild und St. John, solange sie bestehen bleiben, eine Annahme der allgemeinen Relativitätstheorie in der jetzigen Form unmöglich machen.

Wir werden erkennen, in welcher Hinsicht eine Änderung nötig scheint, wenn wir fragen, wie weit die Theorie der vorliegenden Arbeit sich den Formen der Relativitätstheorie anpaßt, und wo der Unterschied beginnt. Es genügt, das Wesentliche hervorzuheben, so beschränke ich mich auf den Fall der relativen Isotropie.

Definieren wir für unsere Theorie ds durch

$$ds^2 = -\bar{c}^2\left(\frac{\bar{T}}{T}\right)^2 dt^2 + \left(\frac{\bar{a}}{a}\right)^2 dl^2, \tag{203}$$

dann stellt diese Gleichung ganz im Sinne des vorigen Paragraphen je nach dem Vorzeichen von ds^2 eine meßbare Raumlänge oder eine meßbare Zeitlänge dar. Ebenso ergibt $ds^2 = 0$ die Lichtschreitungen, und eine Übereinstimmung findet auch insofern statt, als nach einem an (69a) angeschlossenen Satz lokale Messungen der Lichtgeschwindigkeit überall den gleichen Zahlwert ergeben. Vergleicht man (203) in der Form

$$\frac{ds}{\bar{c}\sqrt{-1}} = \frac{\bar{T}}{T}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,dt \tag{204}$$

mit (48) in der Form

$$L\,dt = \bar{L}_0 \frac{L_0}{\bar{L}_0}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,dt, \tag{205}$$

so kann das Hamiltonsche Prinzip in der Form

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} w\, ds = 0 \tag{206}$$

geschrieben werden, wobei

$$w = \frac{T}{\bar{T}} \frac{L_0}{\bar{L}_0} = \left(\frac{c}{\bar{c}}\right)^{2\varrho - 1} \tag{207}$$

zu setzen ist. Die Gleichung (206) tritt also in der Theorie der vorliegenden Arbeit an Stelle des Einsteinschen Prinzips der kleinsten Raum-Zeit-Länge

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} ds = 0. \tag{208}$$

In der Einsteinschen Theorie ändern sich im allgemeinen $c/\bar{c}$, $T/\bar{T}$ von Ort zu Ort, es müssen also wesentliche Unterschiede in der Beschaffenheit des Äthers von Ort zu Ort angenommen werden. So scheint es recht gut möglich, für diese Theorie bei der Bestimmung der Bahnen freigelassener Körper im Gravitationsfeld dem Raum-Zeit-Längenelement ds an verschiedenen Orten verschiedenen Wert beizulegen und also (208) durch (206) zu ersetzen. Es läßt sich dann der Widerspruch beseitigen, welcher zwischen Theorie und Erfahrung bei den Verschiebungen der Spektrallinien auf der Sonne zu bestehen scheint. Aber freilich, bei Ersatz von (208) durch (206) lockert sich das Gefüge der Theorie, denn ds verliert die entscheidende Stellung. —

In der Theorie der vorliegenden Arbeit ist ds nichts anderes als eine mathematische Hilfsgröße. Da überdies für diese Theorie kein Grund vorliegt, in der vierdimensionalen Mannigfaltigkeit der Raum-Zeit-Punkte Raum und Zeit einander gleichzustellen, so besitzen die Überlegungen, welche A. Einstein dazu führten, seine Differentialgleichungen (172), (173), (174) in den vier Koordinaten symmetrisch zu gestalten, keine überzeugende Kraft. Die Differentialgleichungen müssen hier im Gegenteil große Bedenken erregen, denn sie ergeben zwangsweise die Folgerung, die Geschwindigkeit der Gravitation sei gleich der des Lichtes. Daß eine solche Übereinstimmung bestehen könne, ist zwar denkbar, aber es scheint nicht notwendig, eine dahinführende Annahme über die Beschaffenheit des Äthers von vornherein zu machen. —

Für die Theorie der vorliegenden Arbeit bleibt es auch eine offene Frage, wie weit der Satz vom gleichen Anschein sich auf das Gravitationsfeld anwenden läßt.

§ 12. Äther und Materie; Ergänzungen.

Faßt man das Licht als wellenhafte Zustandsänderungen eines Mediums auf, so erscheint dieses Medium, der „Äther", als etwas wesentlich Verschiedenes von der molekularen Materie, denn das Licht pflanzt sich mit besonderer Regelmäßigkeit gerade im sogenannten „leeren Raum" fort, wo die Atome, Atomgruppen und Körper jener Materie nur vereinzelt vorhanden sind. Die Elektrodynamik gelangte dahin, den Äther auch innerhalb der molekularen Materie vorauszusetzen, und zwar in solcher Beschaffenheit, daß er an den sichtbaren Bewegungen der molekularen Materie keinen merklichen Anteil nimmt. Der hauptsächlichste Anlaß zu dieser Annahme wurde durch die Ergebnisse der Fizeauschen Versuche über die Lichtbewegungen in strömenden Flüssigkeiten gegeben; später kamen entsprechende Versuche für feste Körper hinzu (G. Sagnac, 1914). Unterstützt wurde die Annahme durch die Erfahrung, daß das Licht beim Vorübergang an schnell bewegten Körpern nicht mitbewegt wird. Die Annahme des „ruhenden Äthers" führte zu einer Theorie der Elektrodynamik von großer Einfachheit und Schönheit, welche die Erscheinungen vortrefflich darstellt. In bester Übereinstimmung mit der Theorie ist auch die Erfahrung, daß das Licht sich unabhängig von der Bewegung der Lichtquellen ausbreitet.

Wie die „*Ruhe des Äthers*" zu verstehen ist, darüber gab H. A. Lorentz 1895 folgende Erklärung: „Daß von absoluter Ruhe des Äthers nicht die Rede sein kann, versteht sich von selbst: der Ausdruck würde sogar nicht einmal Sinn haben. Wenn ich der Kürze wegen sage, der Äther ruhe, so ist damit gemeint, daß sich der eine Teil dieses Mediums nicht gegen den anderen verschiebe und daß alle wahrnehmbaren Bewegungen der Himmelskörper relative Bewegungen in bezug auf den Äther seien." — Wer es versucht, nach dem Vorgang der speziellen Relativitätstheorie das Vorhandensein eines besonderen, an den sichtbaren Bewegungen der molekularen Materie nicht teilnehmenden Äthers in Abrede zu stellen, muß sich darüber klar werden, daß er zur Festlegung der

Lichtschreitungen, die auch nach der speziellen Relativitätstheorie vorzunehmen ist, zu einem Raum-Zeit-Absolutismus genötigt wird. Das wurde schon in § 10 hervorgehoben. —

Eine neue Begründung der Annahme eines Äthers wird gewonnen, wenn man nach dem Vorgang von E. Mach es unternimmt, den Raum-Zeit-Absolutismus auch in der Newtonschen Form zu beseitigen. Nach Newton gibt es in der Welt einen „absoluten Raum" und eine „absolute Zeit" solcher Art, daß ein jeder materielle Körper auf den keine anderen Körper merklich einwirken, sich „gleichmäßig und geradlinig" bewegt. Gegen diese Ansichten wandte sich E. Mach mit größter Schärfe. 1883, in der ersten Auflage seiner „Mechanik", nannte er den absoluten Raum einen „verzweifelten Gedanken". Alle Bewegung hat nach E. Mach nur relative, niemals absolute Bedeutung. Auch wenn ein Körper scheinbar sich selbst überlassen ist, steht er nach E. Mach doch in Wechselwirkung mit der übrigen Körperwelt: eben diese Wechselwirkung bestimmt seine Bewegung und ist so die Ursache der „Trägheit". Die Abplattung der Erde z. B. wird bestimmt nicht durch die Drehung der Erde gegen den absoluten Raum, sondern durch ihre Drehung gegen die übrige Körperwelt.

Ich möchte bei der Ausführung der Machschen Ideen die Aufmerksamkeit besonders auf den Foucaultschen Pendelversuch und verwandte Erscheinungen lenken. Die Drehung der Schwingungsebene des Foucaultpendels relativ zur Erde ist ein wundervolles Beispiel dafür, daß das mechanische Verhalten der Körper nicht durch die Relativität gegen die benachbarten molekular-materiellen Massen bestimmt wird, selbst dann nicht, wenn diese Massen so groß sind, wie die der Erde. Unvermittelte Fernwirkungen, etwa solche der Fixsterne, auf das Pendel sind für den modernen Physiker ausgeschlossen, so muß man zur Erklärung der Drehung der Schwingungsebene etwas Wirkendes beim Pendel selbst annehmen, was an der Drehung der Erde nicht merklich Anteil hat. Eben dieselbe Annahme ist für den Raum der Erde nötig, wenn man ihre Abplattung nach E. Mach erklären will. *Man erkennt, daß die Durchführung der Machschen Ideen zu der Äthervorstellung nötigt.*

Dabei tritt auch klar hervor, daß bei Annahme der Mach-

schen Ideen die Trägheit eines molekular-materiellen Körpers zwar indirekt als Folge der Wechselwirkung mit anderen Körpern aufgefaßt werden könnte, daß sie aber jedenfalls als direkte Folge der Einwirkung des Äthers auf den Körper anzusehen ist. —

Über das gegenseitige Verhältnis von Äther und Materie möchte ich heute dieselben Worte wiederholen, welche ich 1894 sagte und schrieb, als ich in einem Vortrag „Über die Bedeutung des Weltäthers“ [1]) nachwies, daß entgegen dem Anschein, welchen unsere Sinne uns von der Welt darbieten, der Äther eine grundlegende Rolle in dem Bau der Welt spielt: „So sehen wir denn in der Natur vor unseren geistigen Augen eine Wandlung sich vollziehen, indem die Bedeutung des anfänglich kaum beachteten Äthers höher und immer höher steigt. Was aber wird aus der sinnlich wahrnehmbaren Materie, die wir geneigt waren, als Alleinherrscherin zu betrachten? Sie mußte einen großen und bedeutsamen Teil der Naturkräfte an den Äther abgeben und sich bisher stets damit begnügen, eine Anhäufung von erregenden Zentren im Äther zu sein. Das ist gewiß kein unwichtiges Amt, aber dennoch drängt sich die Frage auf, ob die Materie nicht außerdem ein selbständigeres Dasein führe. Finden wir es vielleicht in ihrem Anspruch auf Raum? Die Erinnerung an die so zahlreichen Versuche, diesen Anspruch durch sogenannte Fernkräfte zu erklären, seien sie nun anziehender oder abstoßender Art, welche ihrerseits allein durch die Annahme der Mitwirkung eines Zwischenmediums verständlich werden, zeigt uns sogleich die Unmöglichkeit, auf diesem Wege zu einer Sicherheit zu gelangen. Finden wir es in ihrem „Gewicht“, in der Gravitation? Der Gedanke verschwindet so schnell, wie er gekommen, denn hier liegt die Mitwirkung des Zwischenmediums ja auf der Hand. Jetzt bleibt uns nur noch *eine* Möglichkeit, das selbständige Dasein der Materie sicher zu stellen: Wir müssen es in ihrer Trägheit finden, genauer gesprochen, in ihrer Eigenschaft, „Masse“ zu besitzen, — oder unsere Aufgabe bleibt ungelöst, denn der ganze Kreis der Naturerscheinungen ist nun durcheilt worden.“ ... „Ein elektrisiertes Atom

1) E. Wiechert, Sitz.-Ber. d. Physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. 35. S. [4]–[11]. 1894.

muß hiernach seiner Ladung wegen eine scheinbare ‚Trägheit', eine scheinbare ‚Masse' besitzen." ... „Es ist demnach in jedem Körper, sei er Elektrolyt oder nicht, ein Teil der Masse sicherlich elektrodynamischen Ursprungs, gehört also nicht eigentlich der Materie, sondern vielmehr dem Äther. Der Rechnung zufolge könnte sehr wohl die gesamte ‚Masse der Materie' sich auf diese Weise erklären! Es bietet sich also hier die lockende Aussicht, ‚Materie' und ‚Elektrizität' unter einem höheren Gesichtspunkt zu vereinigen." ...

Die hier in Aussicht gestellte Vereinigung von Elektrizität und Materie führte ich durch, indem ich die „elektrischen Atome" später „Elektronen" genannt„ welche von den chemischen Atomen ausgetauscht werden, als besondere materielle Teilchen darstellte. In einer Arbeit[1]) von 1896 gab ich für das Atomgewicht dieser Teilchen an, es müsse zwischen 10^{-7} und 1 liegen, in einem Vortrag[2]) am 7. Januar 1897 führte ich Experimente mit Kathodenstrahlen vor, aus welchen ich damals folgerte, daß in den Kathodenstrahlen die besonderen negativen elektrischen Atome freifliegen, und leitete für sie ein Atomgewicht zwischen $^1/_{4000}$ und $^1/_{2000}$ ab.

Die Entwicklung der Wissenschaft ging schnell weiter. Es wurde dargetan, daß alle Einzelheiten der Trägheit der Elektronen sich elektrodynamisch vortrefflich erklären, wenn die Lorentzsche Deformation angenommen wird. H. A. Lorentz legte seiner Theorie die Annahme zugrunde, daß alle materiellen Atome sich physikalisch ebenso verhalten, wie die Elektronen. Für alle Atome war danach eine ähnliche, die Trägheit bestimmende, Verkettung mit dem Äther anzunehmen wie bei den Elektronen. Die Mitwirkung der Elektrizität bei dem Aufbau aller materiellen Atome ist durch die neuere Forschung außer Frage gestellt. Die vorliegende Arbeit bringt einen Versuch, die Bedeutung der in der Elektrisierung sich zeigenden Verkettung der Materie mit dem Äther noch weitgehend zu erhöhen, indem in dieser Verkettung auch die wesentliche Ursache der Gravitation gesehen wird.

---

1) E. Wiechert, Abhandl. der Phys.-ökonom. Ges. zu Königsberg i. Pr. 1896. S. 1–48.

2) E. Wiechert, Über das Wesen der Elektrizität, Sitz.-Ber. d. Phys.-ökonom. Ges. zu Königsberg i. Pr. 1897. S. [3]–[16], die „Naturwissenschaften" 12. S. 237–239, 249–251, 261–263. 1897.

1897 schrieb ich in einer Anmerkung zu dem Vortrag vom 7. Januar über das Verhältnis von Äther und Materie: „Bei der Ausmalung der stofflichen Beziehungen zwischen Äther und Materie hat die Phantasie heute noch einen weiten Spielraum, denn wir können uns sehr verschiedene Vorstellungen bilden, ohne mit den bekannten Tatsachen in Widerspruch zu geraten. So wissen wir nicht zu unterscheiden, ob Äther und Materie der Substanz nach völlig oder teilweise oder gar nicht voneinander verschieden sind.“ Ich fügte hinzu, die letztere Annahme liege „meinem Gefühl am nächsten“. Auch heute noch möchte ich diesen Standpunkt innehalten. Dem Wunsche des Menschen, sich selbst und das, was ihn vor allem angeht, in der Natur recht hoch zu stellen, wird durch die gewiß naheliegende Annahme genügt, die materiellen Atome seien Höhepunkte in der Struktur des Äthers. Ich male mir gern ein Sinnbild aus, wonach die scheinbar feste Beschaffenheit des Äthers durch innere Bewegungen, oder vielleicht besser gesagt durch innere Tätigkeit bewirkt ist. Ältere Darlegungen von W. Thomson und Anderen suchten einen solchen Weg. In den materiellen Atomen wäre dann eine gewisse besondere Ordnung der Bewegungen, der Tätigkeit, anzunehmen. — Der Höhepunktvorstellung nahe verwandt ist eine Vorstellung, welche O. Mie[1]) in seiner Theorie der Materie darlegt. Danach besitzt der Äther eine Zustandsfunktion solcher Art, daß stationäre „Knotenstellen“ für den Zustand möglich sind, und aus solchen Knotenstellen sollen die materiellen Atome gebaut sein. D. Hilbert[2]) hat die Miesche Vorstellung mit der Einsteinschen allgemeinen Relativitätstheorie vereinigt, und wurde so zu einem überaus einfachen und durchsichtigen System der „Grundgleichungen der Physik“ geführt. —

In der gewöhnlichen Elektrodynamik gelten der elektrische und der magnetische Feldvektor als Kennzeichen für Erregungen des Äthers. Man nahm früher meist an, daß die Gravitation eine weitere Zustandserregung darstelle, die sich den elektromagnetischen Erregungen überlagere. Da

1) O. Mie, Ann. d. Phys. 37. S. 511—534. 1912; 39. S. 1—40. 1912; 40. S. 1—66. 1913.

2) D. Hilbert, Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1915, S. 395—407; 1917, S. 53—76.

gab A. Einstein den Gedanken eine wesentlich neue Richtung, indem er mit der Gravitation eine tiefergehende Umwandlung der Beschaffenheit des Äthers verband, welche die Lichtgeschwindigkeit ändert. In dem so gewonnenen freieren Blick darf man vielleicht die wichtigste Errungenschaft sehen, welche der allgemeinen Relativitätstheorie zu danken ist: So wurde es möglich, Gravitation und Elektrodynamik zu vereinigen. —

In der Einsteinschen Theorie erscheint die molekulare Materie dem Äther untertan, indem sie den durch die Beschaffenheit des Äthers bestimmten kürzesten Raum-Zeit-Linien folgt; in der Theorie der vorliegenden Arbeit werden die Kräfte, welche der Äther auf die Materie ausübt, durch die Lagrangesche Funktion L direkt gegeben. Es ist sehr lehrreich, zu beachten, wie gering die Unterschiede in der Beschaffenheit des Äthers sind, welche in den Gravitationserscheinungen zur Geltung kommen. Selbst die Masse der Sonne vermag der Lichtgeschwindigkeit an ihrer Oberfläche nur einen um rund $2/10^6$ bis $4/10^6$ anderen Wert zu erteilen, als er in weiten Fernen besteht, und doch ist dieser geringe Unterschied genügend, um den Planeten ihre Bahnen vorzuschreiben. Die Schwerkraft auf der Erde, welche uns wahrlich nicht geringfügig scheint, wird bewirkt durch den Umstand, daß die Lichtgeschwindigkeit nach oben hin bei jedem Meter Anstieg um den 10^{-16} bis $2 \cdot 10^{-16}$ Teil ihres Betrages ansteigt.[1]) Diese winzige Änderung der Beschaffenheit des Äthers ist genügend, uns an die Erde zu fesseln! Es ist ein merkwürdiges Geschick, daß gerade die Arbeiten eines Mannes — A. Einstein — den Anstoß zu solcher Erkenntnis gegeben haben, welcher dem Äther die Existenz absprechen wollte. —

Von Interesse ist es, zu beachten, was der Satz von der Proportionalität der trägen und der schweren Masse für das Verhältnis von Materie und Äther aussagt. Daß alle Körper im Gravitationsfeld „gleich schnell fallen" wird in der Einsteinschen Theorie erreicht durch die Annahme, daß alle im Gravitationsfeld sich selbst überlassenen Körper sich in Bahnen kürzester Raum-Zeit-Länge bewegen. Die Theorie

1) $d c_r/\bar{c}\, d\tau = \gamma g/\bar{c}^2$.

der vorliegenden Arbeit gelangt zu gleichem Ziel durch die Annahme, der Lagrangeschen Funktion komme bei allen Atomen dasselbe Verhalten zu wie bei den Elektronen. Es läuft dies darauf hinaus, in Elektrisierung und Formveränderung, also in der Verkettung mit dem Äther, für alle materiellen Teilchen die gleichen Eigenschaften vorauszusetzen.

In bezug auf den zweiten Teil des Satzes von der Proportionalität der trägen und der schweren Masse, welcher sich auf die Anregung des Äthers durch die Materie bezieht, nimmt die Einsteinsche Theorie an, die Anregung erfolge proportional mit der Gesamtenergie, die ihrerseits proportional mit der Trägheit sei. Für die vorliegende Arbeit könnte man die gleichen Annahmen machen; doch ist es nützlich, zu beachten, daß Gesamtenergie und Trägheit proportional sowohl der elektrischen wie der Kohäsionsenergie erscheinen, es also genügen würde, die Äthererregung mit einer dieser Energien in Beziehung zu setzen. Dabei kommt, entsprechend einer an (54) und (57) geknüpften Bemerkung, noch besonders in Betracht, daß die Kohäsionsenergie vielleicht nicht eine wirkliche Energie, sondern eine Rechnungsgröße derselben Dimensionen darstellt. Für ein Elektron, dem man Oberflächenladung zuschreibt, ist die Kohäsionsenergie durch das Produkt von Kohäsionsdruck und Volumen gegeben, und es scheint fraglich, ob dieses Produkt als eine Energie im eigentlichen Sinne des Wortes gelten darf. — Bleiben so noch Unsicherheiten für die Vorstellung, *so ist doch das Eine klar, daß in eben derselben Verkettung mit dem Äther, welche der Materie die „Trägheit" gibt, jener Einfluß der Materie auf die Beschaffenheit des Äthers zu suchen ist, der durch die Gravitation aufgedeckt wird.*

Von größter Bedeutung für die Erkenntnis des Verhaltens des Äthers wäre es, wenn es gelänge, die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gravitation festzustellen. Hier aber scheinen die Schwierigkeiten vorläufig noch unübersehbar. Laplace glaubte einst schließen zu können, die Geschwindigkeit sei sehr viel größer als die des Lichtes, und R. Lehmann-Filhès (1885, 1896), sowie J. v. Hepperger (1888) verfolgten ähnliche Gedanken. P. Gerber folgerte 1898, wie in § 4 bemerkt wurde, aus der Perihelbewegung des Merkur, die Ausbreitungsgeschwindigkeit sei gleich der des Lichtes. Aber in allen diesen

Untersuchungen werden hypothetische Annahmen über die Wirksamkeit der Gravitation gemacht, die zum mindesten zweifelhaft sind. Auch in der vorliegenden Arbeit konnte kein Mittel angegeben werden, die Frage nach der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gravitation zu beantworten. In der Theorie von A. Einstein spielt die Ausbreitungsgeschwindigkeit nur eine hypothetische Rolle; in der Theorie des Verfassers wird ihrer gar nicht einmal gedacht.

§ 13. Zusammenfassung.

Die in Betracht kommenden Beobachtungsresultate werden diskutiert. Es gilt als Maß für die Beeinflussung der Perihelbewegung der Planeten der Faktor q in der Tisserandschen Formel (12), S. 311, für die Lichtablenkung im Gravitationsfeld der Faktor γ in der Formel (40), S. 318, für die Verschiebung der Spektrallinien der Faktor σ in der Formel (44), S. 320. Die bisherigen Beobachtungen weisen auf einen Wert von q in der Nähe von 4,8 hin, 4 und $5^1/_2$ sind schon erheblich weniger wahrscheinlich (§§ 2, 3, 4). Die Beobachtungen für die Sonne ergeben für γ das Intervall 1—2 (§ 5); für σ wird man auf den Wert 0 hingewiesen, doch scheint auch der Wert $^1/_3$ noch wohl möglich (§ 6).

Die Einsteinsche Theorie ergibt $q = 6$, $\gamma = 2$, $\sigma = 1$. Der Wert für σ bedeutet einen schweren Widerspruch mit bisher vorliegenden Beobachtungen. —

Eine elektrodynamische Theorie der Gravitation wird entwickelt, welche Gedanken von H. A. Lorentz, M. Abraham und A. Einstein verwertet. Als Grundlage dient außer der Äthervorstellung und der Annahme der Lorentzdeformation vor allem die Annahme, daß die Ursache der Gravitation in einer durch Verschiedenheit der Lichtgeschwindigkeit angezeigten Änderung der Ätherbeschaffenheit von Ort zu Ort und in der Elektrisierung der kleinsten Teile der Materie beruhe. Die Durchführung dieser Gedanken wird analytisch ermöglicht durch Benutzung der Lagrangeschen Funktion, welche M. Abraham für die Behandlung der Dynamik des Elektrons eingeführt hat (§§ 7, 8).

In der gewonnenen Theorie erscheint die Gravitation verursacht durch das Zusammenwirken zweier Anteile. Der vorherrschende Anteil ist analog der Kraft, die in einer

dielektrischen Flüssigkeit mit von Ort zu Ort variabler Dielektrizitätskonstanten einen elektrischen Körper von Stellen niederer zu Stellen höherer Dielektrizitätskonstanten treibt. Der andere Anteil ist analog der Kraft, welche in einer Flüssigkeit mit von Ort zu Ort veränderlichem Druck eingebettete Körper von Stellen höheren zu Stellen niederen Druckes treibt. In den in erster Linie in Betracht kommenden Ausführungen der Theorie wirkt der zu zweit genannte Anteil dem ersten und damit der beobachtbaren Gravitation entgegen.

Die Ausführung der Theorie, die nur für stationäre Felder erstrebt wird, ist im einzelnen nicht völlig bestimmt. Nach den bisher vorliegenden Beobachtungen scheint es erlaubt, jede Stelle des Äthers als isotrop zu betrachten, wenn sie mit irgendeiner anderen Stelle verglichen wird („relative Isotropie"). Für die Lagrangesche Funktion eines materiellen Teilchens wird dann gesetzt:

$$L = L_0 \left(\frac{c}{\bar{c}}\right)^{1/\gamma} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot$$

Dabei gibt es eine Ausgestaltung der Theorie, die sich vor allem anderen durch besondere Einfachheit auszeichnet. Für sie ist

$$q = 5\,, \quad \gamma = 1\,, \quad \sigma = 0\,,$$

und es gehören dazu die Feldgleichungen

$$\frac{d\mathfrak{E}}{dt} = c \operatorname{vers} \mathfrak{M}\,, \quad \frac{d\mathfrak{M}}{dt} = -c \operatorname{vers} \mathfrak{E}\,,$$

$$\operatorname{div} \frac{\mathfrak{E}}{c} = 0\,, \qquad \operatorname{div} \frac{\mathfrak{M}}{c} = 0\,;$$

$$\Delta c^3 = -\operatorname{div} \operatorname{grad} c^3 = 0\,.$$

Es scheint recht wohl möglich, daß schon hiermit der Wirklichkeit genügt wird. — Daneben kommt als nicht viel weniger einfach besonders eine Ausgestaltung in Frage, welche

$$q = 4^1/_3\,, \quad \text{oder} = 4^2/_3\,, \quad \gamma = \tfrac{4}{3}\,, \quad \sigma = \tfrac{1}{3}$$

ergibt, und zu der die Feldgleichungen gehören

$$\frac{1}{\xi^3} \frac{d\mathfrak{E}}{dt} = \operatorname{vers} \xi \mathfrak{M}\,, \qquad \frac{1}{\xi^3} \frac{d\mathfrak{M}}{dt} = -\operatorname{vers} \xi \mathfrak{E}\,,$$

$$\operatorname{div} \frac{\mathfrak{E}}{\xi^3} = 0\,, \qquad \operatorname{div} \frac{\mathfrak{M}}{\xi^3} = 0\,;$$

$$c = \xi^4\,;$$

$$\Delta \xi^3 = 0 \quad \text{oder} \quad \Delta \xi^4 = \Delta c = 0\,.$$

In einigen Ausführungen wird gezeigt, wie die Theorie zu ändern wäre, wenn relative Anisotropie angenommen wird (§ 9).

Eine Darstellung der Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie wird gegeben (§ 10).

Die Aussagen der Einsteinschen Theorie für das stationäre Feld, die bisher allein einer Prüfung durch die Erfahrung zugänglich waren, können eine solche Form erhalten, daß sie in wesentlicher Hinsicht als eine besondere Ausführung meiner Theorie erscheinen. Das Einsteinsche Prinzip der Bewegung sich selbst überlassener Körper in kürzesten Raum-Zeit-Linien, welches dabei äquivalent wird mit dem Hamiltonschen Prinzip, führt zu $\sigma = 1$; es scheint also, daß hier eine Änderung der Relativitätstheorie in ihrer jetzigen Form nötig ist (§ 11).

Für die Weltauffassung der Physik ist die Äthervorstellung von grundlegender Bedeutung (§ 12).

Die Frage nach der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation wurde offengelassen. In dem vorläufigen Verzicht, der sich darin offenbart, mag man wohl einen Grundzug in meinen theoretischen Ausführungen der vorliegenden Arbeit erkennen.

Von äußerster Wichtigkeit für die theoretischen Untersuchungen wäre es, wenn die Astronomie größere Sicherheit über die Werte von q, γ und σ schaffen könnte.

Göttingen, den 22. April 1920.

(Eingegangen 26. April 1920)

Anmerkung bei der Korrektur (September 1920). Über die vorstehende Arbeit sind zwei vorläufige Mitteilungen erschienen: In den Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1920, S. 101 bis 108 und in den Astronomischen Nachrichten Nr. 5054, Bd. 211, Spalte 275—284. Die zweite dieser Mitteilungen bringt auch selbständige Weiterführungen der Theorie in bezug auf die Ätherfrage.

---

2. *Das magnetische Molekularfeld*[1]; *von Richard Gans.*

1. Einleitung.

Der Erfolg, den die Einführung des Molekularfeldes bei der Darstellung des Paramagnetismus als Funktion der Temperatur[2]) gezeitigt hat, ermutigt mich, mich jetzt auch der Wechselwirkung der Elementarmagnete in ferromagnetischen Materialien zuzuwenden.

Mit anderen Worten: Während ich in meiner Theorie des Paramagnetismus das Curiesche Gesetz

$$\chi T = \text{const}$$

vervollkommnet habe, in dem χ die spezifische Suszeptibilität, T die absolute Temperatur bedeutet, will ich jetzt daran gehen, die Langevinsche Theorie der Magnetisierung, die zu der Formel

$$\frac{M}{M_\infty} = \mathfrak{Ctg}\, a - \frac{1}{a} \tag{1}$$

führt, zu verallgemeinern, indem ich den Einfluß der Nachbarmagnetonen auf die Einstellung eines Elementarmagneten mit berücksichtige. Mit diesem Problem habe ich mich schon früher beschäftigt[3]), jedoch ohne nähere Begründung angenommen, daß das Molekularfeld eine feste Größe habe, und daß alle Richtungen für dasselbe gleich wahrscheinlich seien. Wegen dieses Mangels greifen wir die Aufgabe noch einmal an.

Die Magnetisierung oder die Verteilungsfunktion der Magnetonenachsen hängt von der Verteilung des Molekularfeldes A und diese wiederum von jener ab, so daß die Auf-

1) Vgl. auch R. Gans, Contribución al estudio de las ciencias, Universidad Nacional de La Plata 2. S. 207. 1918.

2) R. Gans, Ann. d. Phys. 50. S. 163. 1916.

3) R. Gans, Göttinger Nachrichten S. 197. 1910; S. I. 1911.

gabe, die Magnetisierungskurve zu berechnen, infolge dieser wechselseitigen Abhängigkeit recht verwickelt ist.

Um die Behandlung zu vereinfachen, wollen wir die thermische Agitation vernachlässigen, uns also auf den absoluten Nullpunkt beschränken. Damit haben wir auch früher angefangen[1]) und haben damals unter der unbegründeten Annahme, daß das Molekularfeld stets den konstanten Wert A hat, und daß für dasselbe alle Richtungen gleich wahrscheinlich sind, gefunden

$$(2)\qquad \begin{cases} \text{für } K < A & \dfrac{M}{M_\infty} = \dfrac{2}{3}\,\dfrac{K}{A}, \\ \text{„ } K > A & \dfrac{M}{M_\infty} = 1 - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{K}{A}\right)^2. \end{cases}$$

Jetzt soll unter Zugrundelegung einer strengen Theorie für die Wechselwirkung der Magnetonen die den Gleichungen (2) entsprechende Beziehung abgeleitet werden.

Es scheint, als ob wir durch Beschränkung auf den absoluten Nullpunkt das Problem so spezialisiert haben, daß es praktisch viel an Interesse und Bedeutung verliert, aber wir werden zeigen, daß das für $T = 0$ gültige Resultat dieser Arbeit für jede beliebige Temperatur gilt, so daß die Betrachtungen, die wir jetzt veröffentlichen, die Grundlage abgeben für die Verallgemeinerung der Gleichung (1), die wir für später in Aussicht stellen.

2. Die strenge Methode.

Ein Elementarmagnet vom Momente μ befinde sich im Felde h, der Resultanten der erregenden Kraft K und des Molekularfeldes A (vgl. Fig. 1). Derselbe wird sich im Zu-

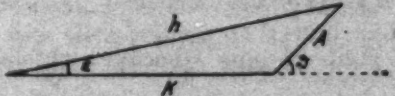


Fig. 1.

stande des Gleichgewichts in Richtung von h einstellen, da wir ja von der thermischen Agitation absehen.

Der Beitrag des Moments dieses Magnetons zur Magnetisierung, die aus Symmetrierücksichten in Richtung von K fällt, ist $\mu \cos \varepsilon$.

1) R. Gans, Göttinger Nachrichten S. 242. 1910.

Es sei $2\pi f(\varepsilon)\, d\varepsilon$ die Verteilungsfunktion der Magnetonen, d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Achse des Elementarmagneten einen Winkel mit K bildet, der zwischen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ liegt. Dann hat die spezifische Magnetisierung den Wert

$$M = N\mu \cdot 2\pi \int_0^{\pi} \cos\varepsilon \cdot f(\varepsilon)\, d\varepsilon,$$

wo N die Anzahl Elementarmagnete pro Masseneinheit bedeutet. Führen wir die Sättigung $M_\infty = N\mu$ ein, so erhalten wir

$$\frac{M}{M_\infty} = 2\pi \int_0^{\pi} \cos\varepsilon \cdot f(\varepsilon)\, d\varepsilon. \tag{3}$$

Die Funktion $f(\varepsilon)$ genügt der Beziehung

$$2\pi \int_0^{\pi} f(\varepsilon)\, d\varepsilon = 1, \tag{4}$$

denn die Magnetonachse muß mit der Richtung K einen Winkel bilden, der sicher zwischen 0 und π liegt.

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Komponenten von A bzw. zwischen X und $X + dX$, Y und $Y + dY$, Z und $Z + dZ$ liegen, sei $W\, dX\, dY\, dZ$ oder in Kugelkoordinaten für A $WA^2 dA \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$, so daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß A dem Betrage nach zwischen A und $A + dA$ liegt und einen Winkel mit K bildet, der zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ liegt,

$$\int_0^{2\pi} d\varphi W A^2\, dA \sin\vartheta\, d\vartheta = 2\pi W A^2\, dA \sin\vartheta\, d\vartheta$$

ist. Da jedem Felde A eine Gleichgewichtslage ε entspricht, so gilt

$$2\pi f(\varepsilon)\, d\varepsilon = 2\pi W \cdot A^2\, dA \sin\vartheta\, d\vartheta. \tag{4'}$$

Ferner ergibt sich aus Fig. 1

$$\left\{\begin{array}{l} \cos\varepsilon = \dfrac{K + A\cos\vartheta}{h} \\ \text{und} \\ h^2 = K^2 + A^2 + 2AK\cos\vartheta, \end{array}\right. \tag{5}$$

so daß sich (3) in

$$(6)\quad \frac{M}{M_\infty} = 2\pi \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{K + A\cos\vartheta}{\sqrt{K^2 + A^2 + 2AK\cos\vartheta}}\, W \cdot A^2\, dA \sin\vartheta\, d\vartheta$$

verwandelt.

Nun haben wir früher gezeigt[1]), daß

$$(7)\quad \begin{cases} W = \dfrac{1}{\sqrt{8\pi^3 a_{11}^2 a_{33}}}\, e^{-\left(\frac{X^2+Y^2}{2a_{11}} + \frac{Z^2}{2a_{33}}\right)} \\ \qquad = \dfrac{1}{\sqrt{8\pi^3 a_{11}^2 a_{33}}}\, e^{-A^2\left(\frac{\sin^2\vartheta}{2a_{11}} + \frac{\cos^2\vartheta}{2a_{33}}\right)}, \end{cases}$$

und zwar bedeutet in dieser Gleichung

$$(8)\quad \begin{cases} 2a_{11} = \dfrac{9}{10} A_0^2 \left[1 + \dfrac{\pi}{8}\int_0^\pi \sin^3\varepsilon \cdot f(\varepsilon)\, d\varepsilon\right] = \dfrac{9}{10} A_0^2 \left(1 + \dfrac{1-v}{6}\right), \\ 2a_{33} = \dfrac{9}{10} A_0^2 \left[1 + \dfrac{2\pi}{8}\int_0^\pi \cos^2\varepsilon \cdot f(\varepsilon)\, d\varepsilon\right] = \dfrac{9}{10} A_0^2 \left(1 + \dfrac{v}{3}\right), \end{cases}$$

wo wir zur Abkürzung

$$(9)\quad v = 2\pi \int_0^\pi \cos^2\varepsilon \cdot f(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

gesetzt haben, so daß nach (4)

$$(10)\quad 1 - v = 2\pi \int_0^\pi \sin^3\varepsilon \cdot f(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

gilt.

Die Konstante A_0 bedeutet das wahrscheinlichste Molekularfeld [siehe die Gleichungen (17) und (23) der zitierten Arbeit]. Nach (6) und (7) folgt somit

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{M}{M_\infty} = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \dfrac{1}{\sqrt{8 a_{11}^2 a_{33}}} \displaystyle\int_0^\infty A^3\, dA \\ \qquad \displaystyle\int_0^\pi \frac{K + A\cos\vartheta}{\sqrt{K^2 + A^2 + 2AK\cos\vartheta}}\, e^{-A^2\left(\frac{\sin^2\vartheta}{2a_{11}} + \frac{\cos^2\vartheta}{2a_{33}}\right)} \sin\vartheta\, d\vartheta. \end{cases}$$

1) R. Gans, Ann. d. Phys. 50. S. 170. 1916, Gleichung (18).

Um dies Integral auszuwerten, muß man a_{11} und a_{33} kennen, die nach (8) von v abhängen. Somit muß v berechnet werden.

Zu dem Zweck multipliziere man (4') mit $\cos^2\varepsilon$ und integriere von 0 bis π. Mittels (5) erhält man

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} v &= 2\pi\int_0^\infty A^3\,dA \\ &\int_0^\pi \frac{e^{-A^2\left(\frac{\sin^2\vartheta}{2a_{11}}+\frac{\cos^2\vartheta}{2a_{33}}\right)}}{\sqrt{8\pi^3 a_{11}^2 a_{33}}}\,\frac{(K+A\cos\vartheta)^2}{K^2+A^2+2AK\cos\vartheta}\sin\vartheta\,d\vartheta. \end{aligned}\right.$$

Da a_{11} und a_{33} Funktionen von v sind, so stellt (12) eine transzendente Gleichung für v dar, die K/A_0 als Parameter enthält. Die strenge Methode hätte also v aus (12) als Funktion von K/A_0 zu berechnen, diesen Wert in (8) einzuführen und die so ermittelten Werte von a_{11} und a_{33} in (11) zu substituieren.

Das ist rechnerisch recht kompliziert und läßt wenig Hoffnung auf praktisch brauchbare Resultate. Trotzdem wollen wir (12) für die speziellen Werte $K=0$ und $K=\infty$ lösen, denn die entsprechenden v-Werte werden uns dazu dienen, mittels eines Kunstgriffes M/M_∞ allgemein zu bestimmen.

Man verifiziert leicht, daß für $K=0$ der Wert $v=1/3$ der Gleichung (12) genügt, denn die Gleichungen (8) ergeben für diesen Fall $2a_{11}=2a_{33}=A_0^2$, so daß (12) zu der Identität wird

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\left(\frac{A}{A_0}\right)^2 e^{-\left(\frac{A}{A_0}\right)^2} d\left(\frac{A}{A_0}\right)\int_0^\pi\cos^2\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta.$$

Für $K=\infty$ erhalten wir durch Vertauschung der Integrationsfolge

$$v=\frac{2\pi}{\sqrt{8\pi^3 a_{11}^2 a_{33}}}\int_0^\pi\sin\vartheta\,d\vartheta\int_0^\infty A^3\,dA\,e^{-A^2\left(\frac{\sin^2\vartheta}{2a_{11}}+\frac{\cos^2\vartheta}{2a_{33}}\right)}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{8a_{11}^2 a_{33}}}\int_0^\pi\frac{\sin\vartheta\,d\vartheta}{\sqrt{\frac{\sin^2\vartheta}{2a_{11}}+\frac{\cos^2\vartheta}{2a_{33}}}^3}=1.$$

Es ergibt sich also $v = 1$ für den größtmöglichen Zustand der Ordnung der Magnetonen ($K = \infty$, magnetische Sättigung), während im Zustande größter Unordnung ($K = 0$, unmagnetisierter Körper) $v = 1/3$ gilt.

Würde man noch beweisen können, daß

$$v = 2\pi \int_0^\pi \cos^2 \varepsilon \cdot f(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

ständig wächst, wenn K von 0 bis ∞ zunimmt, so könnten wir schließen, daß der wahre Wert von v für ein endliches K zwischen $1/3$ und 1 liegt.

Das läßt sich nun dem Ausdrucke (12) nicht so leicht ansehen und kann auch aus dem Integral

$$v = 2\pi \int_0^\pi \cos^2 \varepsilon \cdot f(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

unter Beachtung des Mechanismus der Magnetisierung nicht ohne weiteres geschlossen werden, da die Verteilungsfunktion des Molekularfeldes A von K abhängt, jedoch ist das Resultat sehr plausibel, und wir wollen es im weiteren annehmen, indem wir uns dieser Lücke unserer Beweisführung bewußt bleiben.

Unser oben erwähnter Kunstgriff besteht nun in folgendem Verfahren. Wir berechnen die Magnetisierung mittels (11) erstens mit $v = 1/3$, d. h. unter der Annahme gleichförmiger Verteilung der Richtungen von A, und zweitens mit $v = 1$, d. h. unter der Annahme größtmöglicher Orientierung der Vektoren A, die der Sättigung des Materials entspricht. Wir erhalten so zwei Magnetisierungskurven, zwischen denen die wahre Kurve verlaufen muß.

Da wir aber zeigen können, daß diese beiden Grenzkurven praktisch zusammenfallen, haben wir damit das Problem gelöst.

8. Gleichförmige Verteilung von A.

Im ersten Falle ($v = 1/3$) erhalten wir aus den Gleichungen (8) $2a_{11} = 2a_{33} = A_0^2$, also nimmt (11) die Form an

$$(13)\quad \frac{M}{M_\infty} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left(\frac{A}{A_0}\right)^3 e^{-\left(\frac{A}{A_0}\right)^2} d\left(\frac{A}{A_0}\right) \int_0^\pi \frac{K + A\cos\vartheta}{\sqrt{K^2 + A^2 + 2AK\cos\vartheta}} \sin\vartheta\, d\vartheta,$$

und wenn wir die Substitutionen machen

$$\frac{K}{A_0} = r; \quad \frac{A}{A_0} = z; \quad \cos\vartheta = -u,$$

so wird

$$\frac{M}{M_\infty} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-z^2} z^3 \, dz \int_{-1}^{+1} \frac{r - zu}{\sqrt{r^2 + z^2 - 2rzu}} \, du. \tag{14}$$

Für $z < r$ gilt

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2 - 2rzu}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{r}\right)^n P_n(u), \tag{15}$$

wo $P_n(u)$ die Kugelfunktion $n$ter Ordnung ist, und für $z > r$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2 - 2rzu}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{z}\right)^n P_n(u), \tag{16}$$

so daß (14) sich umwandelt in

$$\begin{cases} \dfrac{M}{M_\infty} = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^r e^{-z^2} z^2 \, dz \int_{-1}^{+1} \left(1 - \frac{z}{r} u\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{r}\right)^n P_n(u) \, du \\ \quad + \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_r^\infty e^{-z^2} z^2 \, dz \int_{-1}^{+1} \left(\frac{r}{z} - u\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{z}\right)^n P_n(u) \, du. \end{cases} \tag{17}$$

Benutzen wir die Integraleigenschaften der Kugelfunktionen

$$\int_{-1}^{+1} P_n(u) \, P_m(u) \, du = 0 \quad \text{für} \quad n \neq m;$$

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(u) \, du = \frac{2}{2n+1}$$

und die speziellen Werte $P_0(u) = 1$; $P_1(u) = u$, so erhalten wir

$$\frac{M}{M_\infty} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^r e^{-z^2} z^2 \, dz \left(1 - \frac{1}{3} \frac{z^3}{r^3}\right) + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{2r}{3} \int_r^\infty e^{-z^2} z \, dz. \tag{18}$$

Um diese Integrale auszuwerten, führen wir das Gausssche Fehlerintegral

$$\Phi(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^r e^{-z^2} \, dz \tag{19}$$

ein und definieren ferner die Funktionen

$$\Phi_n(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^r e^{-x^2} x^{2n}\, dx, \tag{20}$$

so daß $\Phi_0 = \Phi$ ist. Dann schreibt sich (18)

$$\frac{M}{M_\infty} = 2\left[\Phi_1(r) - \frac{\Phi_2(r)}{3r^3}\right] - \frac{1}{3}\Phi''(r), \tag{21}$$

wo

$$\Phi''(r) = -\frac{4r}{\sqrt{\pi}} e^{-r^2}$$

die zweite Ableitung von Φ bedeutet.

Nun läßt sich leicht durch partielle Integration die folgende Rekursionsformel ableiten

$$\Phi_n = \frac{1}{2}\left[(2n-1)\,\Phi_{n-1} + r^{2n-2}\,\frac{\Phi''}{2}\right], \tag{22}$$

die uns erlaubt, Φ_1 und Φ_2 durch Φ auszudrücken.

Wir erhalten so die endgültige Formel

$$\frac{M}{M_\infty} = \Phi(r) - \frac{\Phi(r) + \frac{\Phi''(r)}{2}}{2r^2}. \tag{23}$$

Mittels der Tafeln[1]) für Φ und $\Phi''/2$ berechnet sich M/M_∞ leicht als Funktion von $r = K/A$.

Für kleine Werte von r bediene man sich der Reihe

$$\Phi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu r^{2\nu+1}}{(2\nu+1)\nu!}, \tag{24}$$

mittels der

$$\frac{M}{M_\infty} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu r^{2\nu+1}}{\nu!(2\nu+1)(2\nu+3)} \tag{25}$$

oder

$$\frac{M}{M_\infty} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{15} + \frac{r^5}{70} - \frac{r^7}{378} + \cdots\right) \tag{26}$$

folgt. Auf diese Weise ergibt sich die folgende Tabelle.

Die Kurve in Fig. 2 (nicht die Kreuze in dem Diagramm!) stellt M/M_∞ als Funktion von K/A_0 nach Gleichung (23) dar.

---

1) Z. B. E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln, Leipzig und Berlin 1909. S. 33 u. 37.

$\frac{K}{A_0}$	$\frac{M}{M_\infty}$	$\frac{K}{A_0}$	$\frac{M}{M_\infty}$
0,0	0,0000	1,8	0,8487
0,2	0,1493	2,0	0,8761
0,4	0,2915	2,5	0,9201
0,6	0,4211	3,0	0,9445
0,8	0,5341	4,0	0,9687
1,0	0,6289	5,0	0,9800
1,2	0,6709	6,0	0,9861
1,4	0,7661	7,0	0,9898
1,6	0,8129	∞	1,0000

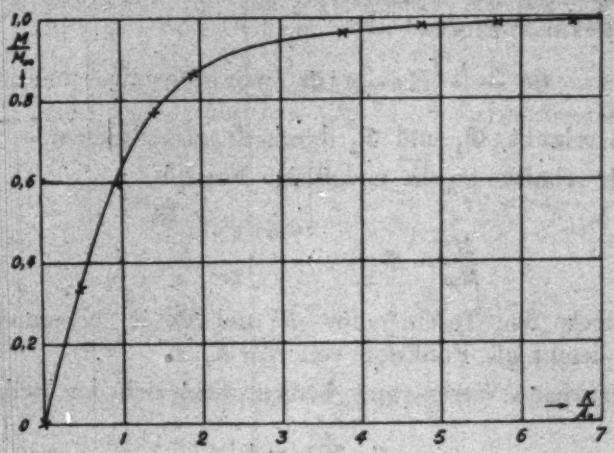


Fig. 2.

4. Verteilung von A entsprechend der Sättigung.

Im zweiten Falle ($v = 1$) erhalten wir aus den Gleichungen (8)

$$2a_{11} = \frac{9}{10} A_0^2; \quad 2a_{33} = \frac{6}{5} A_0^2, \tag{27}$$

und (11) nimmt die Form an

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{M}{M_\infty} &= \frac{2\pi}{\sqrt{8\pi^3 a_{11}^2 a_{33}}} \int_0^\infty A^2 e^{-\frac{A^2}{2a_{11}}} dA \\ &\int_0^\pi \frac{K + A\cos\vartheta}{\sqrt{K^2 + A^2 + 2AK\cos\vartheta}} e^{-\frac{A^2}{2}\left(\frac{1}{a_{11}} - \frac{1}{a_{33}}\right)\cos^2\vartheta} \sin\vartheta \, d\vartheta . \end{aligned} \right. \tag{28}$$

Setzen wir

$$2a_{11} = \frac{9}{10} A_0^2 = A_0'^2, \tag{29}$$

so daß

$$2a_{33} = \frac{4}{5} A_0'^2; \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{11}} - \frac{1}{a_{33}}\right) = \frac{1}{4 A_0'^2},$$

und substituieren ähnlich wie im ersten Falle

$$\frac{K}{A_0'} = r'; \quad \frac{A}{A_0'} = z; \quad \cos\vartheta = -u, \tag{30}$$

so erhalten wir

$$\frac{M}{M_\infty} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^\infty e^{-z^2} z^2 dz \int_{-1}^{+1} \frac{r' - uz}{\sqrt{r'^2 + z^2 - 2r'zu}} e^{\frac{z^2u^2}{4}} du. \tag{31}$$

Entwickeln wir mittels (15) und (16) die Quadratwurzel nach Kugelfunktionen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{M}{M_\infty} = {} & \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^{r'} e^{-z^2} z^2 dz \int_{-1}^{+1} \left(1 - \frac{z}{r'} u\right) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(u) \left(\frac{z}{r'}\right)^n e^{\frac{z^2u^2}{4}} du \\ & + \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_{r'}^{\infty} e^{-z^2} z^2 dz \int_{-1}^{+1} \left(\frac{r'}{z} - u\right) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(u) \left(\frac{r'}{z}\right)^n e^{\frac{z^2u^2}{4}} du. \end{aligned} \tag{32}$$

Wir setzen

$$\frac{M}{M_\infty} = \left(\frac{M}{M_\infty}\right)_1 + \left(\frac{M}{M_\infty}\right)_2,$$

wo

$$\left(\frac{M}{M_\infty}\right)_1 = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^{r'} e^{-z^2} z^2 dz \int_{-1}^{+1} \left(1 - \frac{z}{r'} u\right) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(u) \left(\frac{z}{r'}\right)^n e^{\frac{z^2u^2}{4}} du. \tag{33}$$

$$\left(\frac{M}{M_\infty}\right)_2 = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_{r'}^{\infty} e^{-z^2} z^2 dz \int_{-1}^{+1} \left(\frac{r'}{z} - u\right) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(u) \left(\frac{r'}{z}\right)^n e^{\frac{z^2u^2}{4}} du \tag{34}$$

und behandeln zuerst $(M/M_\infty)_1$. Wir führen die Bezeichnungen ein

$$\int_{-1}^{+1} P_n(u) e^{\frac{z^2u^2}{4}} du = U_n; \quad \int_{-1}^{+1} u P_n(u) e^{\frac{z^2u^2}{4}} du = V_n \tag{35}$$

und erhalten

$$\left(\frac{M}{M_\infty}\right)_1 = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^{r'} e^{-z^2} z^2 dz \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{z}{r'}\right)^n U_n - \left(\frac{z}{r'}\right)^{n+1} V_n\right]. \tag{36}$$

Um U_n und V_n zu berechnen, entwickeln wir $e^{\left(\frac{su}{2}\right)^2}$ in eine Reihe, wodurch sich

$$(37) \qquad U_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu} \frac{1}{\Pi(\nu)} \int_{-1}^{+1} P_n(u) u^{2\nu} du$$

ergibt. Das Integral in dieser Formel ist nur für gerade Werte von n von Null verschieden, d. h. für

$$n = 2\varkappa \; (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots \infty),$$

wenn außerdem $2\nu \geqq n$, d. h. $\nu = \varkappa + \mu \; (\mu = 0, 1, 2, \ldots \infty)$.[1])

In der Theorie der Kugelfunktionen wird der numerische Wert des Integrals

$$(38) \qquad \int_{-1}^{+1} P_{2\varkappa}(u) u^{2(\varkappa+\mu)} du = \frac{2}{4\varkappa+1} \frac{2^{2\varkappa}(4\varkappa+1)\,\Pi(2\varkappa+2\mu)\,\Pi(2\varkappa+\mu)}{\Pi(\mu)\,\Pi(4\varkappa+2\mu+1)}$$

abgeleitet, so daß

$$(39) \qquad U_{2\varkappa} = \sum_{\mu=0}^{\infty} z^{2(\varkappa+\mu)} \frac{\Pi(2\varkappa+2\mu)\,\Pi(2\varkappa+\mu)}{2^{2\mu-1}\,\Pi(\mu)\,\Pi(\varkappa+\mu)\,\Pi(4\varkappa+2\mu+1)}.$$

Ähnlich erhält man

$$(40) \qquad V_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu} \frac{1}{\Pi(\nu)} \int_{-1}^{+1} u^{2\nu+1} P_n(u) du.$$

In dieser Formel muß n ungerade sein, d. h. $n = 2\varkappa + 1$ und außerdem $2\nu + 1 \geqq n$, so daß wir

$$\nu = \varkappa + \mu \; (\mu = 0, 1, 2, \ldots \infty)$$

setzen können, denn sonst ist $V_n = 0$. So folgt

$$(41) \qquad V_{2\varkappa+1} = \sum_{\mu=0}^{\infty} z^{2(\varkappa+\mu)} \frac{\Pi(2\varkappa+2\mu+1)\,\Pi(2\varkappa+\mu+1)}{2^{2\mu-2}\,\Pi(\mu)\,\Pi(\varkappa+\mu)\,\Pi(4\varkappa+2\mu+3)}.$$

Setzt man (39) und (41) in (36) ein, so erhält man

$$(42) \qquad \left\{ \left(\frac{M}{M_\infty}\right)_1 = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \int_0^r e^{-z^2} z^2 dz \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{z^{4\varkappa+2\mu}}{r'^{2\varkappa}} \frac{\Pi(2\varkappa+2\mu)\,\Pi(2\varkappa+\mu)}{2^{2\mu-1}\,\Pi(\mu)\,\Pi(\varkappa+\mu)\,\Pi(4\varkappa+2\mu+1)} \right.$$
$$\left. \left[1 - \frac{z^2}{r'^2} \frac{2\varkappa+2\mu+1}{4\varkappa+2\mu+3}\right] \right.$$

1) Vgl. z. B. H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik 1. S. 293. Braunschweig 1910.

Führen wir noch mittels (20) die Funktionen Φ ein, so wird schließlich

$$(43)\quad \left\{ \left(\frac{M}{M_\infty}\right)_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{r'^{-2\varkappa}\, \Pi(2\varkappa+2\mu)\, \Pi(2\varkappa+\mu)}{2^{2\mu-1}\, \Pi(\mu)\, \Pi(\varkappa+\mu)\, \Pi(4\varkappa+2\mu+1)} \right.$$
$$\left. \left[\Phi_{2\varkappa+\mu+1}(r') - \frac{1}{r'^2} \frac{2\varkappa+2\mu+1}{4\varkappa+2\mu+3} \Phi_{2\varkappa+\mu+2}(r') \right] . \right.$$

Für kleine Werte von r' ist es bequemer, e^{-z^2} in (42) in eine Reihe zu entwickeln, wodurch sich dann ergibt

$$(44)\quad \left\{ \left(\frac{M}{M_\infty}\right)_1 = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda\, \Pi(2\varkappa+2\mu)\, \Pi(2\varkappa+\mu)\, r'^{4\varkappa+2\lambda+2\mu+3}}{\Pi(\lambda)\, \Pi(\mu)\, \Pi(\varkappa+\mu)\, \Pi(4\varkappa+2\mu+1)} \right.$$
$$\left. \left[\frac{1}{2\lambda+4\varkappa+2\mu+3} - \frac{2\varkappa+2\mu+1}{(2\lambda+4\varkappa+2\mu+5)(4\varkappa+2\mu+3)} \right] . \right.$$

Analog transformieren wir $(M/M_\infty)_2$ [vgl. (34)]. Mittels der Gleichungen (35) erhalten wir

$$(45)\quad \left\{ \left(\frac{M}{M_\infty}\right)_2 = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \int_{r'}^{\infty} e^{-z^2} z^2\, dz \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{r'}{z}\right)^{n+1} U_n - \left(\frac{r'}{z}\right)^n V_n \right] \right.$$
$$\left. = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \int_{r'}^{\infty} e^{-z^2} z^2\, dz \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{r'^{2\varkappa+1} z^{2\mu-1} (\varkappa+1)\, \Pi(2\varkappa+2\mu)\, \Pi(2\varkappa+\mu+1)}{2^{2\mu-3}\, \Pi(4\varkappa+2\mu+3)\, \Pi(\mu)\, \Pi(\varkappa+\mu)} \right.$$

und setzen wir $z^2 = t$,

$$(46)\quad \left\{ \left(\frac{M}{M_\infty}\right)_2 = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{r'^{2\varkappa+1} (\varkappa+1)\, \Pi(2\varkappa+2\mu)\, \Pi(2\varkappa+\mu+1)}{2^{2\mu-2}\, \Pi(4\varkappa+2\mu+3)\, \Pi(\mu)\, \Pi(\varkappa+\mu)} \right.$$
$$\left. \int_{r'^2}^{\infty} e^{-t}\, t^\mu\, dt . \right.$$

Durch Integration folgt

$$\int_{r'^2}^{\infty} e^{-t} t^\mu\, dt = e^{-r'^2} \sum_{\lambda=0}^{\mu} \frac{r'^{2\lambda}\, \Pi(\mu)}{\Pi(\lambda)} ,$$

so daß

$$\left(\frac{M}{M_\infty}\right)_2 = \sqrt{\frac{3}{\pi}}\, e^{-r'^2} r' \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\mu} \frac{r'^{2(\varkappa+\lambda)} (\varkappa+1)\, \Pi(2\varkappa+2\mu)\, \Pi(2\varkappa+\mu+1)}{2^{2\mu-2}\, \Pi(\lambda)\, \Pi(\varkappa+\mu)\, \Pi(4\varkappa+2\mu+3)}$$

oder, wenn wir die Reihenfolge der Summationen bezüglich μ und λ vertauschen und berücksichtigen, daß

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} r' e^{-r'^2} = -\frac{\Phi''(r')}{2}$$

ist,

$$(47)\quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{M}{M_\infty}\right)_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\Phi''(r')}{2} \\ &\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=\lambda}^{\infty} \frac{r'^{(2\varkappa+\lambda)}(\varkappa+1)\,\Pi(2\varkappa+2\mu)\,\Pi(2\varkappa+\mu+1)}{\Pi(\lambda)\,\Pi(\varkappa+\mu)\,\Pi(4\varkappa+2\mu+3)}. \end{aligned} \right.$$

Diese Formel scheint reichlich unbequem, aber die dreifache Summe ist gut konvergent, so daß die numerische Auswertung ohne Schwierigkeiten vor sich geht. Es ergibt sich

$$(48)\quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{M}{M_\infty}\right)_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\Phi''(r')}{2}\,[&0{,}70416 + 0{,}05834\,r'^2 + 0{,}00436\,r'^4 \\ &+ 0{,}00031\,r'^6 + \ldots]. \end{aligned} \right.$$

5. Die numerischen Rechnungen.

Um die numerischen Werte von $(M/M_\infty)_1$ nach (43) zu ermitteln, haben wir Φ_n nach der Rekursionsformel (22) berechnet und geben in folgender Tabelle diese Werte für einige Argumente.

r'	Φ	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4	Φ_5	Φ_6
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
1,0	0,8427	0,2138	0,1131	0,0753	0,0560	0,0444	0,0369
1,5	0,9661	0,3938	0,3900	0,5235	0,816	1,385	2,47
2,0	0,9953	0,4770	0,6329	1,2518	3,060	8,485	51,03

So sind wir in die Lage versetzt, M/M_∞ als Funktion von

$$r' = \frac{K}{A_0'}$$

und mittels (29) auch als Funktion von

$$r = \frac{K}{A_0} \quad \left(\text{denn } r' = r\,\frac{\sqrt{9}}{10}\right)$$

mittels (43), (44) und (48) zu berechnen, und erhalten die folgende Tabelle

r	$\left(\frac{M}{M_\infty}\right)_1$	$\left(\frac{M}{M_\infty}\right)_2$	$\frac{M}{M_\infty}$	$r = \frac{K}{A_0}$
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,5	0,0573	0,2735	0,3308	0,4743
1,0	0,3184	0,2757	0,5941	0,9486
1,5	0,6323	0,1330	0,7653	1,423
2,0	0,8233	0,0364	0,8597	1,897
4,0	0,9687	0,0000	0,9687	3,794
5,0	0,9800	0,0000	0,9800	4,743
6,0	0,9861	0,0000	0,9861	5,692
7,0	0,9898	0,0000	0,9898	6,640
∞	1,0000	0,0000	1,0000	∞

6. Ergebnisse und Schlußfolgerungen.

Tragen wir die so erhaltenen Werte durch Kreuze ins Diagramm der Fig. 2 ein, so sehen wir, daß die beiden Grenzkurven, die mit $v = 1/3$ bzw. $v = 1$ berechnet sind, praktisch zusammenfallen, so daß es gleichgültig ist, ob die Verteilung der Achsenrichtungen von A so geordnet oder so ungeordnet wie möglich ist. Also fällt die wahre Kurve mit irgendeiner der beiden Grenzkurven zusammen.

Wir dürfen also als Magnetisierungskurve im absoluten Nullpunkte die Formel (28)

$$\frac{M}{M_\infty} = \Phi(r) - \frac{\Phi(r) + \frac{\Phi'(r)}{2}}{2r^3}; \quad r = \frac{K}{A_0} \tag{49}$$

benutzen, die sehr einfach und für die numerischen Rechnungen wegen der existierenden Tafeln für das Fehlerintegral und seine zweite Ableitung sehr bequem ist.

Wir können ferner den Satz aussprechen: *Im absoluten Nullpunkt können alle Richtungen des Molekularfeldes für die Berechnung der Magnetisierungskurve als gleich wahrscheinlich angesehen werden.*

Paul Hertz und ich[1]) haben dies Resultat bereits 1910 plausibel zu machen gesucht, ohne daß wir es wirklich beweisen konnten.

Der obige Satz, den wir somit für den absoluten Nullpunkt abgeleitet haben, gilt aber a fortiori für irgendeine

1) R. Gans, Göttinger Nachrichten S. 240. 1910.

andere Temperatur, denn bei höheren Temperaturen kommt die thermische Agitation hinzu, und sowohl diese als auch die Wirkung der Molekularfelder arbeiten der Parallelorientierung der Magnetonen entgegen.

Wenn es nun nach Obigem erlaubt ist, mit einer gewissen falschen Richtungsverteilung der Molekularfelder zu rechnen, wenn diese allein die Unordnung hervorrufen, wird es um so mehr gerechtfertigt sein, wenn die fehlerhafte Annahme sich nur auf die eine der beiden existierenden Ursachen der Unordnung bezieht.

So können wir also den oben formulierten Satz verallgemeinern, indem wir in demselben die Worte „im absoluten Nullpunkt" unterdrücken.

Hiermit haben wir viel gewonnen, denn wir haben die analytischen Schwierigkeiten, die der Berechnung der Magnetisierungskurve im Wege stehen, wesentlich verringert.

La Plata, 18. Februar 1918. Instituto de Física.

(Eingegangen 20. Mai 1920.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1920. № 21.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 63.

1. *Grundlinien einer Theorie der Farbenmetrik im Tagessehen;*

von Erwin Schrödinger.

(I. Mitteilung.)

Inhalt.

Vorbemerkung. — Einleitung: Eigenart des Gebietes. Abscheidung des Teilgebietes der niederen Metrik. — Der Farbenmetrik I. Teil: Niedere Farbenmetrik oder Affinität der Farbe. § 1. Begriff der Farbe und des Lichtes. — § 2. Addition von Lichtern und Farben. — § 3. Multiplikation mit einer Zahl. — § 4. Die Dimensionstatsache. — § 5. Die Abbildung auf ein Vektorbüschel. — § 6. Der Spektralkegel. Begrenzung des reellen Farbenraumes und Orientierung in ihm. — § 7. Theoretische Koordinatenbestimmung. — § 8. Wechsel der Eichfarben oder des Koordinatensystems. — § 9. Irreelle Eichfarben. Die Young-Helmholtzsche Theorie. — § 10. Beziehung zwischen Dichromaten und Trichromaten. — Der Farbenmetrik II. Teil: Höhere Farbenmetrik (Eigentliche Metrik der Farbe). § 1. Notwendigkeit, über die niedere Metrik hinauszugehen. — § 2. Maß der Verschiedenheit. Das Linienelement des Farbenraumes. — § 3. Begriff der Helligkeit. — § 4. Spezieller Ansatz für das Linienelement. — § 5. Farbunterschiedsempfindlichkeit im Spektrum. — § 6. Die Farbeneichversuche von Helmholtz, welche der Helligkeitsadditivität zu widersprechen scheinen. — § 7. Die Geodätischen. Das Maß endlicher Verschiedenheit. Heterochrome Photometrie. — § 8. Diskussion des Verlaufs der geodätischen Linien im x-Raum. — § 9. Spezielle Fälle. Die Farbtonänderung beim Zumischen von Weiß. — § 10. Das Bezold-Brückesche Phänomen. Ausblicke auf eine künftige Verbesserung des Linienelements.

Vorbemerkung.

Den Anlaß zur Zusammenstellung des hier mitgeteilten Entwurfes einer Farbenmetrik bildeten für den Verfasser die Gedanken über den Begriff der *Helligkeit*, die in den §§ 3—7 des II. Teils enthalten sind. Die Fragen, um die es sich da handelt, sind diese: läßt sich einer konkret, d. h. durch ein bestimmtes Lichtgemisch, gegebenen Farbe eine Zahl als ihre *Helligkeit* zuordnen derart, daß sich auch von Lichtern ver-

schiedener Reizart[1]) angeben läßt, ob sie *gleichhell* sind oder nicht? Wie ist die Definition für gleiche Helligkeit experimentell zu stellen? Was ergibt sich nach richtig gestellter Definition *empirisch* für die Helligkeit als Funktion der drei Eichwerte oder der drei Grundempfindungsvalenzen oder irgendwelcher anderer drei Größen, durch welche eine Farbe eindeutig festgelegt wird?

Von diesen drei Fragen glaube ich das rationelle Kriterium für die Beantwortung der *ersten* („gibt es eine heterochrome Helligkeit?") hier zum ersten Male klar formuliert und damit auch den inneren Grund aufgefunden zu haben für die große Uneinigkeit der Forscher in diesem Punkt. Ob die Definition der Helligkeitsgleichheit grundsätzlich möglich ist oder nicht, hängt nämlich davon ab, ob ein gewisser Pfaffscher Differenzialausdruck in drei Differenzialen mit experimentell zu ermittelnden Koeffizienten einen integrierenden Faktor besitzt oder nicht. Nur wenn das der Fall ist, lassen sich die „gleichhellen Flächenelemente" der Farbenmannigfaltigkeit zu Integralflächen gleicher Helligkeit zusammensetzen.

Unter der Annahme, daß die experimentell ermittelten Funktionen eine Integration zulassen werden, ergibt sich dann sogleich eine Helligkeitsdefinition, an der, wie immer künftige Experimente ausfallen mögen, nichts mehr zu ändern sein wird.

Anders steht es mit der dritten Frage: nach der speziellen Funktion der Farbkoordinaten, die als Helligkeit anzusprechen ist. Hier habe ich den Gedanken durchgeführt und dem übrigen System unserer Farberfahrung einzugliedern versucht, daß die Helligkeit eine *lineare* Funktion der Grundvalenzen ist und sich bei Mischungen von Lichtern streng additiv verhält. Ein ausgedehntes Beobachtungsmaterial spricht dafür, daß dies wenigstens mit großer Annäherung zutrifft; darum hielt ich es für wertvoll, zu zeigen, daß diese Auffassung sich durchführen läßt, ohne auf Grund unserer *allgemeinen* Helligkeitsdefinition mit anderen Erfahrungen in groben Konflikt zu geraten was bisher nicht feststand. Daß die Additivität in Strenge zutrifft, glaube ich aber kaum, weil vereinzelte, aber sehr bestimmte Wahrnehmungen auf Abweichungen deuten.

---

1) Als Lichter *gleicher Reizart* bezeichne ich mit von Kries solche, welche durch bloße Änderung der objektiven Intensität des einen Lichtes ununterscheidbar gemacht werden können.

Der spezielle Ansatz für das Linienelement des Farbenraumes und die daraus folgende *spezielle Helligkeitsfunktion* ist also sicher nur als *Näherung* anzusehen, die der weiteren Verbesserung durch künftige Experimente harrt.

Um nun den Wert dieser formalen Lösung des Helligkeitsproblems hervortreten zu lassen, erwies es sich als nötig, ihren Platz in dem umfassenderen Gebäude der Farbenmetrik aufzuzeigen, wie es sich dem Verfasser im Laufe der Beschäftigung mit diesen und ähnlichen Fragen allmählich dargestellt hat. Es stellte sich heraus, daß alle messenden Versuche mit Farben in zwei grundsätzlich getrennte Gruppen zerfallen, je nachdem dabei als Kriterium für die Einstellung am Apparat ausschließlich die *völlige Gleichheit* (Ununterscheidbarkeit) zweier aneinander grenzender Farbenfelder benützt wird oder noch andere Kriterien (Ebenunterscheidbarkeit, größte Ähnlichkeit, eventuell stärkster Kontrast). Die Messungsresultate *erster* Art bilden ein in sich geschlossenes einheitliches System, dessen überaus einfache Gesetzmäßigkeiten seit Grassmann formal, seit König auch material bekannt sind. Ich glaube das System dieser Gesetzmäßigkeiten — gewöhnlich Gesetze der Lichtmischung genannt — passend als *niedere Farbenmetrik* zu unterscheiden von den sehr viel verwickelteren und sehr viel weniger gut bekannten Gesetzen der *höheren Farbenmetrik*, welche sich mit den Messungsergebnissen der *zweiten* Art befassen.

Ich halte die strenge Scheidung zwischen diesen beiden Gebieten — abgesehen von ihrer sogleich zu berührenden theoretischen Bedeutung — deshalb für außerordentlich wichtig, weil sonst die vielen begrifflichen Unklarheiten und experimentellen Unsicherheiten, denen wir in der höheren Farbenmetrik auf Schritt und Tritt begegnen, beständig auch in das Gebiet der niederen einzudringen und hier Verwirrung anzurichten drohen, während letztere in Wahrheit fest und sicher in sich selbst ruht und von jenen Schwierigkeiten in keiner Weise tangiert wird.

Der tiefere Grund für diese Abgeschlossenheit und Unberührbarkeit ist ein sehr einfacher. Er ist dem völlig analog, warum z. B. ein Geometer, der ausschließlich die *projektiven Eigenschaften* ebener oder räumlicher Figuren zu studieren unternimmt, sich über das Parallelenaxiom des Euklides nicht den Kopf zu zerbrechen und nicht zu wissen braucht, was

ein rechter Winkel und was die Länge einer Strecke ist. Es stellt sich nämlich heraus, daß die niedere Farbenmetrik sich *vollkommen* deckt mit der *affinen Geometrie* des die Mannigfaltigkeit der Farben in bekannter Weise darstellenden *Vektorbüschels*, oder auch, in der geläufigeren Ebenendarstellung, sich *im wesentlichen* deckt mit der *projektiven Geometrie der Farbenebene*. Die höhere Farbenmetrik dagegen stellt sich — einem Grundgedanken von Helmholtz[1]) folgend — dar, als die eigentliche *metrische Geometrie* jenes als *Farbenraum* aufgefaßten Vektorbüschels, und zwar als eine Metrik in jenem allgemeinsten, von Riemann begründeten Sinne, deren Linienelement nicht das euklidische ist, sondern variable erst experimentell zu bestimmende Koeffizienten hat. (In der ebenen Darstellung läßt sich die Bedeutung der höheren Farbenmetrik nicht so einfach beschreiben, weil hier die dritte Koordinate durch die unanschauliche Massenzahl ersetzt ist.)

Das Helligkeitsproblem hat, wie man sogleich erkennt und im folgenden eingehend dargelegt finden wird, seinen Platz in der *höheren* Farbenmetrik. Im Gebiete der reinen Farben*gleichungen* ist das Verhältnis des „Gleichhellseins" zweier Felder von verschiedenem Farbton so unbekannt und überflüssig, wie in der projektiven Geometrie das Verhältnis des „Gleichlangseins" zweier Strecken oder des Aufeinandersenkrechtstehens zweier Geraden. Ich halte es darum auch für grundsätzlich verfehlt, wenn man, wie Abney[2]) es tut, Farbengleichungen und Helligkeitsgleichungen von Haus aus theoretisch und experimentell verquickt durch die Bestimmung, daß die Grundfarben in Einheiten gleicher Helligkeit gemessen werden sollen. Die Entscheidung, ob das überhaupt möglich ist, fällt erst auf einer weit vorgerückten Stufe der höheren Metrik, und, ob es zweckmäßig ist, hängt davon ab, ob eine

1) H. v. Helmholtz, Versuch einer erweiterten Anwendung des Fechnerschen Gesetzes im Farbensystem, Zeitschr. f. Psych. u. Phys. d. Sinnesorg. **2**. S. 1. 1891; Versuch, das psychophysische Gesetz auf die Farbenunterschiede trichromatischer Augen anzuwenden; ibid. **3**. S. 1 u. 517. 1891; Kürzeste Linien im Farbensystem, Sitzungsberichte d. Berliner Akad. 17. Dez. 1891, S. 1071. Siehe auch die betreffenden Abschnitte des Handbuches der physiolog. Optik (2. Aufl.).

2) W. Abney, Phil. Trans. A. **205**. S. 333. 1906; Proc. Roy. Soc. A. **83**. S. 462. 1910; **84**. S. 449. 1910; **86**. S. 42. 1911; **87**. S. 326. 1912.

ganz bestimmte spezielle Helligkeitsfunktion sich experimentell bewährt — nämlich eine Linearfunktion der Grundvalenzen. Jeder experimentelle Widerspruch oder theoretische Einwand gegen diese ganz spezielle Annahme läßt dann — scheinbar — das ganze Gebäude in seinen Grundvesten erzittern.

Die Brücke zwischen den beiden Gebieten wird geschlagen durch die Theorie der Grundempfindungen. Diese sollen schon in der niederen Metrik ihre Bedeutung haben als die Fehlfarben der Dichromaten und sind bekanntlich von König[1]) — durchwegs aus *Farbengleichungen!* — bestimmt worden. Anderseits wird man erwarten dürfen, daß das Linienelement der höheren Metrik eine besonders einfache Gestalt erhält, wenn man die Grundempfindungen als Variable wählt. In dieser Erwartung sah sich Helmholtz getäuscht. Er mußte andere Grundempfindungspunkte in der Farbenebene ad hoc annehmen, um mit seinem, dem Weber-Fechnerschen Gesetz nachgebildeten Linienelement Anschluß an die Erfahrung (Farbunterschiedsschwellen von König und Brodhun) zu finden und mußte demgemäß sehr viel kompliziertere Annahmen machen über die Natur der dichromatischen Farbenblindheit.[2])

Dies und ein Rechenfehler bei Helmholtz, dessen Aufdeckung den Anschluß an die Erfahrung noch verschlechtert, ist wohl der Grund, warum sein geistvoller Gedanke einer Riemanngeometrie der Farbe keinen Anklang und, soviel mir bekannt, keine Fortführung gefunden hat. Sogar aus der neuesten Auflage des Helmholtzschen Handbuches der physiologischen Optik (bei Leopold Voß, Hamburg und Leipzig 1909) sind die betreffenden Abschnitte gestrichen worden.

Bei der ersten Beschäftigung mit jenen Helmholtzschen Arbeiten schien mir die Unstimmigkeit noch krasser, da ich erkannte — was Helmholtz entgangen zu sein scheint —, daß sein Linienelement eine Helligkeitsfunktion liefert, welche der Erfahrung ins Gesicht schlägt (Kubikwurzel aus dem Produkt der Grundempfindungsvalenzen); bis ich bemerkte, daß eine andere Form des Linienelementes möglich ist, die wenn auch sicher noch verbesserungsfähig — doch schon

1) A. König u. C. Dieterici, Zeitschr. f. Psych. u. Phys. d. Sinnesorgane, 4. S. 241ff. 1892.

2) Vgl. die zweite der oben zitierten Arbeiten, S. 15.

in der einfachen, hier angenommenen Gestalt im wesentlichen Ordnung schafft und die störenden Widersprüche beseitigt.

Daß wir im ersten, der niederen Farbenmetrik gewidmeten Teil inhaltlich gegenüber Helmholtz und König nichts Neues bringen, ist selbstverständlich. Dennoch ließ sich m. E. eine vollständige und einheitliche Behandlung des ganzen Gebietes nicht wohl entbehren, denn mir ist keine Darstellung bekannt, auf die ich mich zur Fundierung der höheren Metrik hätte berufen können, keine Darstellung, die den rein projektiven bzw. affinen Charakter dieser Gesetze so straff betont, wie es für unseren Zweck notwendig ist.[1])

Einleitung: Eigenart des Gebietes. Abscheidung des Teilgebietes der niederen Metrik.

Die Farbenmeßkunst kann als Teilgebiet ebensowohl der Sinnesphysiologie wie der Experimentalphysik angesehen werden. Vorzüglich unter diesem letzteren Gesichtspunkt werden wir sie in dieser Abhandlung betrachten.

Unter den Versuchsanordnungen der Experimentalphysik nehmen die, um die es sich hier handelt, eine ganz eigenartige, ich möchte sagen vom erkenntnistheoretischen Standpunkt ausgezeichnete Stellung ein. Bei allen übrigen physikalischen Messungen, mögen sie nun mit der Wage oder mi dem Galvanometer, mit dem Thermometer oder mit dem Fernrohr ausgeführt werden, besteht die eigentliche Messung letzten Endes immer in der Feststellung von *räumlich-zeitlichen Koinzidenzen*: eines Zeigers, Lichtflecks, einer Quecksilberkuppe mit einem Skalenteil, eines Fadenkreuzbildes mit einem Skalenteilbild oder dem Bild eines Sternes — oder häufig in der zeitlichen Koinzidenz zweier solcher räumlicher Koinzidenzen usw. Bei jeder Farbenmessung hingegen treten die Sinnesorgane des Beobachters außer zu Feststellungen *dieser* Art auch noch mindestens zu *einer* Feststellung von ganz anderer Art in Tätigkeit. Im einfachsten Falle besteht sie darin, daß zwei aneinandergrenzende farbige Felder in bezug auf ihre Farbe für ununterscheidbar erklärt werden — und das für ganz be-

1) Zur ersten Orientierung auf unserem Gebiet möchte ich am meisten die lichtvollen Ausführungen des Hrn. von Kries in W. Nagels Handbuch der Physiologie des Menschen III. 1 (Braunschweig, F. Vieweg 1904) empfehlen.

stimmte Werte der übrigen an der Apparatur veränderlichen Parameter (Nikolstellungen, Blendenöffnungen, Kollimatorstellungen usw.); also Feststellung, daß die farbliche Koinzidenz mit gewissen Koinzidenzen der ersten Art koinzidiert.

Das ausgezeichnete Verhältnis der beiden Farbfelder braucht aber nicht notwendig das der Ununterscheidbarkeit zu sein. Bei einer gewissen Gruppe von Messungen (Unterschiedsschwellen) wird, umgekehrt, von einer Stellung völliger Gleichheit ausgegangen und ein physikalischer Parameter der Apparatur so lange variiert, bis die Felder *eben unterscheidbar* sind. Ferner kann es sein, daß beim Verändern eines Parameters zwar nicht eine Stellung völliger Gleichheit der beiden Felder aufgefunden werden kann, wohl aber eine Stellung, die *dadurch* ausgezeichnet ist, daß in ihr (d. h. für diesen Parameterwert) die beiden Felder *weniger stark verschieden* sind, als für alle voraufgehenden und nachfolgenden Parameterwerte. Ich nenne das mit Helmholtz eine Einstellung auf größte Ähnlichkeit und glaube, daß unter anderem alle direkten, heterochromen Helligkeitsvergleiche in diese Gruppe fallen. Endlich wäre auch noch das Umgekehrte denkbar, die Einstellung auf stärksten Kontrast, doch ist mir kein Fall bekannt, wo dieses Prinzip benutzt worden wäre.

Ich bin der Meinung, daß mit den vier hier zunächst taxativ aufgeführten Fällen der Einstellung auf

a) Gleichheit,
b) Ungleichheit,
c) größte Ähnlichkeit,
d) größten Kontrast

alle *möglichen* Fälle erschöpft sind. Ich glaube z. B., daß man nach dem *dritten* Prinzip einstellt, wenn man etwa zu einer bestimmten Farbe eines lichtstärkeren Spektrums aus einem lichtschwächeren Spektrum die Farbe gleichen Farbtons aussucht; und nach demselben Prinzip, wenn man zwei etwas verschiedene Farbtöne gegeneinander photometriert, d. h. zu einer vorgegebenen Helligkeit des ersten aus einer Reihe abgestufter Helligkeiten des zweiten die gleichhelle Farbe aussucht. Ich glaube nicht, daß „spezifische" Einstellungen möglich sind, wie die Ausdrucksweisen „gleicher Farbton", „gleiche Helligkeit" andeuten. Dem widerspricht nicht, daß man z. B. im erstangeführten Fall aus dem lichtschwächeren Spektrum

einmal die *gleichhelle*, das andere Mal die Farbe *gleichen Farbtones* aussuchen kann und dabei im allgemeinen auf verschiedene Stellen des zweiten Spektrums stoßen wird. Denn es kann natürlich in einer linearen Farbreihe *zwei* (und mehr) Farben geben, die einer vorgegebenen ähnlicher sind, als ihre Nachbarn, so gut als eine Kurve auf einem endlichen Stück zwei (und mehr) Minima aufweisen kann.

Logisch erweisen läßt sich diese Auffassung natürlich nicht. Solange man mit ihr auskommt, hat sie jeder anderen gegenüber den Vorzug der Einfachheit — was nach dem herrschenden Sprachgebrauch beinahe hinreichen sollte, um sie als die *richtige* zu bezeichnen.

Obige vier Prinzipe für die Einstellung ausgezeichneter Parameterkombinationen an einer Apparatur auf Grund eines Farburteils lassen sich aus folgenden zwei fundamentalen, als schlechthin gegeben anzusehenden Fähigkeiten unserer sinnlichen Urteilskraft ableiten:

1. Wir sind imstande zu beurteilen, ob zwei angrenzende Farbfelder *gleich* oder *ungleich* sind.

2. Nennen wir ein Paar angrenzender ungleicher Felder, die uns vorliegen, eine „*Stufe*", so unterscheiden wir Stufen qualitativ nach ihrer Größe, derart, daß wir über zwei gleichzeitig oder knapp nacheinander dargebotene (nicht zu große) Stufen urteilen, welche „größer", welche „kleiner" ist. *Zusatz*: Diese Größer-Kleiner-Beziehung genügt dem Axiom: Aus $A \leqq B$, $B \leqq C$ folgt $A \leqq C$.

Diese beiden Grundfähigkeiten unseres Farburteils halte ich für die einzigen, die für quantitative Messungen in Betracht kommen. Daß sie uns dazu befähigen, die Einstellung nach einem der vier genannten Prinzipe vorzunehmen, ist ohne weiteres klar, falls die vorgelegten Farbenfelder nur von *einem einzigen variablen Parameter* unserer Apparatur abhängen. Aus einer eindimensionalen Reihe von Stufen können wir natürlich die *gleiche*, die (bei einsinniger Durchlaufung) *erste ungleiche*, die (im Vergleich zu den Nachbarstufen) *kleinste* und die (in derselben Hinsicht) *größte* leicht herausfinden, wenn dergleichen in der vorgelegten Reihe vorkommt. Sind zwei oder mehr Parameter zu variieren, so ist die Aufgabe schwieriger, die Lösung viel weniger sicher. Schon bei zweien muß ein suk-

zessives Approximationsverfahren eingeschlagen werden, indem z. B. zunächst der erste festgehalten, der zweite auf größte Ähnlichkeit eingestellt, dann der zweite in dieser Stellung belassen und der erste wieder auf größte Ähnlichkeit eingestellt wird usf., bis entweder Gleichheit oder die größte überhaupt erreichbare Ähnlichkeit hergestellt ist.

In allen den Fällen, wo auf *Gleichheit* eingestellt wird, tritt diese nicht wirklich für *einen* ausgezeichneten Parameterwert (oder Parameterkombination) auf, sondern für einen kleinen Parameterbereich. Dem verdankt das Prinzip b) seine Bedeutung, es kommt ins Spiel bei der Untersuchung der Größe dieses Bereiches. Auf gleichzeitige Variation mehrerer Parameter wird man sich dabei nicht einlassen können, vielmehr nur die Ausdehnung des Bereiches in Richtung jedes Parameters für sich untersuchen. Übrigens gewinnt man ein zwar etwas anderes, aber wohl gleichwertiges Maß für seine Ausdehnung, indem man den *mittleren Fehler* bei der Einstellung auf Gleichheit bestimmt.

Wir müssen nun noch begründen, daß und in welcher Hinsicht wir einen so fundamentalen Unterschied setzen zwischen allen übrigen physikalischen Messungen, bei denen nur auf räumlich-zeitliche Koinzidenz, und den hier betrachteten, bei denen auf eine ausgezeichnete Farbbeziehung eingestellt wird. Dieser Unterschied springt in seiner vollen Bedeutung durchaus nicht in die Augen. Er liegt durchaus nicht in dem äußerlichen Hinzutreten des Farburteils — so wenig, daß wir sogar eine große Zahl von Untersuchungen, für die dies Merkmal zutrifft, aus der eigentlichen Farbenmetrik als nur scheinbar dazugehörig, auszuschließen haben.

Es sind das alle diejenigen, bei denen die als gleich beurteilten Felder *auch physikalisch von vollkommen der gleichen Beschaffenheit* sind. Das Auge des Beobachters mit seinem Farburteil tritt dabei offenbar nur als bequemes und empfindliches physikalisches Instrument, und zwar als Nullinstrument, auf und könnte durch viele andere Instrumente, z. B. ein Bolometer, eine Thermosäule ersetzt werden. Dadurch wäre auch dieser Teil der Messung auf die Feststellung räumlich-zeitlicher Koinzidenzen zurückgeführt, sie gehört somit ganz zu den Messungen der gewöhnlichen Art, es besteht kein fundamentaler Unterschied, sondern nur ein äußerlicher.

Hierher gehören z. B. alle polaristrobometrischen Messungen, dann monochrome Photometrierungen, bei denen wirklich beide Lichter ganz dieselbe spektrale Zusammensetzung haben; daher insbesondere alle Arbeiten mit dem Spektrophotometer, z. B. die Bestimmung der Remissionsfunktion eines Pigmentes, der spektralen Zusammensetzung einer Lichtquelle im Vergleich mit einer Normallichtquelle usf. Alle diese Messungen könnten auch von einem farbenblinden, ja bei geeigneter Anordnung von einem *blinden* Physiker durchgeführt werden, die Resultate würden ganz dieselben sein und für ihn eine wohldefinierte und zwar ganz dieselbe Bedeutung haben, wie für jedermann.

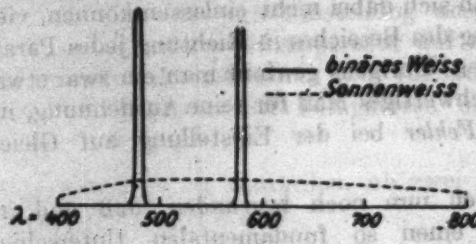


Fig. 1.

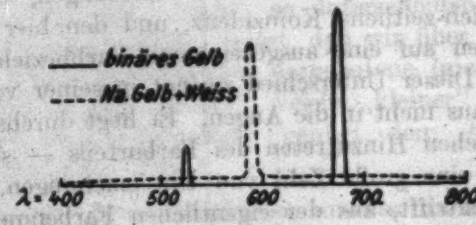


Fig. 2.

Ganz anders, wenn ich z. B. aus zwei komplementären Spektrallichtern Weiß mische und dabei Sonnenlicht zum Vergleich benütze; oder wenn ich weißverdünntes Na-Gelb aus Tl-Grün und Li-Rot mische (sogenannte Rayleighgleichung). Die spektrale Zusammensetzung der beiden Felder ist in diesen Fällen eine ganz verschiedene, wie vorstehende Fig. 1 u. 2 zeigen. Dennoch erscheinen sie, bei geeigneter Wahl der Intensitäten, dem Auge völlig ununterscheidbar. Das Auge läßt sich dabei durch kein Instrument ersetzen, so wenig, daß sogar das Auge eines anderen Beobachters die Dosierung der Lichter

etwas — in abnormalen Fällen sogar um *vieles* — anders vornimmt und jeder Streit, wessen Einstellung besser oder richtiger sei, völlig müßig ist. Die beiden gleicherscheinenden Lichter sind, an und für sich genommen, etwas durchaus verschiedenes, sie haben nichts miteinander zu schaffen, als nur, daß sie *diesem* Auge gleich erscheinen, das in seinem Farburteil inappellabel und durch kein anderes Meßinstrument kontrollierbar oder ersetzbar ist.

Diese ausschließliche Beziehung auf das Auge des Beobachters findet *für die drei weiteren*, oben aufgestellten kolorimetrischen *Prinzipe* (Ungleichheit, größte Ähnlichkeit usw. Kontrast) *immer* statt. Der Betrag, um welchen ich die Intensitäten zweier übrigens ganz gleichbeschaffener Lichter verschieden wählen muß, damit das Auge den Unterschied eben noch erkennen kann, läßt sich natürlich durchaus nicht mit einem anderen Meßinstrument bestimmen, als eben nur mit dem Auge. Und ebensowenig läßt sich aus einer Farbreihe die mit einer vorgegebenen Farbe ähnlichste objektiv auf rein physikalischem Wege ohne Farburteil herausfinden.

Nach alledem könnte man nunmehr die *besondere Eigenart* des Gebietes der Experimentalphysik, auf das wir unsere Aufmerksamkeit richten, dahin kennzeichnen, daß es eigentlich gar nicht der Physik angehört. Es werden dabei nicht die objektiven Eigenschaften der Körperwelt, sondern die subjektiven eines Sinnesorgans untersucht. Diese Ausdrucksweise ist klar und verständlich, sie ist die allgemein übliche und in gewissem Sinne auch richtig. Trotzdem habe ich gegen sie einiges einzuwenden.

Wenn man sagt, es handle sich bei den Farbuntersuchungen nicht um die Erforschung von Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten in der uns umgebenden Körperwelt, sondern um die Erforschung der Wirkungsweise eines Sinnesorgans, so hat das leicht die Vorstellung im Gefolge, als komme dem unmittelbaren Objekt der Untersuchung, den Farben, weniger objektive Realität zu, als anderen Objekten der Physik, wie Körpern, Atomen, Lichtern, elektromagnetischen Feldern usw. Zum mindesten erscheint als das reale Korrelat in der Außenwelt einzig und allein das Sinnesorgan in seiner anatomisch-physiologischen Beschaffenheit und Wirkungsweise. Aber mit ganz demselben Recht kann man sagen, daß auch die ganze übrige

Physik gerichtet ist auf die Funktionen unserer Sinnesorgane und die daran geknüpften zentripetalen und zentralen nervösen Vorgänge; ja alle Wissenschaften und Erkenntnisse erscheinen dann letzten Endes untergeordnet der Anthropologie, die sie alle umfaßt.

Solch schroffem Berkeleyismus mag man anhangen oder nicht, jedenfalls halte ich es für unrichtig, ihn bloß auf einem Teilgebiet unserer Erfahrung zur Geltung zu bringen und dadurch Realilitätsunterschiede aufzustellen, die nicht vorhanden sind. Sicher ist, daß die gesamte Physik aufgefaßt werden kann als eine Einordnung unserer sinnlichen Erfahrung in ein System von Gedankenbildern, das ihren Ablauf richtig vorherzusehen gestattet. Dabei mag man es vorteilhaft finden, für viele Zwecke von gewissen Merkmalen der Erfahrung abzusehen, aber man darf nachher nicht glauben, daß diese Merkmale durch unsere Abstraktion an Realität eingebüßt haben, daß die Körper, die uns umgeben, gewisse, uns bekannte Merkmale an und für sich besäßen, Klang und Farbe aber nur *für uns*.

Die dreidimensionale Mannigfaltigkeit der Farben, der Farbenraum, von dem hier viel die Rede sein wird, besitzt meines Erachtens ganz dieselbe Realität wie unser dreidimensionaler Punktraum; er darf nicht als ein mathematischer Bildraum aufgefaßt werden, wie etwa der Geschwindigkeitsraum, in dem wir uns die Geschwindigkeitsverteilung unter den Gasmolekülen in der statistischen Mechanik versinnbildlichen. Freilich, die Art, wie wir in ihm Koordinaten legen, ihn einteilen und vermessen, ist eine künstliche, mathematische Konstruktion, an die wir im allgemeinen nicht denken, wenn uns Objekte dieses Raumes vor Augen treten; aber das trifft für den gewöhnlichen Punktraum in ganz der gleichen Weise zu.

Unter den vier oben aufgestellten kolorimetrischen Einstellprinzipien ist das erste, das der Gleichheit, weitaus das einfachste. Es ist vorteilhaft, vorerst dieses Prinzip allein zur Geltung zu bringen, d. h. die unter seiner ausschließlichen Verwendung zugängliche Erfahrung zu sammeln und zu sichten. Man erreicht so schon eine sehr weitgehende Orientierung in der Farbenmannigfaltigkeit, zu deren Festlegung wir nunmehr schreiten.

Der Farbenmetrik I. Teil: Niedere Farbenmetrik oder Affinität der Farbe.

§ 1. Begriff des Lichtes und der Farbe.

Eine Farbe tritt unter anderem dann auf, wenn das Auge von Licht getroffen wird. Da dies die normale Entstehungsart der Farben ist und die einzige, welche sich sehr genau quantitativ verfolgen läßt, machen wir hier von ihr ausschließlichen Gebrauch.

Unter einem bestimmten *Licht* verstehen wir ein Strahlungsfeld, das in der Umgebung eines bestimmten Raumpunktes für die (Winkel-)Umgebung einer bestimmten durch diesen Punkt gehenden Richtung bestimmte Eigenschaften hat. Es soll nämlich durch ein senkrecht zu dieser Richtung gelegtes Flächenelement in den Richtungen eines die vorgegebene Richtung enthaltenden Raumwinkelelementes pro Flächen-, Zeit- und Raumwinkeleinheit die Energiemenge

$$f(\lambda)\, d\lambda$$

in der Form von Wellen mit Längen zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ hindurchtreten. $f(\lambda)$ ist eine Funktion von λ im sichtbaren Spektralgebiet. Nach dieser Definition ist also

$$f(\lambda)\, d\lambda\, d\omega\, d\sigma\, dt$$

eine Energiemenge ($d\omega$ Winkelelement, $d\sigma$ Flächenelement, dt Zeitelement). Und ein bestimmtes Licht ist durch Angabe einer Wellenlängenfunktion $f(\lambda)$ zwischen etwa $\lambda = 400$ und $\lambda = 800\,\mu\mu$ gegeben.

Wenn wir sagen, wir bieten dieses Licht dem Auge dar, so meinen wir damit, daß wir das Auge *so* an die Stelle unseres Flächenelementes bringen, daß die herausgegriffene Richtung in einer nahen Umgebung der Stelle deutlichsten Sehens (auf dem gelben Fleck) abgebildet wird. Dabei setzen wir voraus, daß $f(\lambda)$ im Bereich der Pupille nicht merklich variiert, d. h. daß die Pupille von einem Strahlenbündel gleichförmiger Beschaffenheit voll ausgefüllt wird. Im Gegensatz dazu wird, sobald wir verschiedene Lichter auf angrenzenden Feldern vergleichen, $f(\lambda)$ in seiner Abhängigkeit von der *Richtung* sprunghaft variieren für ein ebenes Büschel von Richtungen — entsprechend einer scharfen, geraden Trennungslinie zwischen den beiden Feldern.

Die Mannigfaltigkeit der Lichter ist von höherer *Mächtigkeit* als das Kontinuum, nämlich von der des Funktionenraumes; also von nicht angebbarer Dimensionenzahl. Es wäre von vornherein möglich, daß dies auch für die Mannigfaltigkeit der Farbqualitäten zutrifft oder daß letztere mindestens von einer sehr hohen Dimensionenzahl wäre; wie es bei der Mannigfaltigkeit der zusammengesetzten Klänge der Fall ist, da das Ohr bis zu einem gewissen Grade als harmonischer Analysator wirkt. Hier ist das nicht der Fall. Vielmehr ordnen sich die Lichter nach dem Prinzip des Gleichaussehens auf angrenzenden Feldern in große Gruppen — jede selbst von der Mächtigkeit des Funktionenraumes — und die Mannigfaltigkeit dieser Gruppen gleichaussehender Lichter ist für farbentüchtige Personen von der Dimensionszahl drei — der höchsten je beobachteten. Diese Dimensionstatsache ist die Grundtatsache der niederen Farbenmetrik, ihre Ableitung aus der Erfahrung wird uns noch näher beschäftigen.

Das bisher dem Sprachgebrauch entnommene, ohne nähere Definition benützte Wort *Farbe* erläutern wir nun dahin, daß wir für quantitative Zwecke eine solche *Gruppe gleichaussehender Lichter als eine Farbe* bezeichnen wollen. Wir entfernen uns damit ein wenig von dem gewöhnlichen Sprachgebrauch und zwar insofern, als Lichter gleicher Farbe (nach *unserer* Terminologie) unter verschiedenen Umständen sehr verschiedene Eindrücke auf das Auge hervorbringen können, so daß sie zuweilen sogar mit verschiedenen *Farbnamen* belegt werden. So kann von zwei Lichtern, die auf angrenzenden Feldern ununterscheidbar wären, das eine, das für sich allein, etwa im Rahmen eines schwarzen Grundes, gesehen wird, *goldgelb*, das andere, das als Körperfarbe neben anderen, relativ lichtstärkeren Körperfarben auftritt, *braun* erscheinen. Ebenso sieht bei dem bekannten Versuch der „farbigen Schatten" das von einer weißen Fläche zurückgeworfene Tageslicht im „Schatten der Kerze" das eine Mal (wenn die Kerze *brennt*) *blau*, das andere Mal (wenn die Kerze *gelöscht* ist) grau aus.[1])

Aber in keinem Falle hängt das verschiedene Aussehen irgend von der etwa verschiedenen physikalischen Zusammen-

1) Vgl. z. B. H. v. Helmholtz, Handb. d. physiol. Optik. 3. Aufl. 2. S. 30f. 1911.

setzung ab, es findet sich, wie im letzterwähnten Fall, auch bei völlig identischen Lichtern; unter welchen Begleitumständen auch immer ein Licht dem Auge dargeboten werden mag, stets bewährt sich die oben gegebene Definition in *dem* Punkte, daß der Austausch gegen ein anderes zusammengesetztes, *gleichfärbiges* unbemerkt bleibt.

§ 2. Addition von Lichtern und Farben.

Unter *Mischung oder Addition von Lichtern* verstehen wir die Superposition der betreffenden Strahlenbündel. Sind $f(\lambda)$ und $g(\lambda)$ die Wellenfunktionen zweier Lichter, so lautet die ihrer Mischung oder Summe

$$f(\lambda) + g(\lambda).$$

Als weitere grundlegende *Erfahrungstatsache* verzeichnen wir nun die, daß man *unzweideutig*, wie von einer Mischung oder Addition von *Lichtern*, so auch von einer *Mischung oder Addition von Farben* sprechen kann. Von vornherein, ohne Hinzutreten einer bestimmten Erfahrung, ist diese Operation unendlich vieldeutig, weil man von jeder der zu mischenden Farben irgendeinen ihrer unendlich vielen Repräsentanten auswählen und zur Mischung verwenden kann. Es wäre von vornherein möglich, daß die resultierenden Lichter durchaus nicht alle gleich, sondern mindestens teilweise verschieden aussehen. Die bloße Angabe der gemischten *Farben* würde dann nicht hinreichen, um die Mischfarbe eindeutig zu bestimmen. Die Erfahrung lehrt aber, wie gesagt, daß das *nicht* der Fall ist. Die resultierenden Lichter sehen alle gleich aus, zur Bestimmung der *Farbe* des Mischlichts genügt die Bestimmung der Kontrahenten hinsichtlich ihrer *Farbe* oder wie Grassmann[1]) es ausdrückt:

Gleichaussehende Lichter gemischt ergeben gleichaussehende Lichter (3. Satz von Grassmann). Man kann auch sagen: Die oben festgestellte unbedingte und völlige Äquivalenz der Lichter, die wir als *gleichfärbig* definiert haben, bleibt auch in Mischungen erhalten.

Diese Tatsache — und nur sie — erlaubt uns, bei sehr vielen Überlegungen von der genauen Beschaffenheit des Lichtes, durch das wir eine Farbe erzeugen, ganz abzusehen

1) H. Grassmann, Pogg. Ann. 89. S. 69. 1853 (Ges. Abh., Leipzig, Teubner, 1902, Bd. II, 2, S. 161ff.); Anhang zu W. Preyers Elementen der reinen Empfindungslehre, Jena, Hermann Dufft, 1877 (Ges. Abh., Bd. II, 2. S. 213ff.).

und statt mit Lichtern, d. h. mit Wellenlängenfunktionen, direkt mit Farben zu operieren. Als Symbol für eine Farbe führen wir immer einen großen lateinischen Buchstaben A, B, L, M . . . ein, und als Symbol für die Mischung das Zeichen $+$:

$$A + B, \quad A + B + L + M, \quad \ldots .$$

Um anzuzeigen, daß zwei Farben gleichaussehen, benützen wir das Zeichen $=$. Wenn etwa die Farbe L, zu der wir auf irgendeinem anderen Wege gelangt sind, sich als die Mischfarbe von A und B herausstellt, so schreiben wir das symbolisch

$$L = A + B.$$

Daß das Gleichheitszeichen im Verlauf derselben Rechnung in doppelter Bedeutung auftreten wird, einmal im gewöhnlichen algebraischen Sinn, einmal in Farbengleichungen, wird — wenn wir lateinische Majuskeln konsequent nur als Farbsymbole benützen — ebensowenig zu Verwechslungen führen, wie der nämliche Sachverhalt in der Vektor- und Tensorrechnung; die Analogie wird sich übrigens als eine vollkommene herausstellen, da jede Farbgleichung eines Farbentüchtigen drei algebraischen Gleichungen entspricht.

Daß die bekannten kommutativen und assoziativen Gesetze für unsere Farbenaddition gelten, ist selbstverständlich und bildet keine neue Erfahrungstatsache, weil sie ja auf dem Weg über die gewöhnliche algebraische Addition der Wellenlängenfunktionen definiert wurde.

Wenn man für eine Kategorie von Gegenständen die Addition definiert hat, liegt es nahe, nach der Möglichkeit der Subtraktion zu fragen. Läßt sich immer eine Farbe X finden, die, zu A addiert, B ergibt?

$$A + X = B.$$

Diese Farbe würde zu bezeichnen sein als

$$X = B - A.$$

Ein solches X ist nicht immer auffindbar, *die Subtraktion ist nicht in allen Fällen möglich*, wie wir an folgendem, etwas vorausgreifenden Beispiel erläutern.

Als *Spektrallicht* bezeichnen wir ein Licht, dessen $f(\lambda)$ nur in einem sehr kleinen λ-Bereich von Null verschieden ist, und die betreffende Farbe als *Spektralfarbe*. Die meisten Spektralfarben (von etwa $\lambda = 475$ bis $\lambda = 630$) sind nun dadurch ausgezeichnet, daß sie sich überhaupt nur auf diese eine Art her-

stellen lassen — die Lichtergruppe umfaßt nur das *eine* Licht —, wenn man davon absieht, daß bei genügend klein gewähltem λ-Bereich die Verteilung der Energie *innerhalb* dieses Bereiches willkürlich ist, weil hinreichend benachbarte Wellenlängen sich in ihrer Wirkung auf das Auge nicht unterscheiden. Es gibt wohl Mischlichter vom gleichen *Farbton*, sie erscheinen aber gegen das Spektrallicht immer etwas weißlich (weniger gesättigt).

Nehmen wir nun zwei solche Spektralfarben her, etwa $S_{\lambda'}$ und $S_{\lambda''}$ und verlangen

$$S_{\lambda'} + X = S_{\lambda''},$$

so ist diese Forderung natürlich unerfüllbar, weil die *links* unter allen Umständen enthaltene Wellenlänge λ' nicht vorkommen darf in einem Licht, das die *rechte* Spektralfarbe darstellen soll.

In anderen Fällen ist die Subtraktion möglich, z. B. immer als Umkehrung einer wirklich ausgeführten Addition. Auf diese Fälle beschränken wir vorläufig das Zeichen — (Minus). Wir dürfen dann in jeder als richtig bekannten Farbgleichung ein auf der einen Seite wirklich vorhandenes Glied unter Zeichenumkehr auf die andere Seite werfen. Nur müssen wir uns jetzt noch fragen, ob die Umkehrung der Addition, die in diesem Falle sicherlich *möglich*, auch immer *eindeutig* ist. Schreiben wir z. B. für

$$A + C = B$$

auch

$$A = B - C$$

und lesen das: A ist diejenige Farbe, die ich mit C mischen muß, um B zu erhalten, so hat das nur einen Sinn, wenn A auf diese Weise bei gegebenem B und C auch *eindeutig* festgelegt ist. Es handelt sich also darum, ob von dem obigen Grassmannschen Erfahrungssatz auch die Umkehrung gilt:

Nur gleichaussehende Lichter ergeben gemischt mit gleichaussehenden Lichtern, wieder gleichaussehende Lichter. Oder: aus der respektiven Gleichheit von $n-1$-Summanden und der Summe kann man auf die Gleichheit des n^{ten} Summanden schließen.

Darüber ist zu sagen, daß dies — erfahrungsgemäß — in der Tat der Fall ist, soweit nicht die Endlichkeit der Unter-

schiedsschwellen, die den Gegenstand des zweiten Teiles dieser Abhandlung bilden wird, merklich ins Spiel kommt. Ist A eine gegen B sehr lichtschwache Farbe, so werden B und C sich nur wenig unterscheiden. Dann kann eine kleine Abänderung von A, die aber an dieser Farbe selbst doch schon sehr deutlich bemerkt wird, in der Summe $A + C$ unbemerkt bleiben. Diese Unsicherheit in der Definition von A als Differenz ist völlig analog der experimentellen Unsicherheit, die auftritt, wenn man beispielsweise einen kleineren *Winkel*, sagen wir die Dispersion einer Glassorte, als Differenz zweier großer Winkel, diesfalls der Ablenkungswinkel, bestimmt. Niemand wird aus diesem Grunde der Subtraktion von Winkeln die Eindeutigkeit absprechen wollen. Und so dürfen wir wohl auch hier behaupten, daß die Differenzbildung von Farben, wenn überhaupt möglich, im Resultat *eindeutig* ist.

Achten muß man darauf, daß mindestens auf der einen Seite der Gleichung eine unmittelbar zu verwirklichende, nur durch Summationen zustandekommende Farbe steht, wofür auch die Null (0), als dem Fehlen alles Lichtes entsprechend, zugelassen werden darf. Sonst läßt sich die Realität des Gebildes nicht mehr garantieren. Übrigens sind auch solche Gleichungen als Zwischenprodukte bei Umformungen aus rein algebraisch-formalen Gründen völlig unschädlich — lassen sich aber, wenn man darauf Wert legt, stets vermeiden.

Noch einen Punkt müssen wir zur Sprache bringen. Weiß man, daß eine Farbendifferenz $A - B$ ausführbar ist,

$$A - B = C,$$

so folgt daraus *keineswegs*, daß *irgend zwei* Wellenlängenfunktionen $\varphi_A(\lambda)$, $\varphi_B(\lambda)$, welche die Farbe A bzw. B darstellen, für alle λ eine nichtnegative Differenz ergeben

$$\varphi_A(\lambda) \geqslant \varphi_B(\lambda).$$

Wohl aber läßt sich schließen, daß es Repräsentanten von A und B *gibt*, für welche das stattfindet. Denn C existiert, es gibt also mindestens *ein* Licht $\varphi_C(\lambda)$, das die Farbe C darstellt. Dann sind

$$\varphi_B(\lambda) + \varphi_C(\lambda) \quad \text{und} \quad \varphi_B(\lambda)$$

zwei Lichter von der gewünschten Eigenschaft.

§ 3. Multiplikation mit einer Zahl.

Der Begriff des *ganzzahligen Vielfachen einer Farbe* ergibt sich unmittelbar durch wiederholte Ausführung der Addition

$$m\,A = A + A + A + \ldots + A.$$

Als Umkehrung dieser Operation ergibt sich der Begriff des *ganzzahligen Bruchteils einer Farbe*. Daß die Division immer *ausführbar* ist, ist klar. Um

$$\frac{1}{n}A$$

zu finden, d. h. eine Farbe, die n-mal genommen, A ergibt, braucht man nur eines der Lichter herzunehmen, die A darstellen, sagen wir $\varphi_A(\lambda)$, und durch n zu dividieren

$$\frac{1}{n}\varphi_A(\lambda).$$

Nicht von vornherein klar ist die *Eindeutigkeit* der Operation, d. h. daß es gleichgültig ist, welches Licht von der Farbe A man hernimmt, daß man stets zu derselben Bruchfarbe gelangt.

Nehmen wir diese Eindeutigkeit für den Augenblick als erwiesen an, so folgt durch Kombination der Multiplikation und Division durch ganze Zahlen der Begriff des Produktes einer Farbe mit einer rationalen Zahl:

$$\frac{m}{n}A.$$

Und es folgt also, daß eine Farbengleichung richtig bleibt, wenn man sie mit einer *rationalen* Zahl multipliziert, ohne neuerlichen Regreß an die Erfahrung — falls nicht etwa der hinausgeschobene Beweis für die Eindeutigkeit der ganzzahligen Division einen solchen Regreß notwendig machen sollte.

Die Ausdehnung auf beliebige nichtnegative Zahlen ist eine Selbstverständlichkeit, da wir von physikalischer Wirklichkeit handeln, nicht ein Spiel mit mathematischen Symbolen treiben. Wenn man aber will, kann man sich dabei auf den zweiten der von Grassmann aufgestellten Grundsätze stützen, dem ich die Form gebe:

Wenn ein Licht sich stetig ändert, ändert sich seine Farbe stetig (zweiter Satz von Grassmann).

Diese Form hat in unserer Nomenklatur den Vorzug, nicht auf die Farbempfindung zu gehen, sondern auf quantitativ faßbare Dinge. Deutlicher ausgeführt heißt unser Stetigkeitssatz:

Wenn $\varphi(\lambda)$ und $\varphi(\lambda) + \delta\varphi(\lambda)$ zwei *wenig* verschiedene Lichter sind, und $\psi(\lambda)$ ein beliebiges mit $\varphi(\lambda)$ gleichaussehendes Licht, so gibt es unter den mit $\varphi + \delta\varphi$ gleichaussehenden Lichtern mindestens eines, $\psi + \delta\psi$, das von ψ nur wenig verschieden ist. —

Wir haben somit den Begriff des Produktes

$$\mu A,$$

wo μ eine beliebige nichtnegative Zahl ist, gewonnen und den Satz:

Eine Farbengleichung bleibt richtig, wenn man sie mit einer nichtnegativen Zahl multipliziert.

Die Gültigkeit der assoziativen und distributiven Multiplikationssätze — ein kommutativer kommt nicht in Betracht — folgt wieder aus der Beziehung, in der unser Rechnen mit *Farben* zu dem Rechnen mit *Wellenlängenfunktionen* steht. Was ersteres von letzterem unterscheidet — zugleich der wahre Kern aller Mischungssätze — ist immer nur die Feststellung der *Eindeutigkeit* des Resultates, welches Licht immer man zur Erzeugung der Farben, mit denen operiert wird, benützen mag.

Nehmen wir nun die vorläufig zurückgestellte Frage nach der *Eindeutigkeit der ganzzahligen Division* wieder auf. Es fragt sich, ob aus der Gleichheit der Multipla

$$m A = m B$$

auf die Gleichheit

$$A = B$$

geschlossen werden kann. Oder ist es etwa möglich, daß eine *Farbenungleichung*

$$A \neq B$$

sich durch Multiplikation mit einer ganzen Zahl m in eine *Gleichung* verwandle?

Geht man auf Lichter zurück, so lautet die Frage: können zwei Lichter $\varphi(\lambda)$ und $\psi(\lambda)$, die *nicht* gleich aussehen, dadurch gleich aussehend gemacht werden, daß man einfach die objektive Intensität beider auf das m-fache erhöht?

Was zunächst die *Tatsachen* anlangt, so liegen sie so: in der Netzhautmitte, soweit das zentrale Skotom des Dämmerungssehens reicht, kommt dergleichen nicht vor; da sind alle Farbengleichungen von der absoluten Intensität unabhängig.[1]) Auf parazentralen und peripheren Teilen der Netzhaut, die uns aber hier nicht beschäftigen, verwandeln sich Farben*gleichungen* bei Herabsetzung der Intensität in Ungleichungen. Hier ist aber auch der Grassmannsche Satz vom Gleichaussehen der Mischungen gleichaussehender Konstituenten nicht gültig. Was uns hier aus prinzipiellen Gründen interessiert, ist, ob beide Erscheinungen *logisch* aneinander geknüpft sind oder ob die zentrale Beständigkeit der Gleichungen eine neue Erfahrungstatsache *neben* dem Grassmannschen Satz bildet, die in den Grundlagen vermerkt werden muß.

Dieser letzteren Ansicht war E. Hering[2]), der deshalb den Grassmannschen Sätzen noch diesen hinzugefügt wissen wollte, daß

„gleichaussehende Lichter einander gleichbleiben, wenn man die Intensität eines jeden in demselben Verhältnis vermehrt oder vermindert".

Auch ich habe mich vergebens bemüht, ganz ohne neuerlichen Regreß an die Erfahrung auszukommen und halte es für unmöglich. Doch wäre es sicherlich auch nicht richtig, den ganzen Multiplikationssatz in Bausch und Bogen als neue unabhängige Erfahrungstatsache hinzustellen; da doch jedenfalls die *ganzzahlige* Multiplikation logisch aus der Addition folgt.

Folgende Schlüsse lassen sich ziehen. Gibt es für einen Wert von n *verschiedene* Bruchfarben $\frac{1}{n} A$, sagen wir

$$n A_n = n A_n' = A,$$
$$A_n \neq A_n',$$

1) Vgl. W. Nagel, Handbuch der Physiologie des Menschen. Braunschweig, Vieweg, 1904, Bd. III, 1. S. 181 Zeitschrift f. Psychol. u. Physiol. d. Sinnesorgane 23. S. 162.

2) E. Hering, Lotos N. F. VII. S. 242f.

so kann weder

$$(n-1)\,A_n = (n-1)\,A_n'$$

noch

$$(n+1)\,A_n = (n+1)\,A_n'.$$

weil aus jeder dieser Gleichungen mit dem ersten Teil der Annahme (wegen der Eindeutigkeit der Subtraktion, die hier sicher ausführbar ist) folgen würde

$$A_n = A_n',$$

was dem zweiten Teil der Annahme widerspricht. Ebenso läßt sich schließen

$$2n\,A_n = 2n\,A_n'.$$

aber

$$(2n-1)\,A_n \neq (2n-1)\,A_n'$$
$$(2n+1)\,A_n \neq (2n+1)\,A_n'$$

usf. für beliebige Multipla von n.

Um diese Folgerung mit der Erfahrung im Widerspruch, die Annahme somit als widerlegt und die Eindeutigkeit gesichert zu finden, genügt es, als Erfahrungssatz zu postulieren:

Es gibt nicht zwei Lichter, die bei gleichmäßiger Erhöhung der Intensität *in periodischem Wechsel* gleich und wieder ungleich werden.

§ 4. Die Dimensionstatsache.

Zum Aufbau der affinen Geometrie der Farbenmannigfaltigkeit fehlt uns jetzt nur noch *ein* Stück, die Dimensionstatsache, die wir oben nur beiläufig erwähnt haben, ohne bisher ihre Wurzel in der Erfahrung aufzuzeigen und ohne von der Tatsache selbst bisher Gebrauch zu machen. Wir setzen sie mit Absicht an die letzte Stelle, weil alle bisher benützten Erfahrungstatsachen, daher auch alle bisher abgeleiteten Folgerungen nicht bloß für einen normalen, farbentüchtigen Beobachter, sondern ganz ebenso für einen partiell und für einen total Farbenblinden Gültigkeit haben. Der Unterschied liegt nur in der Dimension der Farbenmannigfaltigkeit.

Wenn eine Anzahl Farben (n) gegeben sind

$$A,\ B,\ C\ \ldots$$

so kann es sein, daß zwischen diesen eine lineare Beziehung besteht

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \ldots = 0, \tag{1}$$

(wobei selbstverständlich immer vorausgesetzt wird, daß nicht alle die Größen $\alpha, \beta, \gamma \ldots = 0$ sind). Das Bestehen einer solchen Beziehung bedeutet, daß sich aus gewissen Multiplis des einen Teils der n-Farben (derjenigen, die in der Gleichung positive Koeffizienten haben) eine Farbe ermischen läßt, die auch aus gewissen Multiplis der übrigen (derjenigen mit negativen Koeffizienten) ermischbar ist.

Es kann aber auch sein, daß keine solche Beziehung besteht. Im ersten Fall nennen wir die n-Farben linear abhängig, im zweiten linear unabhängig.

Die Dimensionstatsache lautet nun

A. Für Farbentüchtige (Trichromaten):

Es gibt linear unabhängige Farbentripel. Vier Farben sind stets linear abhängig.

B. Für partiell Farbenblinde (Dichromaten):

Es gibt linear unabhängige Farbenpaare. Drei Farben sind stets linear abhängig.

C. Für total Farbenblinde (Monochromaten):

Je zwei Farben sind linear abhängig.

Diese Aussagen bedeuten nichts anderes, als daß die Farbenmannigfaltigkeit für diese Personen drei bzw. zwei bzw. eine Dimension hat. In der Tat, betrachten wir den kompliziertesten Fall des Trichromaten. Fassen wir ein solches linear unabhängiges Farbentripel ins Auge

$$A, B, C,$$

von denen also nach Annahme keine aus den beiden anderen mischbar sein soll; sei F eine beliebige Farbe, so gibt es eine Farbengleichung

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \zeta F = 0, \tag{2}$$

worin sicher $\zeta \neq 0$, weil A, B, C sonst nicht unabhängig wären. Man kann also noch F auflösen:

$$F = x_1 A + x_2 B + x_3 C. \tag{3}$$

$$x_1 = -\frac{\alpha}{\zeta}, \quad x_2 = -\frac{\beta}{\zeta}, \quad x_3 = -\frac{\gamma}{\zeta}.$$

Zu jedem F gehört *ein* und *nur* ein Wertetripel (x_1, x_2, x_3), *nur* eines, weil sonst durch Subtraktion eine Relation zwischen A, B, C allein entstünde. Das Umgekehrte gilt zwar nicht allgemein, aber jedenfalls gehört zu allen *positiven* Tripeln (x_1, x_2, x_3) eine und nur eine Farbe F. Die Farben F bilden also eine Mannigfaltigkeit von nicht mehr und nicht weniger als drei Dimensionen.

Die Form, in der wir die Dimensionstatsache eingeführt haben, ist zwar theoretisch die einfachste, aber es geht nicht an, sie in dieser Form als ein unmittelbares Produkt der Erfahrung hinzustellen. Denn man kann nie sicher sein, ob man wirklich alle Farbenquadrupel durchprobiert hat, und ob sich unter ihnen nicht doch vielleicht noch ein linear unabhängiges vorfindet.

Grassmann verwendet an Stelle unseres Dimensionssatzes (für Trichromaten) den Satz:

Zu jedem Licht läßt sich ein gleichaussehendes herstellen durch Mischung von Weiß mit einer reinen Spektralfarbe oder mit einem bestimmten Purpurgemisch (d. i. einer Mischung der Endfarben des Spektrums). [1. Satz von Grassmann.]

Da die Reihe der Spektralfarben und der Purpurgemische, einschließlich der Intensitätsvariation eine *zweidimensionale*, die verschiedenen Intensitäten des Weiß eine *eindimensionale* Mannigfaltigkeit bilden, so ergibt sich durch Kombination in der Tat eine *dreidimensionale* Mannigfaltigkeit.

Aber auch diese Grassmannsche Form beansprucht meines Erachtens noch eine zu breite induktive Basis, breiter als nötig, um die Dimensionstatsache zu sichern. Denn es sieht so aus, als müßte man wirklich alle Lichter durchprobiert haben, um sicher zu sein, daß es nicht doch Gemische gibt, die auf die genannte Art nicht darstellbar sind.

Dagegen läßt sich der Beweis für die Dreidimensionalität auf folgende Weise systematisch erbringen. Man mustert zunächst die *Reihe der Spektralfarben* und erkennt, daß im allgemeinen (nämlich abgesehen von den monochromatischen „Endstrecken", wovon später) je zwei von ihnen sich durch mehr als bloß durch die Intensität unterscheiden. Der Versuch, zwei von ihnen durch Änderung der objektiven Intensität gleichzumachen, mißlingt. *Paare von Spektralfarben sind i. a. linear unabhängig.*

Nun betrachtet man die *binären Mischungen von Spektralfarben* und findet, daß man da im allgemeinen (wenn die gemischten Wellenlängen nicht auf einer der dichromatischen „Zwischenstrecken" liegen, wovon später) *Neues* erhält, und zwar die weißlichen Abwandlungen der reinen Farben und die Purpurtöne in allen ihren weißlichen Abwandlungen. Sie können nicht einer einzelnen Spektralfarbe durch bloße objektive Intensitätsänderung gleichgemacht werden. *Tripel von Spektralfarben sind i. a. linear unabhängig.*

Die Mannigfaltigkeit ist also sicher *mindestens* von der Dimensionszahl *drei*.

Daß sie *höchstens* von der Dimensionszahl *vier* ist, erkennt man, wenn man jetzt die *ternären Mischungen von Spektralfarben* untersucht und findet, daß sie *nichts Neues* mehr liefern, sondern jede von ihnen ein binäres Aquivalent besitzt. Für Mischungen von vier und mehr Spektralfarben braucht man nicht mehr experimentell zu prüfen, man kann immer drei von ihnen durch zwei ersetzen, bis schließlich ein binäres Äquivalent übrig bleibt. Da nun aber jedes Licht mit genügender Annäherung als Mischung von n reinen Spektrallichtern angesehen werden kann, so folgt:

Die reinen Spektralfarben und die binären Gemische erschöpfen die Mannigfaltigkeit der Farben vollständig.

Nun ist aber die Mannigfaltigkeit der binären Gemische von der Dimensionszahl 4, und dasselbe würde von der Mannigfaltigkeit der Farben gelten, wenn nicht jede von ihnen auf ∞^1 Arten als Mischung aus zwei Spektralfarben entstände, wie z. B. das Weiß als Mischung von ∞^1-Komplementärfarbenpaaren. Um zwischen den Zahlen 3 und 4 zu dirimieren, kann man *jetzt*, nachdem die zu untersuchende Menge nicht mehr „alle Lichter", sondern die binären Gemische sind, auf den Grassmannschen Gedanken zurückgreifen und zeigen, daß sie den weißverdünnten Spektralfarben und Purpurgemischen gleich sind, womit die Dimensionszahl 3 dann endgültig sichergestellt ist.

Ähnlich, nur weit einfacher, ist das Verfahren für Dichromaten und Monochromaten. Für erstere führen schon die binären Mischungen auf nichts Neues. Die Spektralfarben, von denen i. a. je zwei noch linear unabhängig (farbverschieden) sind, erschöpfen die Mannigfaltigkeit aller Farben, die Dimensionszahl ist also zwei. Beim Monochromaten lassen sich schon je

zwei Spektralfarben, daher auch beliebige Mischungen, durch bloße Intensitätsänderung gleichmachen. Es gibt nicht einmal linear unabhängige Farben*paare*, die Dimensionszahl ist 1.

§ 5. Die Abbildung auf ein Vektorbüschel.

Damit sind die *allgemeinen* Gesetze der Lichtmischung oder, wie wir es genannt haben, der niederen Farbenmetrik, erledigt, soweit nur jede der drei Arten von Farbsystemen, die wir unterschieden haben, für sich allein in Betracht gezogen wird. Eine wichtige Ergänzung von ebenfalls sehr allgemeiner Art, wird allerdings die Beziehung zwischen den dichromatischen und den trichromatischen Farbensystemen bilden, von der weiter unten die Rede sein wird.

Alles bisher Gesagte läßt sich kurz dahin zusammenfassen: daß es sich bei den Farben um eine Mannigfaltigkeit von Dingen handelt, für welche die Gleichheit, die Addition, dann unter Einschränkungen die Subtraktion, ferner die Multiplikation mit einer nichtnegativen Zahl in eindeutiger Weise definiert sind; daß für diese Operationen die assoziativen, kommutativen usw. Gesetze in der gewöhnlichen Weise gelten; daß die Mannigfaltigkeit (im normalen Fall, den wir zunächst immer im Auge haben) von der Dimensionszahl drei ist; welches alles einzig durch das unmittelbar abgegebene Gleichheitsurteil über angrenzende Farbfelder mit der Erfahrung zusammenhängt und darin verankert ist.

Vergleicht man nun diese von den *Farben erfahrungsgemäß* geltenden Gesetze mit den *Axiomen*, die man aufstellen muß für die von einem Punkt aus gezogenen *Vektoren*, um die *affine Geometrie* eines solchen *Vektorbüschels* zu begründen[1]): so findet man völlige Übereinstimmung. Die Mannigfaltigkeit der Farben oder der *Farbenraum*, wie wir sagen wollen, ist also ein dreidimensionales Gebilde mit — vom Standpunkte der Gleichheitsbeziehung — lediglich *affiner Struktur*. Alle speziellen Beziehungen in dem minder anschaulichen Farbengebiet kann man sich *dadurch* in ausgezeichneter Weise anschaulich machen, daß man es auf ein räumliches Vektorbüschel in ein-eindeutiger Weise abgebildet denkt, derart, daß jeder

1) Vgl. etwa H. Weyl, Raum-Zeit-Materie. Berlin, Springer, 1918. S. 15.

Farbe *ein* Vektor und jedem Vektor sicherlich nicht mehr als *eine* Farbe entspricht. Nur darf man dabei nicht vergessen — was schon Grassmann hervorhebt —, daß die abgebildeten Gebiete sich nur durch ihre unmittelbare Anschaulichkeit, nicht durch primitive Realität unterscheiden; daß dem Farbenraum sein Dasein wie seine affine Struktur auf Grund des Gleichheitsurteils sozusagen an und für sich zukommt, ganz ohne Beziehung auf den Vektoren- bzw. Punktraum, der zu seiner Veranschaulichung dient. Es birgt sogar diese Veranschaulichung, so bequem, ja unentbehrlich sie ist, auf der anderen Seite auch eine gewisse Gefahr; wir müssen uns sehr in acht nehmen, daß wir von dem Punktraum, den wir als einen nicht bloß affinen, sondern als einen metrischen, und zwar euklidischen zu denken so sehr gewohnt sind, ausschließlich die affinen Beziehungen auf den Farbenraum übertragen, nicht auch die metrischen, welch letztere hier völlig bedeutungslos sind, da der Farbenraum seine eigene, im zweiten Teil dieser Arbeit zu entwickelnde Metrik besitzt.

Es ist vielleicht nicht überflüssig zu erinnern: unter den affinen Eigenschaften räumlicher Gebilde versteht man alle jene, die ungeändert bleiben bei einer affinen Transformation. Gebilde, die durch eine solche Transformation ineinander übergeführt werden können, spielen in der affinen Geometrie dieselbe Rolle, wie kongruente Gebilde in der euklidischen Geometrie. Die allgemeine affine Gruppe tritt an die Stelle der Gruppe der Bewegungen. In gewöhnlichen rechtwinkligen, übrigens auch in beliebigen schiefwinkeligen Koordinaten, drückt sich die allgemeinste affine Transformation aus als ganze lineare (nichthomogene) Koordinatentransformation; dadurch werden also jedem Punkt neue Koordinaten in dem ursprünglichen, festgehaltenen Koordinatensystem zugewiesen, wodurch er verschoben wird. Statt dessen kann man auch so vorgehen, daß man die Koordinaten jedes Punktes zahlenmäßig festhält, aber als Koordinaten in einem neuen, und zwar in einem beliebigen, beliebig gelegenen, schiefwinkeligen System auffaßt; wodurch ebenfalls die allgemeinste affine Transformation zustande kommt. Von Vektoren, statt von Punkten, gesprochen kann man sagen: man faßt die alten Vektorkomponenten als Komponenten bezogen auf ein beliebig abgeändertes System von Grundvektoren auf.

In dieser allgemeinsten Form enthält die affine Transformation außer ihrem eigentlichen Kern — einer Deformation — noch eine gewöhnliche Bewegung (Translation + Drehung), von welcher jedenfalls die Translation (Verlegung des Koordinatenursprunges) für unsere Zwecke völlig bedeutungslos ist, da wir es nur mit dem Büschel der Vektoren zu tun haben, die von einem Punkt entspringen, und dieser Punkt von vornherein im Raum unbestimmt ist. Die Koordinatentransformation kann demnach in allen Fällen homogen genommen werden. Was übrig bleibt ist dann, außer einer Drehung, eine sogenannte lineare Deformation, d. i. drei gleichförmige Verzerrungen (Maßstabänderungen) in drei zueinander senkrechten Richtungen (natürlich, auch bei Benützung rechtwinkliger Koordinaten, im allgemeinen *nicht* den Koordinatenrichtungen). *Nur solche Eigenschaften der Figuren, die bei einer derartigen Verzerrung unberührt bleiben sind affin und haben Bedeutung für den Farbenraum.* Am wichtigsten für uns ist, daß dabei Gerade in Gerade, Ebenen in Ebenen übergeführt werden — wie denn überhaupt, wegen der Linearität, die Ordnungszahl einer Fläche oder Kurve ungeändert bleibt. Kollinearität und Komplanarität von Punkten, ferner Komplanarität von Geraden bleibt also unberührt. Daher kann auch eine Kurve durch die Transformation keinen Wendepunkt bekommen und — was uns besonders interessieren wird — ein Kegel keine Wendegeneratrix. — Zum späteren Gebrauch (für die Theorie der Dichromasie im § 10) merken wir noch an, daß auch der *Parallelismus* von Geraden und Ebenen eine affin-invariante Eigenschaft ist. — Übrigens ist der ganze Sachverhalt dem Physiker aus den Elementen der Elastizitätstheorie und Hydrodynamik wohlbekannt und vertraut, wenn es sich auch dort um unendlich kleine, hier dagegen um ganz beliebige endliche Deformationen handelt.

In *einem* Punkt, den wir bisher unbeachtet gelassen haben, weichen nun allerdings die Gesetze der Farbenmischung ab von den Axionen der affinen Geometrie: es ist dies die beschränkte Ausführbarkeit der Subtraktion und die damit zusammenhängende Bedeutungslosigkeit der negativen Farbe ($-A$), sowie überhaupt der Multiplikation mit negativen Zahlen. Die Abbildung des Farbenraumes auf das Vektorbüschel läßt sich dem ungeachtet vollständig durchführen. Nur läßt sich

schließen, daß von der ganzen Vektorgesamtheit dabei höchstens die Hälfte der Vektoren Verwendung findet, d. h. wirklich einer Farbe entspricht (in Wahrheit noch weniger als die Hälfte, wie wir sehen werden). Denn von jedem Vektor, der einer Farbe entspricht, bleibt der entgegengesetzte jedenfalls unbenützt, weil es keine zwei Lichter, daher auch keine zwei Farben gibt, die superponiert Dunkelheit ergeben. Also nicht das ganze Büschel vom Öffnungswinkel 4π entspricht den Farben, sondern ein irgendwie begrenzter Kegel von einer Gesamtöffnung kleiner als 2π (der genaue Wert des Öffnungswinkels hat übrigens keine affingeometrische Bedeutung). Eben daraus erklärt sich nun aber auch die nicht allgemeine Ausführbarkeit der Subtraktion. Sobald nämlich die Vektordifferenz der darstellenden Vektoren, die sich geometrisch natürlich immer bilden läßt, auf einen Vektor führt, der nicht dem reellen Farbenkegel angehört, existiert keine Farbe, die der Forderung genügt.

Mit der Feststellung dieses allgemeinen Sachverhaltes — der Farbenraum hat vom Standpunkte des Gleichheitsurteils die Struktur eines lediglich affin betrachteten Vektorenkegels vom Öffnungswinkel kleiner als 2π — mit der Feststellung dieses Sachverhaltes ist der grundlegende und meines Erachtens wichtigste Teil der niederen Farbenmetrik vollendet. Wie man sieht, brauchte in diesem Teil von so schwierigen Begriffen wie Definition des Weiß, Sättigung, Weißgehalt, färbende Kraft, Komplementärfarben u. ä. gar nicht die Rede zu sein. Was noch hinzuzufügen ist, besteht eigentlich nur in der Aufsuchung der Farbvektoren, die gewissen durch ihre einfache Zusammensetzung ausgezeichneten Lichtern entsprechen (d. i. insbesondere den Spektrallichtern), und in der Feststellung ihrer affingeometrischen Beziehungen zueinander. Dabei ergibt sich mit einem Schlag die Art der Begrenzung des Spektralkegels, wie sie affingeometrisch beschaffen ist und von welchen Farben sie gebildet wird. Hierzu werden wir uns einer Koordinatendarstellung der Farben bedienen, die völlig der Koordinatendarstellung von Vektoren entspricht; so einfach und durchsichtig sich wegen dieser völligen Analogie alle Rechnungen gestalten, so wird die Auseinandersetzung der farbentheoretischen Bedeutung aller Operationen, insbesondere der Koordinatentransformation, doch einigen Raum bean-

sprechen. Sodann wird uns die durch einen einzigen inhaltsreichen Erfahrungssatz — Anerkennung aller trichromatischen Farbengleichungen, durch den Dichromaten — gesetzte Beziehung zwischen dichromatischen und trichromatischen Systemen beschäftigen, die zur Auszeichnung gewisser (irreeller) Farbvektoren als den Grundempfindungen entsprechend führt. Endlich werden wir noch, wegen ihrer weiten Verbreitung, die praktisch einfachere, theoretisch aber etwas kompliziertere Darstellung der Farben in der *Farbenebene* aus unserer räumlichen Darstellung ableiten, um dann im zweiten Teil zur höheren Farbenmetrik überzugehen.

(Eingegangen im März 1920.)

2. *Grundlinien einer Theorie der Farbenmetrik im Tagessehen;*
von Erwin Schrödinger.

(II. Mitteilung.)

§ 6. Der Spektralkegel. Begrenzung des realen Farbenraumes und Orientierung in ihm.

Die Abbildung der Farben auf den Vektorkegel und die Aufsuchung des Vektors, der einer konkret vorgegebenen Farbe entspricht, gestaltet sich, so schwierig die saubere experimentelle Durchführung ist, theoretisch äußerst einfach. Man wählt drei konkret vorgegebene Farben — als Eichfarben — aus, zwischen denen keine lineare Beziehung besteht, d. h. von denen keine aus den beiden anderen mischbar ist. Diese darf man drei beliebigen nichtkomplanaren Vektoren des Büschels zuordnen, entsprechend den neun willkürlichen Koeffizienten, die bei der allgemeinsten (homogenen) affinen Transformation verfügbar sind. (Ein beliebiges nichtkomplanares Vektortripel ist mit jedem anderen „kongruent" im Sinne der affinen Geometrie.) Ist nun eine vierte Farbe konkret gegeben, so stellt man durch Mischen experimentell die lineare Gleichung her, die zwischen den vier Farben jedenfalls besteht. Sind A, B, C die Eichfarben, F die vierte Farbe, so hat man wie oben Gleichung (3)

$$F = x_1 A + x_2 B + x_3 C. \tag{3}$$

Die Vorzeichen der x_i, die wir als Farbkoordinaten (auch Eichwerte) von F, bezogen auf $A\,B\,C$ als Eichfarben, bezeichnen, können verschieden verteilt, *eines* davon muß jedenfalls positiv sein, weil links eine wirkliche Farbe steht. Entweder wird eine der 4 Farben aus den drei übrigen mischbar sein oder ein gehörig dosiertes Gemisch von zweien ist einem gehörig dosierten Gemisch der beiden anderen gleich. Jedenfalls läßt sich aus obiger Gleichung der zu F gehörige Vektor konstruieren und die x_i sind einfach seine affingeometrischen Komponenten be-

zogen auf A, B, C als Grundvektoren.[1]) Konstruiert man auf diese Weise die Mannigfaltigkeit von Vektoren, welche den homogenen Lichtern eines konkret vorgegebenen Spektrums entspricht, so bilden sie einen gewissen Kegel, den Spektralkegel, auf dessen Mantel die Vektorspitzen eine gewisse Kurve einzeichnen. Nicht die Lage des Kegelmantels, wohl aber die besondere Führung dieser Kurve ist abhängig von der speziellen Energieverteilung des vorliegenden Spektrums, indem die Kurve durch Erhöhung der Energie an einer Stelle des Spektrums vom Ursprung weiter hinausgerückt, durch Verminderung näher an den Ursprung herangezogen wird. Uns interessiert vor allem die völlig unveränderliche (natürlich im affingeometrischen Sinn) Gestalt des Kegel*mantels*. Seine wichtigste Eigenschaft ist diese. Zwar besitzt der Mantel zwei *ebene* Zwickel. Es sind das die von König sogenannten Zwischenstrecken von $\lambda = 680$ bis $\lambda = 655$ und von $\lambda = 490$ bis $\lambda = 475$, die Zwickel ROG und VOI der Fig. 8. (In der Figur ist auch noch zur besseren Verdeutlichung der Schnitt des Spektralkegels mit einer willkürlich gelegten Ebene gezeichnet.)

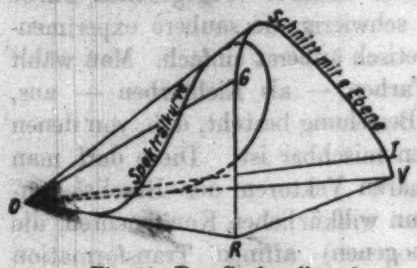


Fig. 8. Der Spektralkegel.

Auf jeder dieser Zwischenstrecken — sie umfassen die Abstufungen des *Orange* und des *Indigo* — ist aus zwei Spektralfarben jede zwischen ihnen liegende Spektralfarbe mischbar. *Im übrigen aber kommt es nicht vor, daß drei erzeugende des Kegels in einer Ebene liegen.* Der Kegel hat keine Wendegeneratrix, sondern ist einsinnig gerollt, und zwar nicht so stark gerollt (man denke an das Herstellen einer Düte), daß ein komplanares Generatricentripel auf andere Weise sich einstellen würde.

1) Als Vektorkomponenten bezeichnet man zuweilen noch etwas anderes, nämlich die *Orthogonalprojektionen* auf die Koordinatenrichtungen. Komponenten dieser Art kommen hier nicht in Betracht, weil das Senkrechtstehen ohne Bedeutung ist. In der metrischen Geometrie stehen die beiden Komponentenarten bekanntlich im Verhältnis kovariant-kontravariant. Sie fallen numerisch zusammen, wenn die Grundvektoren paarweise orthogonal und gleich lang sind.

Die ebenen Zwickel bilden *die Ränder* des Mantels. Dennoch, wenn man das Spektrum gegen ein Ende hin durchwandert, so nimmt der Farbvektor die Randlage ein, *noch bevor* das Ende des sichtbaren Spektrums erreicht ist. Von da an zieht er sich, ohne seine Richtung zu ändern, in sich selbst zurück. Das bedeutet, daß in diesen *Endstrecken* (König) jede Farbe aus jeder anderen durch bloße Änderung der objektiven Intensität herstellbar oder, wie wir oben sagten, von *gleicher Reizart* (v. Kries) ist. Wegen dieser Mischbarkeit aus *einer* bzw. aus *zwei* Farben heißen die End- bzw. Zwischenstrecken auch mono- bzw. dichromatisch. Zwischen ihnen liegt die *Mittelstrecke*, auf welcher der Spektralkegel durchwegs konvex gekrümmt ist. Ich gebe noch einen Überblick über die Lage dieser fünf Spektralteile, deren Abgrenzungen gegeneinander aber naturgemäß nicht scharf bestimmbar, wohl auch von

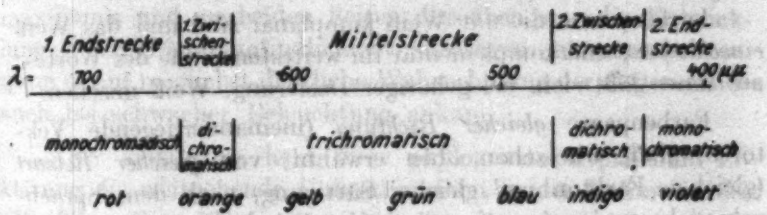


Fig. 4.

Auge zu Auge ein wenig wechselnd sind. Mischt man zwei Farben von den beiden Endstrecken miteinander in wechselndem Verhältnis, so erhält man alle möglichen Purpurtöne, und zwar die gesättigtesten, die sich herstellen lassen. Die Farbvektoren erfüllen den ebenen Zwickel ROV, der den Spektralkegel zu einer geschlossenen Düte ergänzt. Da nun jede beliebige Farbe sich durch irgendein Licht muß darstellen lassen, das irgendwie aus Spektrallichtern gemischt ist, ja sogar, wie wir wissen, durch eine Mischung von nicht mehr als zwei Spektrallichtern, so folgt, daß *nur die Vektoren im Inneren jener Düte — diese aber auch alle — reelle Farbvektoren sind.* Auch die drei Eichfarben, von denen wir ausgingen, müssen im Innern oder auf dem Rande der Düte liegen. —

Von der ungefähren Verteilung der Farben im Inneren machen wir uns ein anschauliches Bild durch die Überlegung, daß irgendwo im Innern die Vektorrichtung liegen muß, welche dem *Weiß* —

etwa Sonnenlicht — entspricht. Das Ebenenbüschel durch diese Richtung zerfällt die Gesamtheit der Farben in Gruppen, derart, daß Farben, die auf derselben *Halbebene* des Büschels liegen, aus derselben Spektralfarbe (oder demselben gesättigten Purpurton) durch „Verdünnung mit Weiß" hervorgehen. Sie bilden — nach dem allgemeinen Sprachgebrauch — ungesättigtere Abwandlungen dieser Spektralfarbe (dieses Purpurs), und zwar *um so* ungesättigter, d. h. weißlicher, *je näher* sie dem Weiß liegen. Dabei ist scharf zu betonen, daß dieses „um so — je" nur eine Bedeutung hat für *denselben* Farbton, d. h. in *derselben* Halbebene. Die Winkel, die zwei mit Weiß *nicht* komplanare Vektoren mit der Weißrichtung bilden, liefern kein Maß für die relative Sättigung der beiden Farben; ein solches existiert auf unserem gegenwärtigen Standpunkt überhaupt nicht, weil diese Winkel durch affine Transformation völlig verzerrt, ihr Verhältnis umgekehrt werden kann.

Farbenpaare, die mit Weiß komplanar sind und das Weiß *einschließen*, sind komplementär im weitesten Sinne des Wortes: aus ihnen läßt sich, bei gehöriger Dosierung, Weiß mischen.

Farbenpaare *gleicher Richtung* (ineinanderliegende Vektoren) sind, wie schon oben erwähnt, von *gleicher Reizart* (gleichem Farbton *und* gleicher Sättigung, nach dem Sprachgebrauch); und zwar entsprechen natürlich den lichtschwächeren Farben die kürzeren Vektoren. Auch hier gilt aber eine ähnliche Bemerkung, wie oben bezüglich der Sättigung gemacht: aus dem Längenverhältnis von Vektoren *verschiedener* Richtung läßt sich durchaus kein Schluß auf das Lichtstärkenverhältnis ziehen. Solche Vektoren haben vom affingeometrischen Standpunkt, folglich auch vom Standpunkte der niederen Metrik als völlig inkommensurabel zu gelten; das Lichtstärkenverhältnis von Farben *verschiedener Reizart* entzieht sich bis jetzt völlig unserer Beurteilung.

Es ist wichtig, darauf zu achten, daß der so — durch Hervorhebung der Weißrichtung — gewonnenen Orientierung im Farbenraum etwas Willkürliches anhaftet. Das Weiß, als Farbe des Sonnenlichtes, ist weder durch die etwa besonders einfache Zusammensetzung dieses Lichtes, noch etwa durch irgendwie hervorstechende Lage des zugeordneten Vektors, sondern einzig und allein psychologisch ausgezeichnet durch die besondere Einfachheit des Eindrucks oder besser gesagt

durch das Aufhören des Urteils über den Farbton ohne Aufhören der Gesichtsempfindung. Daß diese psychologische Sonderstellung einem physikalisch in keiner Weise ausgezeichneten Lichtgemisch — schwarzer Strahlung von etwa 7000° C — zukommt, erklärt sich ungezwungen aus der Stammesgeschichte bzw. aus der Entwicklungsgeschichte des Sinnesorganes. Denn fast ausschließlich unter der Einwirkung *dieses* Lichtgemisches ist unser Auge entstanden, hat es sich entwickelt und seine gegenwärtige Funktionsform angenommen. Daß dieses Lichtgemisch für die so entstandene Farbwahrnehmung eine ausgezeichnete, zwischen den möglichen Extremen vermittelnde Rolle spielt, ist nicht verwunderlich; ist doch, nebenbei bemerkt, auch für die merkwürdige Koinzidenz des *Energie*maximums der Sonne mit dem *Helligkeits*maximum in einem Spektrum von konstanter Energie die einzige ungezwungene Erklärung die phylogenetische; an der Stelle des Energiemaximums und zu beiden Seiten desselben war die Entwicklung hoher Lichtempfindlichkeit sozusagen am rentabelsten, wenn es auf möglichst deutliche Wahrnehmung der Gegenstände auch bei schwacher Beleuchtung ankam.

Aber keineswegs hebt diese phylogenetisch plausible Erklärung die weitgehende Unbestimmtheit in der Definition des „Weiß". Diese Unbestimmtheit ist doppelter Art; erstens eine physikalische, da die Zusammensetzung des Sonnenlichtes keine scharf bestimmte ist, sondern mit Tages- und Jahreszeit wechselt; zweitens eine physiologische, da die Farbe — i. e. gleichaussehende Lichtergruppe —, der wir den Farbton absprechen, mit der *Stimmung* des Auges sehr bedeutend variiert. Auch das heute fertig vorliegende Auge ist geneigt, nach nur minutenlanger Gewöhnung an eine andere als Sonnenbeleuchtung sein Urteil der Beleuchtung anzupassen und entweder dieses vorherrschende Licht selbst oder ein ihm näher gelegenes als farbtonfrei anzuerkennen, dafür aber dem Sonnenlicht, wenn es in dieser Umgebung vereinzelt auftritt, einen dazu komplementären Farbnamen zu geben. Damit soll nichts darüber gesagt werden, ob das was jeweilig als „Weiß" bezeichnet wird, *psychologisch* immer dasselbe ist oder nicht (ich halte dafür, *daß* es dasselbe ist). Nach unserer metrischen Definition der Farbe ist es *eine andere Farb.* (vgl. oben § 1), und darauf kommt es für uns an, weil unser Farbbegriff der

einzige metrisch faßbare, der psychologische dagegen an und für sich schwankend und metrisch nicht erfaßbar ist.

Aus alledem geht hervor, daß die Orientierung im Farbenraum an der Hand der Weißrichtung keine sehr prinzipielle Sache ist, sondern nur eine Vorstellungshilfe. Wir können sie zu einer völlig scharfen machen durch exakte physikalische Festlegung des Lichtgemisches, das als Weiß bezeichnet werden soll; aber darin liegt Willkür, wir können rein formal auch einem ganz beliebigen, ganz und gar nicht weißen Gemisch diese Rolle des Wegweisers übertragen.[1]) Freilich werden dann Bezeichnungen wie „ungesättigtere Abwandlung desselben Farbtons" für Mischungen mit diesem Standardlicht völlig haltlos; aber das werden sie für ein geeignet umgestimmtes Auge auch wenn wir Sonnenweiß als Standard wählen.

Viele Beobachter geben an, daß ganz abgesehen von der Stimmung des Auges eine Farbe ihren Farbton auch dann ändert, wenn man sie mit demjenigen Weiß vermischt, das bei der eben herrschenden Stimmung wirklich tonfrei erscheint[2]); ja selbst dann, wenn man ihre Zusammensetzung gar nicht ändert, sondern nur ihre objektive Intensität herabsetzt.[3]) Die Bezeichnung „gleicher Farbton" paßt dann nicht einmal auf das, was wir, nur um einen kurzen Ausdruck für den rein objektiven Sachverhalt zu haben, als Farben gleicher Reizart bezeichnet haben. Ich will hier nur hervorheben, daß auch diese merkwürdige Tatsache unsere Überlegungen in keiner Weise stört. Vom Standpunkte der niederen Metrik, die nur auf dem absoluten Gleichheitsurteil aufgebaut ist, ist jedes darüber hinausgehende Farburteil, besonders: „gleichhell", „gleich im Farbton" oder dergleichen etwas Akzessorisches, worum sie sich nicht zu kümmern hat, wofür sie inkompetent ist und wovon sie höchstens zur beiläufigen raschen und bequemen Bezeichnung, aber niemals zur exakten Begriffsbestimmung Gebrauch machen darf.

---

1) Vgl. von Kries, in W. Nagels Handbuch der Physiologie des Menschen, Bd. III 1, S. 116 (Braunschweig, F. Viehweg, 1904).

2) Vgl. die dritte der obzitierten Abhandlungen von Helmholtz, dann W. Abney, Proc. Roy. Soc. A. 83. S. 120. 1910. Die dort experimentell hergestellten „Farbtongleichungen" Abneys gehören durchaus der höheren Farbenmetrik an.

3) Vgl. besonders F. Exner, Wiener Ber. IIa 111. S. 85 1902.

In den letzten Paragraphen des II. Teils werden wir auf diese Erscheinungen zurückzukommen haben.

§ 7. Theoretische Koordinatenbestimmung.

Die Aufgabe, zu einer beliebigen Farbe die Koordinaten bzgl. dreier Eichfarben zu finden, dachten wir uns oben, im Anfang des § 6, experimentell gelöst durch wirkliche Herstellung der betreffenden Farbengleichung. Dazu muß die Farbe natürlich in concreto gegeben sein, und zwar in einer Form, die das Experimentieren mit ihr zuläßt; dagegen braucht die spektrale Zusammensetzung des betreffenden Lichtes — seine Wellenlängenfunktion $f(\lambda)$ — nicht bekannt zu sein. Wir betrachten jetzt den umgekehrten Fall, daß ein Licht nur zahlenmäßig durch seine Wellenlängenfunktion gegeben und die Aufgabe gestellt ist, den zugeordneten Farbvektor rein rechnerisch aufzufinden.

Die Aufgabe ist lösbar, sobald ein Spektrum *von bekannter Energieverteilung* experimentell „durchgeeicht", d. h. die Koordinaten der kontinuierlichen Folge reiner Lichter dieses

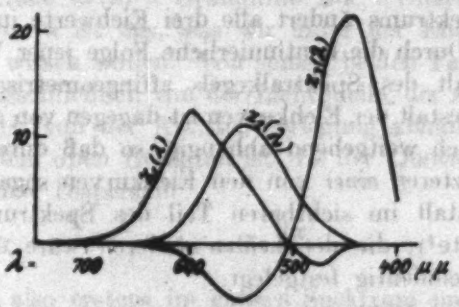


Fig. 5.

Spektrums experimentell durch wirkliche Herstellung der Farbengleichungen als drei kontinuierliche Funktionen der Wellenlänge aufgefunden sind. Man nennt das die Eichfunktionen oder, in graphischer Darstellung, die Aichkurven für dieses Spektrum, natürlich bezogen auf drei vorab gewählte Eichfarben. Fig. 5 zeigt die Eichkurven vom Interferenzspektrum des Sonnenlichtes[1]) bezogen auf drei Spektralfarben,

1) Umgerechnet aus den „Elementarempfindungskurven" (s. u.) Dieterici's nach A. König und C. Dieterici, Zeitschr. f. Psychol. u. Physiol. d. Sinnesorgane 4. S. 241ff. 1892.

deren erste mit dem Rot der Endstrecke, die zweite mit dem Grün $\lambda = 505\,\mu\mu$, die dritte mit dem Violett der Endstrecke *der Reizart nach* übereinstimmt. Die *Intensitäten* der Eichlichter sind jedoch nicht so gewählt, wie sie an drei irgendwie bestimmten Stellen des Spektrums unmittelbar sich darbieten; sondern zunächst ihre *Verhältnisse* so, daß die drei Eichfarben gemischt Weiß, d. h. eine Farbe von der Reizart des Sonnenlichtes ergeben würden. Für die Eichkurven hat das, wie wir sogleich sehen werden, zur Folge, daß der zwischen einer von ihnen und der Abszissenachse eingeschlossene, algebraisch berechnete Flächeninhalt für alle drei der gleiche ist. Der Maßstab ist dann willkürlich so gewählt, daß dieser konstante Flächeninhalt gleich 1000 wird — welche Willkür die schwierige Angabe der *absoluten* Lichtstärke der Eichfarben ersetzt bzw. entbehrlich macht.

Unabhängig von der besonderen Art des durchgeeichten Spektrums ist an diesen Eichkurven das *Verhältnis je dreier Eichwert*, die zu derselben Abszisse (Wellenlänge) gehören; denn eine Vermehrung der Lichtstärke (Energie) an einer Stelle des Spektrums ändert alle drei Eichwerte in demselben Verhältnis. Durch die kontinuierliche Folge jener Verhältnisse ist die Gestalt des Spektralkegels affingeometrisch gegeben. Die genaue Gestalt der Eichkurven ist dagegen von der Energieverteilung noch weitgehend abhängig, so daß durch geeignete Wahl der letzteren *einer* von den Eichkurven sogar eine ganz beliebige Gestalt im sichtbaren Teil des Spektrums gegeben werden könnte[1]); die der beiden anderen wäre damit allerdings schon eindeutig festgelegt.

Zu einiger Unklarheit kann bei diesen und ähnlichen Überlegungen der Begriff der Energieverteilung des vorgelegten Spektrums führen. Man hat darunter keineswegs etwa die Wellenfunktion $\Phi(\lambda)$ — im oben definierten Sinn — der Lichtquelle zu verstehen, die zur Erzeugung des Spektrums dient. Die Energieverteilung hängt nicht nur von dieser, sondern auch von der Art der spektralen Zerlegung ab.

Betrachten wir einen Raumpunkt im Spektrum, so wird er von dem Licht eines kleinen Wellenlängen*bereiches*, λ bis

1) Nur an dem *Vorzeichen* des Eichwertes läßt sich nichts ändern!

$\lambda + \Delta\lambda$, getroffen. Wie groß dieser Bereich ist, hängt von der Stärke der Dispersion $dx/d\lambda$ (wo x eine Raumkoordinate entlang dem Spektrum) und von der Breite des Spalt*bildes* ab. Die Wellenlängenfunktion *des Spektrallichtes*, $\varphi(\lambda)$, das in dem hervorgehobenen Raumpunkt herrscht, ist überall Null, außer zwischen λ und $\lambda + \Delta\lambda$; hier kann sie als konstant gelten, und stimmt bei geeigneter prismatischer Anordnung bis auf die Reflexionsverluste mit $\Phi(\lambda)$ der Lichtquelle überein. *Daß* hier $\varphi(\lambda)$ und $\Phi(\lambda)$ übereinstimmen, ist aber durchaus nicht so unmittelbar einleuchtend, wie in den meisten Darstellungen des Sachverhaltes stillschweigend angenommen wird, sondern ist eine Folge des *Sinussatzes der geometrischen Optik*, wonach bei jeder optischen Abbildung der räumliche Winkel eines (kleinen) beleuchtenden Strahlenkegels sich im umgekehrten Verhältnis der Flächenvergrößerung ändert, so daß das Produkt: Raumwinkelelement × Flächenelement konstant bleibt.

Das $\varphi(\lambda)$ eines Spektrallichtes ist also, was wir eine „Rechteckfunktion" nennen können. Für die Intensität wird es auf die *Fläche* dieses Rechteckes ankommen, also auf das Produkt: Höhe $\Phi(\lambda)$ × Grundlinie $\Delta\lambda$. Dieses Produkt als Funktion von λ ist das, was wir unter der Energieverteilung verstanden wissen wollen. Von seinen beiden Faktoren ist nur der erste ausschließlich von der Lichtquelle, der zweite dagegen ausschließlich von der Art der Zerlegung abhängig.

Nach dem oben Gesagten ist $\Delta\lambda$ der Quotient aus Spaltbildbreite und Dispersion

$$\Delta\lambda = b : \frac{dx}{d\lambda} . \tag{4}$$

$\Delta\lambda$ ist also erstens im ganzen Spektrum proportional der Spaltbreite und hängt von der Wellenlänge aus zwei Gründen ab: erstens weil die Vergrößerung etwas variiert, zweitens weil die Dispersion — im prismatischen Spektrum *stark* — variiert. Arbeitet man in der Nähe des Minimums der Ablenkung, so kann die Variation von b vernachlässigt werden; *die gegen Violett stark anwachsende Dispersion gibt dann ein richtiges Bild von der Entstellung, welche die Lichtfunktion $\Phi(\lambda)$ der Lichtquelle durch die Art der Zerlegung erleidet.*

Arbeitet man mit einem Gitter und entwirft das Spektrum zu beiden Seiten der Gitternormale, so liegen die Verhältnisse *theoretisch* am einfachsten, weil sowohl b als $dx/d\lambda$ annähernd

unabhängig von λ sind. Die Energieverteilung ist dann ein getreues Bild von $\Phi(\lambda)$, nämlich gleich $\Phi(\lambda)$ mal einem konstanten kleinen λ-Intervall. *Praktisch* sind allerdings gerade bei Gittern wegen des eigenartigen, völlig unübersehbaren Einflusses der *Furchenform* erhebliche, der Theorie schwer zugängliche Komplikationen zu fürchten. Demungeachtet halten wir uns berechtigt, im folgenden der Einfachheit halber die Rechnung stets nur für ein ideales Gitterspektrum anzusetzen; *wir werden also nach all diesen kritischen Zwischenbemerkungen für die Energieverteilung, d. h. für die Fläche unserer spektralen Rechteckfunktionen jetzt dennoch annehmen*

$$C \cdot \Phi(\lambda),$$

wo C eine kleine Konstante von der Dimension einer Länge, $\Phi(\lambda)$ die λ-Funktion der Lichtquelle bedeutet.

Wenden wir uns nun wieder der am Anfang dieses Paragraphen gestellten Aufgabe zu, zu einer gegebenen Wellenlängenfunktion, sagen wir $f(\lambda)$, den zugehörigen Farbvektor oder die drei Farbkoordinaten rechnerisch zu finden. Als bekannt setzen wir die drei Eichfunktionen $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda)$, $x_3(\lambda)$ voraus für ein Spektrum von der eben betrachteten Energieverteilung. Teilen wir das sichtbare Wellenlängengebiet in n gleiche Abschnitte, etwa von der kleinen Länge C, so können wir das Licht $f(\lambda)$ auffassen als eine Superposition von n-Spektrallichtern, welche aus den im Spektrum direkt vorliegenden je durch Multiplikation mit dem Quotienten $f(\lambda)/\Phi(\lambda)$ hervorgehen. Die Koordinaten eines solchen Spektrallichtes sind

$$\frac{f(\lambda)\,x_1(\lambda)}{\Phi(\lambda)}, \quad \frac{f(\lambda)\,x_2(\lambda)}{\Phi(\lambda)}, \quad \frac{f(\lambda)\,x_3(\lambda)}{\Phi(\lambda)},$$

daher die Koordinaten der Farbe von $f(\lambda)$

$$(5) \qquad \sum_1^n \frac{f x_1}{\Phi}, \quad \sum_1^n \frac{f x_2}{\Phi}, \quad \sum_1^n \frac{f x_3}{\Phi}.$$

Diese Summen dürfen wir mit hinreichender Genauigkeit durch bestimmte Integrale ersetzen. Wir finden also für die gesuchten Farbkoordinaten von $f(\lambda)$ die drei Zahlen:

$$(6) \qquad \frac{1}{C}\int \frac{f x_1}{\Phi}\,d\lambda, \quad \frac{1}{C}\int \frac{f x_2}{\Phi}\,d\lambda, \quad \frac{1}{C}\int \frac{f x_3}{\Phi}\,d\lambda.$$

Was die Konstante C betrifft, so bietet ihre experimentelle Ermittelung meist kein besonderes Interesse. Man macht

sie überflüssig durch die oben schon erwähnte Normierung der Eichfunktionen. Eine besonders einfache analytische Gestalt erhalten nämlich die Koordinaten desjenigen Lichtes, von dem das Spektrum entworfen wird; für $f = \Phi$ erhält man ja

$$(7) \qquad \frac{1}{C}\int x_1\, d\lambda, \quad \frac{1}{C}\int x_2\, d\lambda, \quad \frac{1}{C}\int x_3\, d\lambda.$$

Ändert man nun den Maßstab von zweien der Eichkurven willkürlich derart ab, daß die drei Integrale gleich werden, so erhält das Beleuchtungslicht drei gleiche Farbkoordinaten, d. h. man hat damit *solche* drei Lichter der vorab gewählten Reizarten zu Eichlichtern gewählt, die, gemischt, mit dem Beleuchtungslicht gleichaussehen. Auf die *absolute* Lichtstärke der Eichfarben kommt dann in der Regel nicht mehr viel an, und ebensowenig darauf, ob das Beleuchtungslicht als Norm gewählt wird gerade in derjenigen Lichtstärke, in der es wirklich vorliegt oder in irgendeiner anderen, z. B. der C-fachen. Man darf darum — und pflegt das zu tun — den Maßstab aller drei Eichkurven proportional derart abändern, daß die drei Integrale irgendeinen runden Wert erhalten, etwa 1000; und kann dann, unter Fortlassung des Faktors $1/C$, geradezu das Tripel

$$1000,\ 1000,\ 1000$$

als Koordinaten des Beleuchtungslichtes ansprechen; freilich nicht in der wirklich vorliegenden Lichtstärke, sondern eben in der C-fachen.

Nach dieser Abmachung werden dann die Farbkoordinaten des Lichtes $f(\lambda)$

$$(6') \qquad \int \frac{f(\lambda)\, x_1(\lambda)}{\Phi(\lambda)}\, d\lambda$$

usw. Man erkennt, daß zu ihrer Berechnung eigentlich nicht die gesonderte Kenntnis von $f(\lambda)$ und $\Phi(\lambda)$, sondern nur des Quotienten f/Φ als Funktion der Wellenlänge notwendig ist, den man als die *relative* Lichtfunktion des vorgelegten Lichtes bezogen auf das Beleuchtungslicht als Norm bezeichnen könnte. Für ein Licht $f(\lambda)$, das wir uns jetzt wieder in concreto vorliegend denken, ist die Aufnahme dieser relativen Lichtfunktion mit dem Spektrophotometer eine einfache Sache, wenn das Beleuchtungslicht, für dessen Normalspektrum die Eichkurven gelten, in concreto vorliegt. So läßt sich also diese zweite,

theoretische Methode der Koordinatenbestimmung auch für ein konkret vorgegebenes Licht, dessen $f(\lambda)$ von vornherein unbekannt ist, durchführen. Und zwar ist die Methode auch in diesem Falle mit Recht als eine *theoretische* zu bezeichnen, ungeachtet der spektrophotometrischen Messungsreihe, welche dazwischen tritt. Denn diese ist nicht eine farbenmetrische in unserem Sinne, es handelt sich dabei nur um einen Intensitätsvergleich von auch physikalisch ganz gleich zusammengesetzten Spektrallichterpaaren, der ebensogut von einem farbenblinden Beobachter oder von einem Bolometer geleistet werden kann (vgl. Einleitung). Das fundamentale Farbengleichheitsurteil spielt dabei nur eine Hilfsrolle, den souveränen Teil seiner Arbeit hat es durch Aufnahme der Eichkurven ein für allemal erschöpfend geleistet.

§ 8. Wechsel der Eichfarben oder des Koordinatensystems.

Es kann der Fall eintreten, daß man die Koordinaten einer Anzahl von Farben, etwa der Spektralfarben eines Spektrums oder auch noch anderer Farben *kennt* bezüglich eines bestimmten Eichfarbentripels und daraus die Koordinaten bezüglich eines neuen Eichfarbentripels ableiten will. Dazu müssen natürlich die neuen Eichfarben irgendwie eindeutig gegeben sein; wir wollen annehmen, daß ihre neun Koordinaten bezüglich der alten Eichfarben nach einer der angegebenen Methode ermittelt worden sind und numerisch vorliegen. Rechnerisch läuft die Aufgabe natürlich einfach hinaus auf die Transformation von *einem* auf ein *anderes* System affiner Vektorkoordinaten, d. h. die neuen Koordinaten werden homogen-lineare Funktionen der alten sein — eine affine Transformation, wie wir sie schon oben, freilich mit etwas anderer Bedeutung, kennen gelernt haben.[1])

1) *Oben*, § 5, hat es sich darum gehandelt, daß der gewöhnliche, euklidisch-metrische Raum allen möglichen affinen Transformationen unterworfen gedacht werden muß, um ihn von allen denjenigen Beziehungen zu befreien, die er für unsere Anschauung besitzt, die aber für den Farbenraum bedeutungslos sind. Ein Wechsel eines etwa schon gelegten Koordinatensystems war damit nicht verbunden, dieses mit allen etwa darin lokalisierten Farbvektoren wurde von der Transformation *mitgenommen*. *Jetzt behalten* alle Farbvektoren ihre Lage, es werden nur drei andere als Grundvektoren ausgesucht und *das* ist der Grund, warum die Koordinaten ihre Werte ändern.

Sei also F eine beliebige Farbe, F_1, F_2, F_3 die alten Eichfarben und

$$F = x_1 F_1 + x_2 F_2 + x_3 F_3, \tag{8}$$

ferner seien die neuen Eichfarben A, B, C und

$$\begin{cases} A = a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 F_3, \\ B = b_1 F_1 + b_2 F_2 + b_3 F_3, \\ C = c_1 F_1 + c_2 F_2 + c_3 F_3. \end{cases} \tag{9}$$

Wir suchen die neuen Koordinaten von F, also drei Zahlen, sagen wir y_a, y_b, y_c, welche der Farbgleichung genügen sollen

$$F = y_a A + y_b B + y_c C. \tag{10}$$

Setzen wir hier für A, B, C ihre Werte aus (9) und ordnen nach F_1, F_2, F_3, so kommt

$$\begin{cases} F = (a_1 y_a + b_1 y_b + c_1 y_c) F_1 \\ \quad + (a_2 y_a + b_2 y_b + c_2 y_c) F_2 \\ \quad + (a_3 y_a + b_3 y_b + c_3 y_c) F_3. \end{cases} \tag{11}$$

Der Vergleich mit (8) ergibt die drei gewöhnlichen Gleichungen

$$\begin{cases} a_1 y_a + b_1 y_b + c_1 y_c = x_1, \\ a_2 y_a + b_2 y_b + c_2 y_c = x_2, \\ a_3 y_a + b_3 y_b + c_3 y_c = x_3, \end{cases} \tag{12}$$

aus denen die y eindeutig zu berechnen sind, wofern nur

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{13}$$

Das ist aber bekanntlich genau die Bedingung dafür, daß die drei zu A, B, C gehörigen Vektoren *nicht komplanar* seien, was selbstverständlich gefordert werden muß, wenn die drei Farben als Eichfarben verwendbar sein sollen.

Noch etwas rascher und übersichtlicher kommt man zum Ziel, indem man einfach für die *Verträglichkeit* der 4 Farbengleichungen (8) und (9), als homogene Gleichungen in F_1, F_2, F_3 und 1 aufgefaßt, die gewohnte Bedingung des Verschwindens der Determinante ansetzt

$$(14)\qquad \begin{vmatrix} F & x_1 & x_2 & x_3 \\ A & a_1 & a_2 & a_3 \\ B & b_1 & b_2 & b_3 \\ C & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

So gewinnt man mit einem Schlag die definierende Farbengleichung für die neuen Koordinaten. Entwickelt lautet sie

$$(14')\qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} F - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} A - \ldots = 0 ,$$

woraus sich ablesen läßt

$$(15)\qquad \left\{ \begin{aligned} y_a &= \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}} x_1 + \ldots \end{aligned} \right.$$

usw. Vergleicht man das System dieser, wie vorausgesehen, linear homogenen Umrechnungsgleichungen für die Koordinaten mit den Farbengleichungen (9) so erkennt man, daß die Farbkoordinaten und die Farben selbst sich *kontragredient* transformieren; was trotz des höchst einfachen Sachverhaltes angemerkt zu werden verdient, weil zwischen diesen beiden Arten von Transformationsformeln nicht immer mit hinreichender Schärfe geschieden zu werden pflegt. Unsere Aufgabe erscheint damit allgemein gelöst.

Zwei besondere Fälle, für später wichtig, sind nun noch ins Auge zu fassen. Wie oben schon erwähnt, ist es sehr viel leichter, die *Reizart* einer Farbe mit Worten und Zeichen festzulegen, als auch ihre objektive Lichtstärke. Erst beide Angaben zusammen entsprechen der Angabe der *Absolutwerte* der Farbkoordinaten, während die Kenntnis der *Reizart* genau auf

die Kenntnis der Koordinaten*verhältnisse* hinauskommt. Wir haben oben gesehen, daß man, wenn von den *ursprünglichen* Eichfarben nur die Reizarten gegeben bzw. gefordert sind, die dann noch unbestimmte Aufgabe der Koordinatenbestimmung dadurch zu einer hinreichend bestimmten machen kann, daß man die Flächengleichheit der drei Eichkurven fordert; man wählt damit zu Eichfarben *solche* Farben der drei geforderten Reizarten, die addiert das unzerlegte Licht ergeben, mit dessen Normalspektrum operiert wird. Da dieses unzerlegte Licht meistens einigermaßen den Namen Weiß verdient, wollen wir diese zur Normierung nützliche Bedingung die „Weißbedingung" nennen. Sei nun diese Weißbedingung für die *alten* Eichfarben erfüllt, d. h. sei

$$F_1 + F_2 + F_3 = W, \tag{16}$$

wo W die Farbe des unzerlegten Lichtes in irgendeiner bestimmten Intensität. Seien ferner die *neuen* Eichfarben nicht, wie bisher angenommen, genau bekannt, sondern nur ihre Reizarten, d. h. die 9 Koeffizienten auf der rechten Seite der Gleichung (9) sind nicht genau bekannt, sondern in jeder Zeile ist noch ein Faktor unbestimmt, so daß das Koeffizientenschema zu ersetzen wäre etwa durch

$$\begin{vmatrix} \lambda a_1 & \lambda a_2 & \lambda a_3 \\ \mu b_1 & \mu b_2 & \mu b_3 \\ \nu c_1 & \nu c_2 & \nu c_3 \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Eine bequeme Form der notwendigen und hinreichenden Ergänzung der noch unvollständigen Aufgabe zu vollkommener Bestimmtheit ist dann wieder die Forderung, daß auch

$$A + B + C = F_1 + F_2 + F_3 = W \tag{16'}$$

sein solle, d. h., daß die Weißbedingung auch in den neuen Koordinaten gefordert wird. Drückt man links durch F_1, F_2, F_3 aus und vergleicht die Koeffizienten, so ergibt sich

$$\begin{cases} \lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1 = 1, \\ \lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2 = 1, \\ \lambda a_3 + \mu b_3 + \nu c_3 = 1. \end{cases} \tag{18}$$

Diese Gleichungen liefern λ, μ, ν eindeutig, wenn die Determinantenbedingung (18) erfüllt ist.

Wir nehmen jetzt an, daß die Koeffizienten $a_1 \ldots c_3$ schon in dieser Weise normiert seien, kehren also wieder zu unserer ursprünglichen Bezeichnungsweise, ohne λ, μ, ν zurück, wobei aber jetzt

$$(18') \qquad a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3 = 1.$$

Wir fragen uns noch, was das für die Koeffizienten der Transformation (15) zur Folge hat. Darüber belehrt uns folgende Umformung der Determinante

$$(19) \quad \left\{ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_1 + b_1 + c_1, & a_2 + b_2 + c_2, & a_3 + b_3 + c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \right.$$

$$\left. = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right.$$

nebst zwei analogen Umformungen.

Während also die Forderung der Weißbedingung in beiden Koordinatensystemen für das Koeffizientenschema der Farbgleichungen (9) zur Folge hat, daß die drei Koeffizienten jeder *Kolonne* zur Summe 1 geben, geben dann in den Transformationsformeln (15) die Koeffizienten jeder *Zeile* die Summe 1.

Der zweite Spezialfall, den wir betrachten müssen, soll uns aufklären über die Veränderung, welche die drei *Eichkurven* beim Wechsel der Eichfarben erleiden. Die Transformation (15), gültig für das Koordinatentripel einer beliebigen Farbe, gilt natürlich auch für die kontinuierlichen Folgen der Eichwert der Spektralfarben, wenn wir $x_1 \ldots x_3$ und $y_1 \ldots y_3$ als die betreffenden Funktionen von λ auffassen. Jede neue Eichkurve ist also eine gewisse Superposition mit konstanten Koeffizienten von den drei alten.

Zunächst ist klar und geht aus den ausgeschriebenen Formeln (15) sogleich hervor, daß, wenn die *Reizart* (*Richtung*) der Eichfarben erhalten bleibt und bloß ihre Lichtstärke (Länge) abgeändert wird, daß dann die *Gestalt* der Eichkurven erhalten bleibt und nur jede mit einem konstanten Faktor multipliziert wird. Eine solche Veränderung wollen wir für den Augenblick als unwesentlich ansehen.

Nun betrachten wir zweitens den Fall, daß nur *eine* der Eichfarben, etwa F_3, abgeändert wird

$$A = F_1, \quad B = F_2,$$

und zwar soll F_3 auch nicht beliebig verschoben werden, sondern *in der Ebene* $F_1 F_3$. Das heißt die Vektoren F_1, F_3 C sind komplanar oder

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 = c_2 .$$

Es lautet also das Koeffizientenschema von (9)

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 \end{matrix}$$

In die Formeln (15) eingesetzt ergibt das

$$(20) \qquad \begin{cases} y_a = x_1 - \dfrac{c_1}{c_3} x_3 , \\ y_b = x_2 , \\ y_c = \dfrac{1}{c_3} x_3 . \end{cases}$$

Eine Formveränderung erleidet also in diesem Falle *nicht diejenige Eichkurve*, deren zugehörige Eich*farbe abgeändert* worden ist, sondern nur *eine* der beiden anderen, und zwar *diejenige, deren Farbvektor als Schnitt der beiden erhalten gebliebenen Ebenen des Grunddreikantes erscheint. Dieser* Eichkurve superponiert sich die Eichkurve, deren Farbe abgeändert worden ist, mit einem gewissen Faktor $\left(-\frac{c_1}{c_3}\right)$

Hätte man F_3 *beliebig* abgeändert, so hätte sich die dritte Eichkurve der ersten *und* der zweiten, je mit einem gewissen Faktor, superponiert. Dieses Resultat ist wichtig, weil es uns erkennen lassen wird, in welchem Grade die spektrale Verteilung der sogenannten *Grundempfindungen* durch die Versuche an Dichromaten festgelegt wird. Es kommen nämlich an gesunden Augen nur zwei Arten von Dichromasie vor, die sogenannte *Rotblindheit* bzw. *Grünblindheit*. Dadurch werden im Farbenraum zwei Richtungen als dem *Grundrot* und *Grundgrün* entsprechend ausgezeichnet. Die dritte vom Standpunkte der Young-Helmholtzschen Theorie zu erwartende Form der Dichromasie, die *Blaublindheit*, kommt nur an schwer er-

krankten Augen vor, deren Angaben weit weniger zuverlässig sind. Die Richtung des *Grundblau* ist darum ziemlich unsicher. Unsere jetzige Betrachtung wird uns lehren, daß gerade die Verteilung der *Blauempfindung* im Spektrum durch diese Unsicherheit nicht berührt wird, sondern nur die Verteilungen von *Rot* und *Grün*, denen man je einen kleinen Bruchteil der Blauverteilung superponieren dürfte, ohne den Ergebnissen des Experimentes Gewalt anzutun.

§ 9. Irreelle Eichfarben. Die Young-Helmholtzsche Theorie.

Wir machen zunächst die einfache aber wichtige Bemerkung, daß rein rechnerisch natürlich die Möglichkeit vorliegt, die Farbkoordinaten auf beliebige drei Grundvektoren umzurechnen, auch auf solche, die entweder alle drei oder von denen ein oder zwei *außerhalb* der im § 6 beschriebenen Düte liegen, so daß ihnen keine durch ein Licht realisierbare Farbe entspricht. Auf diesem — und nur auf diesem — Wege kann man es erreichen, daß für alle reellen Farben alle drei Eichwerte positiv ausfallen; dazu muß das gewählte Grunddreikant die erwähnte Düte ganz umschließen, während jedes aus reellen Farbvektoren gebildete Dreikant, umgekehrt, von der Düte umschlossen wird. Und weil diese nicht selbst ein Dreikant ist, sondern teilweise gekrümmt, durchwegs aber konvex verläuft, wird es dann immer Farben geben, die aus den reellen Eichfarben nicht wirklich gemischt werden können, sondern einen oder zwei negative Eichwerte bekommen.

Natürlich müssen auch für solche *virtuelle Eichfarben*, auf die umgerechnet werden soll, ihre 9 Koordinaten bezüglich der alten, reellen, Eichfarben bekannt sein. Die Rechnung ist dann ganz die früher angegebene. Es wird aber nach dem dort gesagten auch genügen, wenn nur die virtuellen *Reizarten*, d. h. die *Richtungen* der neuen Grundvektoren oder analytisch: die 6 Koordinaten*verhältnisse* bekannt sind; die Absolutwerte lassen sich dann, wie dort, durch die Weißbedingung normieren, die neuen Grundvektoren ergeben dann, vektoriell addiert, das unzerlegte Licht in derselben Intensität, wie die alten, reellen Eichlichter.

Um ein Beispiel dafür zu geben, wie durch wirklich ausgeführte Farbmessungen Richtungen im Farbenraum eindeutig festgelegt werden können, die außerhalb der reellen Farbdüte

fallen, führe ich die von König vorgenommene Umrechnung auf die von ihm sogenannten *Elementarempfindungen* an. Als Grunddreikant wird dabei das *kleinste Dreikant* gewählt, das die reellen Farben ganz umschließt. Zwei Eichfarben sind reell, nämlich die Endfarben des Spektrums (Richtung OR und OV, Fig. 8).. Die dritte ist virtuell und fällt in die Schnittkante der ebenen Zwickel ROG und VOI. Diese Festlegung der dritten Reizart als Schnittlinie zweier Ebenen ist auch im Sinne der affinen Geometrie eindeutig.

Fig. 6.

Fig. 6 zeigt die entsprechenden Eichkurven, die sogenannten Elementarempfindungskurven. Dabei sind die Lichtstärken der Eichlichter (Längen der Grundvektoren) durch die Weißbedingung festgelegt.

Die schon von Newton erkannte Dimensionstatsache für normale Trichromaten wurde anfangs, als die genaue Gestalt des Spektralkegels noch nicht bekannt war, unbedenklich in der Form ausgesprochen, daß alle Farben sich aus drei Grundfarben mischen lassen. Als solche wurden meist Rot, Grün, Blau, auch wohl Rot, Grün, Violett angegeben. Th. Young war der erste, der hieran die Hypothese knüpfte daß als physisches Korrelat der Farbempfindung im Auge drei verschiedene Prozesse oder Erregungen gleichzeitig vorhanden sind, ohne einander zu stören. Die drei Grundfarben sollten nur je einen dieser drei Prozesse auslösen, alle übrigen Farben die drei Prozesse in wechselndem Verhältnis. Daraus würde sich ungezwungen die Gesamtheit der Mischungstatsachen erklären, wenn man nur annimmt, daß die Stärke mit der irgendein gemischtes Licht, sagen wir, den *ersten* Grundprozeß erregt, sich additiv zusammensetzt aus den Erregungsdifferentialen, die von seinen monochromatischen Bestandteilen für sich hervorgebracht würden. Wählt man die wahren

Grundfarben zu Eichfarben, dann wären die drei Eichwerte einer Farbe ein genaues Maß für die Erregungsstärke der drei Grundprozesse bei Darbietung dieser Farbe — wobei freilich die Einheit der Erregungsstärke für jeden Grundprozeß in willkürlicher Weise, z. B. durch die Weißbedingung festgesetzt wird.

Wir wollen uns hier von einer eingehenden Kritik dieser Hypothese, gegen die viele und schwere Einwände erhoben werden können, fernhalten. Am gewagtesten erscheint es, daß dabei jeder *Farbe in unserem metrischen Sinn* drei quantitativ bestimmte Erregungsstärken, also doch wohl ein ganz bestimmter Zustand der betreffenden Netzhautstelle zugeordnet wird. Woher denn kommt es, fragt man sich, daß bei identischem Zustand der Netzhautstelle so ganz verschiedene *Empfindungen* wie Braun und Goldgelb auftreten? Anhänger der Theorie lassen sich dann auch leicht dazu verleiten, diese Verschiedenheit der Empfindung hinwegdisputieren zu wollen und durch „unbewußte Schlüsse" zu erklären. Nun ist es zwar möglich, daß das physiologische Korrelat dieser Empfindungsverschiedenheit wenigstens teilweise nicht in der Retina, sondern zentripetal gelegen ist (Zonentheorie von v. Kries); aber keineswegs fällt es zusammen mit dem physiologischen Korrelat der *Vernunfttätigkeit* (wie das Wort „Schluß" andeutet), sondern höchstens mit dem des *anschauenden Verstandes*. Was wir *mindestens* voraussetzen müssen, um die Hypothese in der einfachen Form aussprechen zu dürfen, wie es oben geschehen, ist: gleicher Akkommodationszustand des Auges in allen Fällen. Denn daß bei gleichem Licht und, sagen wir nur, verschiedener *Pupillenweite* die gleichen Erregungsstärken ausgelöst werden, wäre natürlich ein Nonsens. Dieser Punkt brauchte uns aber für den gegenwärtigen Zweck nicht zu beschweren, weil *Farbengleichungen* auf der Netzhautmitte jedenfalls vom Akkommodationszustand unabhängig sind.

Ungeachtet dieser Schwierigkeiten, auf die mit besonderem Nachdruck hingewiesen zu haben das Verdienst E. Herings ist, erweist sich die Youngsche Hypothese doch unentbehrlich als *Arbeitshypothese*, weil sie bis jetzt die einzige ist, die eine einfache Zusammenfassung der Messungsergebnisse ermöglicht.

Die Bemerkungen am Anfang dieses Paragraphen sagen uns nun sofort, daß als Grundfarben im Sinne der Youngschen, von Helmholtz und König weiter ausgebauten, Theorie

keinesfalls drei reelle Reizarten gelten können, weil aus ihnen nicht wirklich alle anderen mischbar sind. Man könnte allerdings auf das Auskunftsmittel verfallen, daß man *zweisinnige* Erregungsprozesse annimmt, die bei positivem Eichwert in der einen, bei negativem in der anderen Richtung in Gang gesetzt werden. Täte man das, so hätte man aber wieder die Auswahl zwischen *allen möglichen nichtkomplanaren Vektortripeln* im Inneren der Düte; die Mischungstatsachen an und für sich zeichnen keines von ihnen aus; aus je drei linear unabhängigen Farben lassen sich alle übrigen prinzipiell gleich gut mischen, sobald man auch die „uneigentliche" Mischung gelten läßt.

Bei näherer Überlegung erscheint es nun aber durchaus nicht ungereimt, daß den Grundfarben nicht Richtungen im Inneren, sondern außerhalb der Düte entsprechen könnten, virtuelle Reizarten, derart, daß die Düte ganz von dem Grundfarbendreikant umschlossen wird. Denn das bedeutet ja nur: kein Licht löst ausschließlich *einen* Grundprozeß aus, sondern jedes wirkt auf alle drei, nur in wechselndem Verhältnis. Auf Grund photochemischer Tatsachen, ebenso auf Grund elektromagnetischer Resonanzphänomene (wenn man etwa dergleichen zum Ausbau der Theorie heranziehen wollte) erscheint ein solcher Sachverhalt sogar weit wahrscheinlicher, als daß immer zwei von den doch wohl ähnlichartigen Prozessen völlig unempfindlich sein sollten gegen ein bestimmtes Strahlengemisch, auf das der dritte stark anspricht.

Es wäre also gar kein Anstand, z. B. die obigen drei Elementarfarben Königs (von denen übrigens nur eine, das Grün, virtuell ist) als Grundfarben anzusprechen und die in Fig. 6 gegebenen „Elementarempfindungskurven" als Verteilung der Erregungswerte der drei Grundprozesse im Sonnenspektrum. Das einzige, woran es auch jetzt wieder fehlt, ist ein *zureichender Grund* dafür, gerade dieses Dreikant vor allen anderen auszuzeichnen. Wieder leistet, sobald man sich einmal entschlossen hat, virtuelle Reizarten für die Grundfarben zuzulassen, jedes Dreikant, das die Farbendüte umschließt, vom Standpunkte der bis jetzt angeführten Tatsachen ganz genau dieselben Dienste, keines ist vor allen anderen ausgezeichnet.

§ 10. **Beziehung zwischen Dichromaten und Trichromaten.**

Erinnern wir uns nun der Tatsache, daß es Personen gibt, deren Farbenraum nicht drei, sondern nur zwei Dimensionen hat, die Dichromaten. Die Entwicklungen der §§ 5—9 ließen sich ganz ebenso wie für das normale trichromatische auch für das dichromatische Auge durchführen, sie würden nur um vieles einfacher sein, da wir es mit einem ebenen statt mit einem räumlichen Vektorbüschel zu tun hätten. Wir brauchen das aber nicht auszuführen, da wir sogleich sehen werden, daß sich der Farbenraum des Dichromaten in viel einfacherer und dabei viel bedeutungsvollerer Weise direkt aus dem Farbenraum des Trichromaten ableiten läßt auf Grund eines einfachen, aber weittragenden Erfahrungssatzes.

Es wäre von vornherein möglich, daß zwischen dem zweidimensionalen und dem dreidimensionalen Farbensehen überhaupt keine Beziehung besteht, daß Lichtgemische, die dem Farbentüchtigen gleich erscheinen, vom Farbenblinden verschieden gesehen werden und umgekehrt; nur wäre im Ganzen die Mannigfaltigkeit von untereinander verschiedenen Lichtern für den Farbenblinden kleiner.

Tatsächlich liegt die Sache aber so, daß beim Einstellen einer Farbgleichung zwar der Farbenblinde meistens fehlgreift — vom Standpunkte des Farbentüchtigen; der Farbentüchtige dagegen — vom Standpunkte des Farbenblinden — niemals. Wenn man sich also die Ausdrucksweise gestattet (die wohl noch keiner Theorie präjudiziert), daß der Trichromat an jedem Licht *drei*, der Dichromat *zwei Merkmale* unterscheidet, so macht es den Eindruck: der Farbenblinde unterscheidet an einem Licht nicht *andere*, sondern *zwei von den* Merkmalen, die es auch für den Farbentüchtigen hat, für das dritte fehlt ihm jede Wahrnehmung. Zwei Lichter, die in allen drei Merkmalen übereinstimmen, anerkennt er als gleich. Soll er dagegen selbst zwei Lichter gegeneinander abgleichen, so werden sie sich in der Regel in dem dritten Merkmal, worauf er nicht geachtet hat, unterscheiden und darum dem Farbentüchtigen ungleich erscheinen.

Es braucht kaum hinzugefügt zu werden, daß man im Sinne der Young-Helmholtzschen Theorie versuchen wird, als diese „drei Markmale" die Erregungsstärken der drei Grundprozesse anzusprechen. Man wird erwarten, daß es drei

Typen von Farbenblinden gibt, solche denen der erste, zweite, dritte Grundprozeß fehlt. Damit würde die Theorie eine starke Stütze erhalten.

Veranschaulichen werden wir uns das Farbensehen eines Dichromaten im dreidimensionalen Farbenraum am besten in der Weise, daß wir durch ein Kurvensystem alle jene Punkte (Vektorspitzen) verbinden, die ihm (völlig) gleich erscheinen. Es ergibt sich sofort, daß dieses Kurvensystem eine Schar paralleler Geraden ist.

Denn seien A und B zwei verschiedene Farben, die von einem bestimmten Dichromaten verwechselt werden:

$$A \overset{d}{=} B. \tag{21}$$

Daß es sich um eine *dichromatische* Gleichung handelt, wollen wir andeuten durch das d oberhalb des Gleichheitszeichens. Sei ferner C irgendeine dritte Farbe, so besteht jedenfalls auch für den Dichromaten die Identität

$$C \overset{d}{=} C. \tag{22}$$

Hierzu addieren wir die mit $\lambda > 1$ multiplizierte Gleichung (21) Seite für Seite:

$$C + \lambda A \overset{d}{=} C + \lambda B.$$

Wenn nun die trichromatische Farbe $C + \lambda (A - B)$ *existiert*, d. h. wenn der betreffende Vektor dem reellen Farbenraum angehört, so gilt für den Dichromaten:

$$C + \lambda (A - B) \overset{d}{=} C. \tag{23}$$

Und wenn

$$C + \lambda (B - A)$$

existiert

$$C + \lambda (B - A) \overset{d}{=} C. \tag{23'}$$

D. h. (23) gilt für jedes *reelle* λ, für welches die linksstehende trichromatische Farbe existiert. Diese Farben erfüllen aber das im reellen Farbenraum gelegene Stück jener Geraden, die durch den Farbenpunkt (Vektorspitze) der beliebigen Farbe C parallel zur Verbindungsgeraden der Vektorspitzen von A und B gezogen ist; denn ihr Farbvektor geht aus dem Farbvektor C durch Addition eines Multiplums der Vektordifferenz $(A - B)$

hervor, die zwar keiner reellen Farbe zu entsprechen braucht, als Vektor aber jedenfalls existiert.

Sobald also für einen Dichromaten nur *ein* Paar genauer Verwechslungsfarben bekannt ist, d. h. zwei Farben, die ihm ununterscheidbar sind, ohne es für den Farbentüchtigen zu sein, so weiß man schon, daß alle Farben, die auf einer Parallelen zur Verbindungsgeraden dieser beiden Farben liegen, ebenfalls verwechselt werden.

Da durch eine solche Parallelenschaar die Farbmannigfaltigkeit in der Tat auf zwei Dimensionen reduziert wird, so ist anzunehmen, daß damit auch schon die Gesamtheit der Verwechslungen des betreffenden Dichromaten erschöpft ist; d. h. daß von dem eben bewiesenen Satz auch die Umkehrung gilt: *nur* solche Farbenpaare erscheinen dem Dichromaten gleich, die auf derselben Parallelen liegen. Das läßt sich aber auch exakt beweisen.

Würde es nämlich auch nur ein einziges Paar von Verwechslungsfarben A', B' geben, derart, daß die Vektoren $A - B$ und $A' - B'$ *nicht* (direkt oder invers) parallel wären, so ließe sich folgern, daß *die ganze Ebene* von Farben

$$C + \lambda (A - B) + \mu (A' - B')$$

dem Dichromaten mit C gleich erscheint — soweit dieser Ausdruck überhaupt eine reelle Farbe darstellt; d. h. jenes Stück dieser Ebene, das im reellen Farbenraum liegt. Durch die Schaar paralleler Ebenen würde die Farbmannigfaltigkeit auf nur *eine* Dimension reduziert, was der Voraussetzung widerspricht, daß es sich um einen *Dichromaten* handeln soll.

Man erkennt nun sofort, daß, wenn man einem der Grundvektoren eines Farbkoordinatensystems, etwa dem Vektor F_1, die Richtung dieser Parallelenschar gibt, daß es dann für den betreffenden Farbenblinden auf die erste Koordinate einfach gar nicht ankommt. Solche und *nur* solche Farbenpaare erscheinen ihm gleich, die in der zweiten und dritten Koordinate übereinstimmen. Würde F_1 ein reeller Farbvektor sein, dann würden Farben dieser Reizart in jeder beliebigen objektiven Intensität von ihm überhaupt nicht wahrgenommen werden, weil jede Farbe mit den Koordinaten

$$(x_1, 0, 0)$$

mit der absoluten Dunkelheit

(0, 0, 0)

gleich erscheint. Man könnte sie als *Fehlfarben* des Dichromaten bezeichnen.

Tatsächlich kommt dergleichen nicht vor: Die Fehlfarbe des Dichromaten ist stets *virtuell*.

Würde es nun genau drei Typen von Dichromaten geben, d. h. würde man bei Aufsuchung der Parallelenschar im trichromatischen Farbenraum für eine große Zahl farbenblinder Personen immer auf eine von drei bestimmten Richtungen geführt werden, so wäre das eine sehr starke Stütze für die Young-Helmholtzsche Theorie. Die am Ende des vorigen Paragraphen erwähnte Unsicherheit in der Wahl der Grundfarben wäre behoben durch die unwiderstehlich sich aufdrängende Vermutung, daß diesen drei Typen je *einer* der Youngschen Grundprozesse *fehlt*. Man würde auf diese drei Richtungen als Koordinatenrichtungen transformieren und den so gewonnenen Farbkoordinaten eine tiefere Bedeutung zuschreiben denn irgendwelchen anderen, als Maßzahlen der Stärke, mit welcher die betreffende Farbe die drei Grundprozesse erregt. Jedenfalls, unabhängig von jeder Hypothese, würde *dieses* Zahlentripel den Vorteil bieten, daß es mit einem Blick erkennen läßt, nicht nur ob zwei Farben für den Farbentüchtigen gleich (oder von gleicher Reizart), sondern auch ob sie es etwa für eine der 3 Gruppen von Farbenblinden sind.

Einen Widerspruch oder mindestens eine sehr große Komplikation für unsere Theorie würde es bedeuten, wenn man auf *mehr als drei* distinkte Gruppen von Farbenblinden geführt würde.

Die Untersuchungen Königs und anderer haben nun ergeben, daß als physiologische Eigentümlichkeit gesunder Augen nur *zwei* Typen von Dichromasie vorkommen; die Fehlrichtungen (Richtung jener Parallelenschar) aller im übrigen gesunden Augen, die sich als dichromatisch erwiesen, fiel innerhalb der Versuchsfehler mit einer von zwei affingeometrisch bestimmten Richtungen des normalen trichromatischen Farbenraumes zusammen; diese Richtungen entsprechen übrigens, wie schon erwähnt, keiner reellen Farbe, die vom Ursprung

aus parallel dazu gezogenen Vektoren liegen außerhalb der reellen Farbdüte.[1])

Man nimmt an, daß diese zwei Richtungen zwei von den drei virtuellen Grundfarben entsprechen, die aus gleich zu besprechenden Gründen als *Grundrot* und *Grundgrün*, und die zwei Dichromatentypen dementsprechend als *Rotblinde* und *Grünblinde* bezeichnet werden.

Der dritte von der Theorie geforderte Typus, die *Blaublindheit*, ist zwar auch beobachtet worden[2]), aber nur auf den erkrankten Netzhautteilen schwer havariierter Augen (Retinitis, Ablatio retinae), die auch in anderer Hinsicht, besonders in der Sehschärfe, schwer beschädigt waren. Die Ermittlung der Fehlrichtung auf Grund eingestellter Farbgleichungen war dadurch sehr erschwert, immerhin scheint es, daß auch diese Blaublinden in der Fehlfarbe untereinander sehr angenähert übereinstimmen.

Fig. 7 zeigt die ungefähre Lage dieser drei Fehlrichtungen $F_1 F_2 F_3$ im Verhältnis zum Spektralkegel. Der Deutlichkeit halber wurde wieder das ganze Vektorbüschel mit einer an sich bedeutungslosen Ebene zum Schnitt gebracht und die Spur auf dieser Ebene gezeichnet. Nur beiläufig möchte ich erwähnen, daß auch diese zweidimensionale Schnittfigur allein an Stelle des räumlichen Vektorbüschels zur Darstellung der gesamten niederen Farbenmetrik verwendet werden kann und sogar viel häufiger Anwendung gefunden hat, als das räumliche Bild. Man bezeichnet sie als Farbenebene oder Farbendreieck. Für die dritte Koordinate wird Ersatz geschaffen dadurch, daß man die Farben gleicher Reizart, die sich in demselben Punkt abbilden, unterscheidet durch eine Quantitäts- oder Massenzahl, die bei gleicher Reizart der Länge des betreffenden Vektors

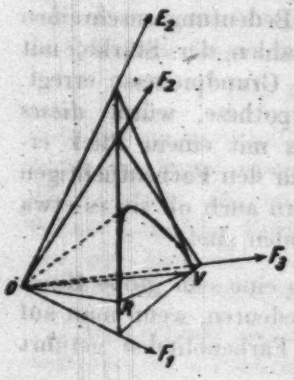


Fig. 7.

1) Man vgl. hauptsächlich: A. König u. C. Dieterici, Zeitschr. f. Psychol. u. Physiol. d. Sinnesorgane 4. 241ff. 1892.

2) Vgl. besonders A. König, Sitzungsber. d. Berliner Akad. d. Wiss. 8. Juli 1897. S. 718ff.

proportional genommen wird. Durch geeignete Wahl des Proportionalitätsfaktors für die drei Koordinatenrichtungen (wodurch derselbe dann auch für jede andere Richtung festgelegt ist) läßt es sich erreichen, daß in der Farbenebene die bekannte Newtonsche Schwerpunktskonstruktion gilt, wonach der Ort der Mischfarbe als Schwerpunkt der Komponenten, ihre Masse als Summe von deren Massenzahlen gefunden wird. Kurven *gleicher Farbe* für den Farbenblinden lassen sich in der Farbebene wegen der fehlenden dritten Koordinate nicht anschaulich machen, wohl aber *Kurven gleicher Reizart*: es sind die Geraden durch den *Fehlpunkt* (Spur der Fehlrichtung). Die Rolle, welche für den Farbenraum die affine Geometrie spielt, spielt für die Farbebene die ebene projektive Geometrie; die Vektorkoordinaten sind projektive Dreieckskoordinaten bezüglich der Spur des Koordinatendreikantes.

Allerdings ist dieses Entsprechen der beiden Geometrien kein ganz genaues, da man die projektiven Koordinaten *baryzentrisch* wählen (d. h. den sogenannten „Einheitspunkt" in den Schwerpunkt des Koordinatendreiecks verlegen) muß, wenn die einfache Newtonsche Schwerpunktskonstruktion gelten soll.

Kehren wir nach dieser Digression wieder zu der räumlichen Darstellung zurück, die wir nicht nur wegen ihrer größeren Einfachheit, sondern deshalb in den Vordergrund rücken, weil sie im zweiten Teil dieser Arbeit allein Anwendung finden kann.

Wie erwähnt, sind die Richtungen F_1 und F_2 durch die Gleichungen der Rot- und Grünblinden einigermaßen sichergestellt. Es besteht die Eigentümlichkeit, daß die Ebene $F_1 F_2$ mit der Ebene BOG der ersten Zwischenstrecke zusammenfällt, so daß nicht nur das Endrot des Spektrums, sondern auch die Scharlach- und Orangefarben bis etwa $\lambda = 630$ als „Mischungen" von Grundrot und Grundgrün allein erscheinen; der Blauprozeß wird durch Lichter dieser Wellenlänge überhaupt nicht erregt.

Es muß erwähnt werden, 1. daß König zur Vereinfachung der Darstellung *sich bemüht hat*, den *Kompromiß* zwischen den experimentell ermittelten Fehlrichtungen, die in Wahrheit natürlich doch über zwei kleine Raumwinkelbereiche gestreut sind, so zu schließen, daß das eben erwähnte Resultat zustande

kommt; 2. daß das Auge in diesem λ-Bereich gegen kleine Beimischungen von spektralem Blau oder Violett recht unempfindlich ist. Es wäre darum immerhin möglich, daß die Ausschaltung des dritten Grundprozesses in diesem λ-Bereich doch nur eine angenäherte ist.

Im Verhältnis zur zweiten *Elementar*farbe Königs (E_2 in Fig. 7), die wir oben (§ 9) verwendet haben, liegt das Grundgrün F_2 *näher an Rot*.

Die Lokalisation von F_3 ist, wie erwähnt, recht unsicher; ja, die Lage, die wir ihr hier im Anschluß an König gegeben haben (komplanar mit F_1 und Endviolett), entspricht sogar Königs eigenen Versuchen an Blaublinden recht schlecht. Solange eine sichere Lokalisation nicht möglich ist, wollen wir aber an dieser, einmal historisch gewordenen Lage nicht rütteln und geben in Fig. 8 die sogenannten Grundempfindungskurven Königs, d. i. die Eichkurven vom Interferenzspektrum

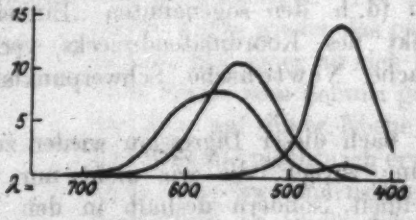


Fig. 8.

des Sonnenlichtes bezogen auf Grundvektoren von den Richtungen $F_1 F_2 F_3$ und solcher Länge, daß sie komponiert die Farbe des Sonnenlichtes ergeben. Es geben also z. B. die Ordinaten der Rotkurven die spektrale Verteilung der Erregungsstärke des Rotprozesses, wenn man der Reihe nach die Farben des erwähnten Spektrums auf das Auge wirken läßt; dabei sind die Einheiten der Erregungsstärke für die drei Prozesse willkürlich so gewählt, daß auf Sonnenlicht (oder ein ihm gleich erscheinendes) alle drei in *gleicher* Stärke ansprechen.

Es muß noch begründet werden, warum wir von einem Rot-, Grün-, Blauprozeß u. dergl. sprechen und nicht einfach von Prozeß Nr. 1, Nr. 2, Nr. 3, da es sich doch nicht um reelle Farben handelt, sondern die Empfindung, die der Erregung nur *eines* Prozesses allein entspricht, uns völlig unbekannt ist.

Verbindet man eine Grundfarbenrichtung und die Weißrichtung durch eine Ebene, so schneidet diese die Farbdüte in zwei Geraden, von denen eine in dem spitzen Winkel zwischen Weiß und Grundfarbe liegt; Vektoren dieser Richtung lassen sich aus Weiß und Grundfarbe additiv zusammensetzen, die betreffenden Farben erregen also den Grundprozeß zwar nicht isoliert, aber es treten nur noch hinzu solche Erregungsstärken aller drei Prozesse, die für sich Weiß ergeben würden. Nun haben wir aber eine anschauliche Vorstellung davon, wie eine *reelle* Farbe bei solcher Hinzufügung von Weiß sich verändert; wir pflegen zu sagen, daß sich dabei der Farbton nicht oder wenig verändert, sondern nur die Farbensättigung. Wir dürfen darum wohl annehmen, daß die Farbe jener zwischen Weiß und Grundfarbe gelegenen, mit ihnen komplanaren Richtung sich zu dem Eindruck, den die als möglich gedachte, isolierte Erregung des betreffenden Grundprozesses hervorrufen würde, so verhält, wie die weißliche Abwandlung einer Spektralfarbe zu dieser Spektralfarbe selbt. Wir glauben also, daß jene Schnittfarbe wenigstens ein qualitatives Bild der Grundfarbe gibt, die als noch gesättigtere Abwandlung davon zu denken ist.

Diese weißlichen Repräsentanten der Grundfarben sind nun ein Purpurrot, komplementär etwa zu $\lambda = 494$, ein Grün etwa $\lambda = 505$ und ein Blau etwa $\lambda = 470$ (komplementär zu $\lambda = 578$); das rechtfertigt unsere Bezeichnungsweise.

Auf Grund der Darstellung des Verhältnisses zwischen dichromatischem und trichromatischem Sehen durch die Parallelenschar läßt sich übrigens sofort erkennen, daß diesen Spektrallichtern auch eine unmittelbare experimentelle Bedeutung zukommen sollte, was für die ersten beiden auch wirklich zutrifft, $\lambda = 494$ erscheint dem Rotblinden, $\lambda = 505$ dem Grünblinden ununterscheidbar von einem trichromatischen Weiß (Sonnenlicht) bestimmter Intensität. Daß die beiden „neutralen Punkte" einander so nahe liegen und durch Ungenauigkeit der Versuche oder Färbung der Augenmedien zuweilen sogar in der Reihenfolge vertauscht erscheinen, war einer der Gründe, daß der fundamentale Unterschied zwischen den Rot- und Grünblinden so lange geleugnet wurde.

Für einen Blaublinden wären zwei neutrale Punkte etwa bei $\lambda = 470$ und $\lambda = 578$ zu erwarten. Tatsächlich wurde an den oben erwähnten Schwerkranken immer bloß einer zwischen

$\lambda = 560$ und $\lambda = 570$ beobachtet. Dies und noch eine andere Unstimmigkeit machen die Lage von F_3 zweifelhaft, wenn man jenen Versuchen überhaupt eine Bedeutung für die Festlegung der Grundfarben beimessen will. Will man das aber nicht, dann ist natürlich die Wahl von F_3 *völlig* willkürlich.

Wir haben schon oben erwähnt, daß eine eventuelle Änderung dieser Lage die Gestalt der Blaukurve nicht berühren würde, wohl aber die der Rot- und Grünkurve; diesen beiden Kurven wäre je noch ein gewisser Bruchteil der Blaukurve zu superponieren, welche Bruchteile von der neuen Lage von F_3 abhängen.

Die Sehweise der *Monochromaten* kann leider zur genaueren Bestimmung der Grundfarben nicht benützt werden, da zwischen ihnen einerseits, den Di- und Trichromaten andererseits keine so einfache Beziehung besteht, wie zwischen diesen untereinander. In der stäbchenfreien Netzhautmitte, die uns in dieser Abhandlung allein beschäftigt, sind die Monochromaten sehr wahrscheinlich überhaupt blind; in den parazentralen und peripheren Teilen stimmt ihre Erregbarkeitskurve nicht etwa mit einer der drei normalen Grundempfindungskurven, sondern mit der normalen Erregbarkeitskurve des farblosen Dämmerungssehens überein, das im stäbchenfreien Bezirk ebenfalls völlig fehlt.

Auch auf die interessanten Fälle *anomaler Trichromasie* wollen wir an dieser Stelle nicht eingehen.

(Eingegangen im März 1920.)

3. *Die Bewegungsgesetze der Elektrizitätsträger bei von Null verschiedenen Gasdrucken;* von Hans Küstner.

Werden an der Oberfläche eines Leiters durch irgendeinen Vorgang Elektronen frei gemacht, und befindet sich in der Umgebung dieses Leiters ein zweiter, der gegen jenen auf einem positiven Potential gehalten wird, so fließt zwischen beiden ein Strom. Die Bewegungsgesetze der die Stromleitung übernehmenden Elektrizitätsträger werden einerseits durch Anordnung, Gestalt und Potentialdifferenz der beiden Leiter, durch die Menge der pro Flächen- und Zeiteinheit austretenden Elektronen, sowie durch deren Anfangsgeschwindigkeit bestimmt, andererseits durch die Beschaffenheit und den Druck des Gases, in dem sich der Vorgang abspielt. Denn während bei niederen Drucken die Elektronen den Elektrizitätstransport allein übernehmen, lagern sie sich bei hohen Drucken an die Gasmoleküle an, und die Masse des Elektrizitätsträgers, des Ions, ist alsdann viel größer als die des Elektrons; und schließlich erfahren die Elektrizitätsträger bei hohen Drucken durch die Gasmoleküle einen Widerstand, der sich nach Art einer Reibungskraft äußert, während sich die Elektronen bei niederen Drucken mehr oder weniger frei und reibungslos bewegen können. Alle die genannten Faktoren, die die Bewegungsgesetze der Elektrizitätsträger bestimmen, gestatten wegen ihrer großen Zahl und der wechselseitigen Beziehungen, in denen sie zueinander stehen, nicht, das Problem in seiner Allgemeinheit zu lösen. Indessen ist es unter Annahme vereinfachender Nebenbedingungen von verschiedenen Autoren behandelt worden.

Für den Fall zweier unendlicher, paralleler Ebenen und hohen Gasdrucks von der Größenordnung einer Atmosphäre haben zunächst E. v. Schweidler[1]), E. Rutherford[2]) und

1) E. v. Schweidler, Sitzungsber. d. Kaiserl. Akad. zu Wien 108. IIa. S. 899. 1899; ebenda 113. IIa. S. 1120. 1904.

2) E. Rutherford. Phys. Rev. 13. S. 321. 1901.

J. J. Thomson[1]) die Bewegungsgesetze der Elektrizitätsträger, in diesem Falle der Ionen, unabhängig voneinander abgeleitet. Sie setzen dabei die Geschwindigkeit des Ions der Feldstärke proportional. Dann erhalten sie das gleiche Ergebnis, das man in der Form schreiben kann:

$$V = \frac{R}{12\pi i}\left[\left(\frac{8\pi i}{R}x + E_0^2\right)^{3/2} - E_0^3\right].$$

Hierin bedeuten:

x die Entfernung von der die Elektronen abgebenden Platte in cm,
V das Potential an dieser Stelle
E_0 die Feldstärke an der die Elektronen abgebenden Platte } in elektrostat. Einheiten.
i den Strom pro Flächeneinheit
R die Beweglichkeit der Elektrizitätsträger, d. h. ihre Geschwindigkeit in cm/sec bei Atmosphärendruck und im Felde von 1 Volt/cm.

Wie besonders scharf von Schweidler betont wurde, muß hier zwischen zwei Grenzwerten für maximalen Strom unterschieden werden: Der eine ist der „Sättigungsstrom", dessen Wert nur durch die Menge der in der Zeiteinheit von der Flächeneinheit abgegebenen Elektronenzahl bestimmt wird. Ist das angelegte Potential hoch genug, um diese restlos in der Zeiteinheit herauszuschaffen, so nimmt der Strom bei weiterer Steigerung der Potentialdifferenz nicht weiter zu. Er ist also unabhängig vom angelegten Potential, sobald dieses einen bestimmten Wert überschritten hat. Demgegenüber wird der „Raumladungsgrenzstrom" erreicht, wenn $E_0 = 0$ wird: weitere Steigerung der Elektronenabgabe erhöht dann den Strom nicht. Für ihn ist:

$$i \sim \frac{P^2}{l^2},$$

wenn P die Potentialdifferenz der Platten und l ihren Abstand bezeichnen.

In neuerer Zeit haben J. Langmuir[2]) und W. Schottky[3]) unabhängig voneinander und gleichzeitig dasselbe Problem für das absolute Vakuum behandelt. Sie setzen hier die Ge-

1) J. J. Thomson, Elektrizitätsdurchgang in Gasen, engl. Ausgabe 1903, deutsche Ausgabe von E. Marx 1906.

2) J. Langmuir, Phys. Rev. (2) 2. S. 450. 1913; Phys. Zeitschr. 15. S. 348 u. 516. 1914.

3) W. Schottky, Phys. Ztschr. 15. S. 526. 1914.

schwindigkeit des Elektrons $v = \sqrt{2\frac{e}{\mu}V}$, wo $\frac{e}{\mu}$ das Verhältnis von Ladung zur Masse des Elektrons, V die durchlaufene Potentialdifferenz bedeutet. Weiterhin setzen sie die Anfangsgeschwindigkeit der Elektronen gleich Null und erhalten dann für den Raumladungsgrenzstrom, der durch $E_0 = 0$ charakterisiert ist, zwischen zwei unendlichen, parallelen Platten den Wert

$$i = \frac{\sqrt{2\frac{e}{\mu}}}{9\pi} \cdot \frac{V^{3/2}}{x^2},$$

wenn alles in elektrostatischen Einheiten gemessen wird, oder wenn man i_A in Ampere, V_V in Volt und x in Zentimetern mißt.

$$i_A = 2{,}33 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{V_V^{3/2}}{x_{cm}^2}.$$

Der Raumladungsgrenzstrom, der auch hier unabhängig von einer weiteren Steigerung der Elektronenemission ist, ist also der 3/2ten Potenz von V direkt und dem Quadrate des Plattenabstandes umgekehrt proportional. Langmuir gibt in derselben Arbeit die Lösung des Problems für einen Elektronen emittierenden Draht und einen koaxialen Zylinder.

Später ist das Ebenen- und das Zylinderproblem von Schottky[1]) und das Ebenenproblem von Epstein[2]) unter der Annahme durchgerechnet worden, daß die Elektronen nach dem Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilungsgesetz austreten. Der Potentialverlauf zeigt alsdann ein Minimum, und das Feld ist zwischen diesem und dem emittierenden Leiter bremsend, zwischen dem Potentialminimum und der positiven Platte beschleunigend, so daß nur die mit hoher Anfangsgeschwindigkeit begabten Elektronen die Anode erreichen und sich an der Stromleitung beteiligen, während die langsamen Elektronen zur Kathode zurückkehren. Die obige Langmuir-Schottkysche Formel ergibt sich als eine erste Näherung dieser Rechnungen, die dem wahren physikalischen Vorgange zweifellos viel näher kommen.

1) W. Schottky, Phys. Zeitschr. 15. S. 624. 1914; Ann. d. Phys. 44. S. 1011. 1914.

2) P. S. Epstein, Verh. d. D. Phys. Ges. 21. S. 85. 1919.

Die Werte für den Raumladungsgrenzstrom bei hohem Gasdruck nach Schweidler-Thomson und für das absolute Vakuum nach Langmuir-Schottky stellen nun zwei Grenzfälle dar; zwischen beiden liegt das große Gebiet aller Gasdrucke, von Null bis etwa eine Atmosphäre. Für Drucke von der Größenordnung der letzteren kann man mit sehr angenäherter Gültigkeit die Schweidler-Thomsonsche Formel benutzen, wenn man die Beweglichkeit R des Ions dem Drucke umgekehrt proportional setzt. Dies ist aber nur so lange zulässig, als der Strom allein von Ionen getragen wird. Die Grenze liegt nach Beobachtungen von Langevin[1]) bei einigen Zentimetern Quecksilber Druck. Unterhalb desselben beteiligen sich freie Elektronen am Elektrizitätstransport, um ihn bei niedrigen Drucken allein zu übernehmen. Letzteres gilt allerdings nur dann, wenn keine Stoßionisation eintritt, bei der durch Abspaltung von Elektronen die Gasmoleküle selbst zu Ionen gemacht werden.

Im nachstehenden soll nun das Bewegungsgesetz der Elektrizitätsträger für beliebige Drucke und für zwei unendliche parallele Ebenen abgeleitet werden. Es soll dabei die einschränkende Annahme gemacht werden, daß die Potentialdifferenz zwischen den Platten unterhalb der Ionisierungsspannung liegt, daß also keine Stoßionisation auftritt, vielmehr der Elektrizitätstransport allein durch die der Kathode entstammenden Ladungen vollzogen wird. Weiterhin soll angenommen werden, daß die Elektrizitätsträger in dem sie umgebenden Gase eine Reibung erfahren; diese soll, analog der inneren Reibung nach den Gesetzen der kinetischen Gastheorie, der Geschwindigkeit des Trägers proportional gesetzt werden. Über den Reibungskoeffizienten soll keinerlei Annahme gemacht werden. Es wird eine Beziehung zwischen ihm und der Beschaffenheit des Gases vorhanden sein. Wie wir wissen, ist ja der Zusammenstoß zwischen Elektron und Gasatom um so elastischer, je kleiner die Elektronenaffinität der Gasmoleküle ist. Wie Franck und Hertz[2]) gezeigt haben, ist der Energieverlust des Elektrons in Quecksilberdampf und Edelgasen bei der Reflexion nicht bemerkbar. Endlich wird auch eine Beziehung

1) W. Langevin, Ann. de Chim. et de Phys. 28. S. 298. 1903.

2) J. Franck u. P. Hertz, Verh. d. D. Phys. Ges. 15. S. 373, 613, 929. 1913; 16. S. 457, 512. 1914.

zwischen dem Reibungskoeffizienten und dem Drucke des Gases bestehen. Die Art dieser Beziehungen hängt davon ab, inwieweit man beim Zusammenstoße oder auch nur bei der Ablenkung des Elektrons aus seiner Bahn durch das Gasatom Wechselwirkung mechanischer oder elektrischer Kräfte ansetzt.[1]) Es soll daher zunächst die Frage nach den Beziehungen zwischen dem Reibungskoeffizienten und den anderen physikalischen Größen offen gelassen und ihre Bestimmung dem Experiment vorbehalten bleiben.

Bezüglich der Lösung des vorliegenden Problems wird man fordern müssen, daß sowohl die Schweidler-Thomsonsche als die Langmuir-Schottkysche Formel als Grenzfunktionen in ihr enthalten sind. Es wird sich zeigen, daß dies der Fall ist.

Die Berechnung.

Es bedeuten:

μ	Masse des Elektrizitätsträgers	in elektrostat. C.G.S.
ε	Ladung des Elektrizitätsträgers	in elektrostat. C.G.S.
n	Anzahl der Elektrizitätsträger im ccm.	
x	Entfernung des Elektrizitätsträgers von der Kathode in cm.	
v	Geschwindigkeit des Elektrizitätsträgers im Punkte x	in cm/sec.
v_0	Geschwindigkeit des Elektrizitätsträgers an der Kathode	in cm/sec.
V	Potential im Punkte x	in elektrostat. C.G.S.
E	Feldstärke im Punkte x	in elektrostat. C.G.S.
E_0	Feldstärke an der Kathode	in elektrostat. C.G.S.
i	Strom pro qcm	in elektrostat. C.G.S.
V	Potential im Punkte x	in Volt.
P	Potentialdifferenz der Platten	in Volt.
E_V	Feldstärke im Punkte x in Volt/cm.	
i	Strom in Ampere.	
l	Plattenabstand in cm.	
t	Zeit in Sekunden.	
k	Reibungskoeffizient.	

Ist die Reibung des Elektrizitätsträgers proportional der Geschwindigkeit, so hat man die Bewegungsgleichung

$$\mu \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt} + \varepsilon\frac{dV}{dx}. \qquad (1)$$

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 40. S. 393. 1913, 41. S. 53. 1913; 60. S. 329. 1919; 61. S. 665. 1920.

Ferner gilt die Poissonsche Gleichung

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 4\pi n\varepsilon. \tag{2}$$

Die Stromdichte ist

$$n\varepsilon \cdot \frac{dx}{dt} = i. \tag{3}$$

Differenziert man (1) nach x und eliminiert daraus und aus der aus (2) und (3) hervorgegangenen Gleichung

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 4\pi i \cdot \frac{dt}{dx}$$

das $\frac{d^2V}{dx^2}$, so erhält man nach Kürzen von $\frac{dt}{dx}$

$$\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{k}{\mu} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} - 4\pi i \frac{\varepsilon}{\mu} = 0 \tag{4}$$

Setzt man

$$\frac{k}{\mu} = a; \quad -4\pi i \frac{\varepsilon}{\mu} = b; \quad \frac{\mu}{\varepsilon} = s, \tag{5}$$

so geht die Differentialgleichung dritter Ordnung über in

$$\frac{d^3x}{dt^3} + a\frac{d^2x}{dt^2} + b = 0. \tag{6}$$

Ihre Lösung ist

$$x = c_3 e^{-at} - \frac{b}{2a}t^2 + \frac{1}{a}\left(c_1 + \frac{b}{a}\right)t + \left(\frac{c_2}{a} - \frac{c_1}{a^2} - \frac{b}{a^3}\right) \tag{7}$$

Also ist

$$\frac{dx}{dt} = v = -c_3 a e^{-at} - \frac{b}{a}t + \frac{1}{a}\left(c_1 + \frac{b}{a}\right). \tag{8}$$

Setzt man die Differentialquotienten von (7) in (1) ein, so erhält man unter Berücksichtigung von (5) für die Feldstärke

$$\frac{dV}{dx} = E = s(c_1 - bt). \tag{9}$$

Das Produkt von (8) und (9) liefert durch Integration für das Potential:

$$\left\{\begin{aligned} V = {} & c_3 s e^{-at}\left(c_1 - \frac{b}{a}\right) - sbc_3 te^{-at} + \frac{sb^2}{3a}t^3 \\ & - \frac{sb}{2a}\left\{\frac{b}{a} + 2c_1\right\}t^2 + c_1\frac{s}{a}\left(c_1 + \frac{b}{a}\right)t + c_4. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Entsprechend den vier Integrationskonstanten kann man folgende Bedingungen einführen:

$$\text{Für } t = 0 \text{ sei } x = 0; \quad \frac{dx}{dt} = v_0; \quad V = 0; \quad E = E_0.$$

Dadurch gehen die Gleichungen (7) bis (10) über in

$$(11) \quad x = \frac{1}{a}\left(v_0 - \frac{b}{a^2} - \frac{E_0}{\varepsilon a}\right)\left[1 - e^{-at}\right] - \frac{b}{2a}t^2 + \frac{1}{a}\left(\frac{E_0}{\varepsilon} + \frac{b}{a}\right)t,$$

$$(12) \quad v = \left(v_0 - \frac{b}{a^2} - \frac{E_0}{\varepsilon a}\right)e^{-at} - \frac{b}{a}t + \frac{1}{a}\left(\frac{E_0}{\varepsilon} + \frac{b}{a}\right),$$

$$(13) \quad E = E_0 - \varepsilon b t,$$

$$(14) \quad \begin{cases} V = \dfrac{\varepsilon}{a}\left(v_0 - \dfrac{b}{a^2} - \dfrac{E_0}{\varepsilon a}\right)\left(\dfrac{E_0}{\varepsilon} - \dfrac{b}{a}\right)\left[1 - e^{-at}\right] \\ \qquad + \dfrac{\varepsilon b}{a}\left(v_0 - \dfrac{b}{a^2} - \dfrac{E_0}{\varepsilon a}\right) t e^{-at} \\ \qquad + \dfrac{\varepsilon b^2}{2a} t^2 - \dfrac{\varepsilon b}{2a}\left(2\dfrac{E_0}{\varepsilon} + \dfrac{b}{a}\right) t^2 + \dfrac{E_0}{a}\left(\dfrac{E_0}{\varepsilon} + \dfrac{b}{a}\right) t. \end{cases}$$

Die Gleichungen (11) bis (14) sind die gesuchten Bewegungsgesetze für die Elektrizitätsträger im reibenden Gas. Unter Berücksichtigung von (5) geben sie die Beziehungen zwischen den Größen x, v, E, V, t, i, k, ε, μ, v_0 und E_0. Es ist nun prinzipiell möglich, aus den Gleichungen (11) bis (14) das t, E_0 und v_0 graphisch zu eliminieren. Man erhält dann eine Gleichung in x, v, E, V, i, ε, μ und k. Das ε und μ darf man als bekannt voraussetzen. Gelingt es, x, v, E, V und i experimentell zu ermitteln, so erhält man den Wert von k. Während sich nun x, V und i leicht bestimmen lassen, wird die Messung von v und E auf experimentelle Schwierigkeiten stoßen. Aus diesem Grunde wurde auf die graphische Lösung des Problems verzichtet, zumal sie sehr umständlich ist.

Verhältnismäßig einfach gestaltet sich indessen die Lösung des vorliegenden Problems, wenn man sich damit begnügt, die Beziehungen für den Raumladungsgrenzstrom aufzustellen. Zu diesem Zwecke wird ebenso wie bei Langmuir und Schottky

$$E_0 = v_0 = 0$$

gesetzt. Dann liefern die Gleichungen (11) bis (14):

$$(15)\qquad -\frac{xa^3}{b} = 1 - e^{-at} - at + \frac{(at)^2}{2} = z_x,$$

$$(16)\qquad -\frac{va^2}{b} = -1 + e^{-at} + at = z_v,$$

$$(17)\qquad -\frac{E}{bs} = t,$$

$$(18)\qquad +\frac{Va^4}{sb^3} = +1 - e^{-at} - ate^{-at} - \frac{(at)^2}{2} + \frac{(at)^3}{3} = z_V.$$

Obgleich die Elimination von at aus den vorliegenden Gleichungen analytisch durchführbar ist, da man zur Bestimmung von at höchstens auf eine ganze rationale Funktion dritten Grades in at geführt wird, so läßt sich k in diesen Lösungen dennoch nicht explizit darstellen, da es auch im Exponenten von e auftritt. Es soll deshalb ein tabellarisches Verfahren herangezogen werden, mit dessen Hilfe man aus der Messung der Stromdichte i, des Plattenabstandes $x = l$ und der darangelegten Potentialdifferenz $V = P$ für bekannt vorausgesetztes ε und μ den Wert von t, v, E und V für jeden Punkt x zwischen den Platten bestimmen kann.

Zunächst wird hierzu das a aus (15) und (18) eliminiert, soweit es nicht als Faktor von t auftritt. Dann hat man unter Beachtung von (5)

$$(19)\qquad \frac{V^2}{x^2 i} = 4\pi\left[\frac{\mu}{\varepsilon}\right]^{1/2} \cdot \frac{z_V^2}{z_x^2} = 4\pi\left[\frac{\mu}{\varepsilon}\right]^{1/2} \cdot g(at).$$

Dividiert man (18) durch (15), so erhält man

$$(20)\qquad a = 4\pi\frac{xi}{V} \cdot \frac{z_V}{z_x} = 4\pi\frac{xi}{V} \cdot f(at).$$

Schließlich liefert Division dieser Gleichung durch at:

$$(21)\qquad t = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{V}{xi} \cdot \frac{at}{f(at)} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{V}{xi} \cdot h(at).$$

Ferner liefern die Gleichungen (15) bis (18) unter Beachtung von (5)

$$(22)\qquad x = 4\pi i\frac{\varepsilon}{\mu} \cdot \frac{1}{a^3} \cdot z_x,$$

$$(23)\qquad v = 4\pi i\frac{\varepsilon}{\mu} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot z_v.$$

$$E = 4\pi i \frac{1}{a} \cdot at, \tag{24}$$

$$V = (4\pi)^2 \frac{\varepsilon}{\mu} i^2 \cdot \frac{1}{a^4} \cdot z_V, \tag{25}$$

worin alle Größen in elektrostatischem Maße gemessen sind.

Die Funktionen g, f, h, z_x, z_v, z_V von at sind in Tab. 1 tabuliert. Die Berechnung vollzieht sich dann folgendermaßen:

Für gegebenen Plattenabstand und gegebene Potentialdifferenz der Platten wird der Raumladungsgrenzstrom i gemessen. Dann liefert (19) das zugehörige at. Damit und mit (20) und (21) findet man dann a und die Zeit t, die zum Zurücklegen des Weges zwischen den Platten erforderlich ist. Das gefundene a wird in die Gleichungen (22) bis (25) eingesetzt, die dann für jeden beliebigen Wert von at zwischen Null und dem aus (19) ermittelten Werte die zugehörigen Werte von x, v, E und V liefern.

Ist der Strom reiner Elektronenstrom, so kann man $\mu = 8{,}83 \cdot 10^{-28}$ elektrostat. C.G.S., $\varepsilon = 4{,}68 \cdot 10^{-10}$ elektrostatische C.G.S. setzen. Drückt man dann noch i in Ampere, V in Volt und E in Volt pro Zentimeter aus, so gehen die Gleichungen (19) bis (25) nach Einsetzen der Konstanten über in

$$\frac{V_V^{2/3}}{x^2 i_A} = 2{,}69075 \cdot 10^5 \cdot g(at) = G(at), \tag{26}$$

$$a = 1{,}1310 \cdot 10^{13} \cdot \frac{x i_A}{V_V} \cdot f(at) = \frac{x i_A}{V_V} \cdot F(at), \tag{27}$$

$$t = 8{,}8420 \cdot 10^{-14} \frac{V_V}{x i_A} \cdot h(at) = \frac{V_V}{x i_A} \cdot H(at), \tag{28}$$

$$x = 1{,}9980 \cdot 10^{28} i_A \frac{1}{a^3} z_x = \frac{i_A}{a^3} \cdot Z_x(at), \tag{29}$$

$$v = 1{,}9980 \cdot 10^{28} i_A \frac{1}{a^3} z_v = \frac{i_A}{a^3} \cdot Z_v(at), \tag{30}$$

$$E_V = 1{,}1310 \cdot 10^{13} i_A \frac{1}{a} at = \frac{i_A}{a} \cdot Z_E(at), \tag{31}$$

$$V_V = 2{,}2596 \cdot 10^{41} i_A^2 \frac{1}{a^4} z_V = \frac{i_A^2}{a^4} \cdot Z_V(at). \tag{32}$$

Um die unbequeme Rechnung mit den Konstanten zu ersparen, gibt Tab. 2 die Werte der Tab. 1, mit diesen Konstanten multipliziert.

Einige Beispiele für Gebrauch der Tabellen folgen später.

Die Werte der Tabellen sind mit Hilfe der Grunerschen Tabellen[1]) berechnet, die die Funktion e^{-x} von $x = 0$ bis $x = 10$ geben. Es sollen nunmehr die Werte der Tabellenfunktionen für den Grenzwert $a = 0$ und für großes at berechnet werden. Dabei wird sich gleichzeitig erweisen, daß die Schweidler-Thomsonsche Formel und die Langmuir-Schottkysche Formel Grenzfunktionen der Gleichungen (15) bis (18) oder (26) bis (32) sind.

Tabelle 1.

$k = a\mu$.

(μ = Masse des Elektrizitätsträgers in elektrostat. C.G.S.)

at	$g(at)$	$f(at)$	$h(at)$	$z_s(at)$	$z_v(at)$	$z_V(at)$
0	1,5910	0,0000	1,3333	0,0000	0,0000	0,0000
1	1,7460	0,7385	1,3541	0,1321	0,3679	0,0975
2	1,8932	1,4580	1,3718	0,8647	1,1353	1,2806
3	2,0329	2,1634	1,3867	2,4502	2,0498	5,3009
4	2,1657	2,8588	1,3992	4,9817	3,0183	14,242
5	2,2923	3,5471	1,4096	8,4933	4,0067	30,128
6	2,4133	4,2302	1,4184	12,997	5,0025	54,983
7	2,5294	4,9098	1,4257	18,499	6,0009	90,826
8	2,6409	5,5866	1,4320	25,000	7,0003	139,66
9	2,7484	6,2615	1,4373	32,500	8,0001	203,50
10	2,8522	6,9349	1,4420	41,000	9,0000	284,33
20	3,7417	13,633	1,4670	181	19	2467,6
30	4,4613	20,311	1,4770	421	29	8551,0
40	5,0810	26,983	1,4824	761	39	20534
50	5,6334	33,653	1,4857	1201	49	40418
60	6,1365	40,322	1,4880	1741	59	70201
70	6,6014	46,990	1,4897	2381	69	111880
80	7,0357	53,658	1,4909	3121	79	167470
90	7,4448	60,326	1,4919	3961	89	238950
100	7,8326	66,993	1,4927	4901	99	328330
10^3	24,386	666,99	1,4992	$4{,}990 \cdot 10^5$	999	$3{,}3283 \cdot 10^8$
10^4	76,993	6667,0	1,4999	$4{,}999 \cdot 10^7$	9999	$3{,}3328 \cdot 10^{11}$
10^5	243,44	66667	1,5000	$5{,}000 \cdot 10^9$	99999	$3{,}3333 \cdot 10^{14}$
10^6	769,8	666667	1,5000	$5{,}000 \cdot 10^{11}$	10^6	$3{,}3 \cdot 10^{17}$

1) W. Gruner, Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik 3. S. 120 u. 290. 1906.

Tabelle 2.

$k = 8{,}83 \cdot 10^{-23} \cdot a.$

at	$G(at)$	$F(at)$	$H(at)$	$Z_n(at)$	$Z_e(at)$	$Z_E(at)$	$Z_V(at)$
0	$4{,}2809 \cdot 10^{5}$	0,0000	$1{,}1789 \cdot 10^{-13}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	4,6980	$8{,}3524 \cdot 10^{12}$	1,1973	$2{,}6398 \cdot 10^{27}$	$7{,}3502 \cdot 10^{27}$	$1{,}1310 \cdot 10^{13}$	$2{,}2047 \cdot 10^{40}$
2	5,0941	$1{,}6490 \cdot 10^{13}$	1,2129	$1{,}7276 \cdot 10^{28}$	$2{,}2684 \cdot 10^{28}$	2,2620	$2{,}8484 \cdot 10^{41}$
3	5,4699	2,4468	1,2261	4,8955	4,0955	3,3930	$1{,}1978 \cdot 10^{42}$
4	5,8271	3,2333	1,2372	9,9534	6,0306	4,5240	3,2180
5	6,1680	4,0117	1,2464	$1{,}6969 \cdot 10^{29}$	8,0055	5,6550	6,8072
6	6,4937	4,7844	1,2541	2,5969	9,9949	6,7860	$1{,}2438 \cdot 10^{43}$
7	6,8058	5,4265	1,2606	3,6961	$1{,}2000 \cdot 10^{30}$	7,9170	2,0523
8	7,1060	6,3184	1,2662	4,9949	1,3987	9,0480	3,1694
9	7,3952	7,0817	1,2709	6,4935	1,5984	$1{,}0179 \cdot 10^{14}$	4,5982
10	7,6743	7,8433	1,2750	8,1918	1,7982	1,1310	6,4248
20	$1{,}0066 \cdot 10^{6}$	$1{,}5423 \cdot 10^{14}$	1,2971	$3{,}6164 \cdot 10^{30}$	3,7962	2,2620	$5{,}5750 \cdot 10^{44}$
30	1,2004	2,2972	1,3060	8,4116	5,7942	3,3930	$1{,}9322 \cdot 10^{45}$
40	1,3672	3,0519	1,3107	$1{,}5205 \cdot 10^{31}$	7,7922	4,5240	4,6399
50	1,5158	3,8062	1,3137	2,3996	9,7902	5,6550	9,1327
60	1,6512	4,5604	1,3157	3,4785	$1{,}1788 \cdot 10^{31}$	6,7860	$1{,}5862 \cdot 10^{46}$
70	1,7763	5,3146	1,3172	4,7573	1,3786	7,9170	2,5281
80	1,8931	6,0687	1,3182	6,2358	1,5784	9,0480	3,7841
90	2,0032	6,8227	1,3191	7,9141	1,7782	$1{,}0179 \cdot 10^{15}$	5,3994
100	2,1075	7,5768	1,3199	9,7922	1,9780	1,1310	7,4190
10^{3}	6,5616	$7{,}5438 \cdot 10^{15}$	1,3256	$9{,}9700 \cdot 10^{33}$	$1{,}9960 \cdot 10^{31}$	$1{,}1310 \cdot 10^{16}$	$7{,}5207 \cdot 10^{49}$
10^{4}	$2{,}0717 \cdot 10^{7}$	$7{,}5403 \cdot 10^{16}$	1,3262	$9{,}9880 \cdot 10^{34}$	$1{,}9978 \cdot 10^{32}$	$1{,}1310 \cdot 10^{17}$	$7{,}5308 \cdot 10^{52}$
10^{5}	6,5503	$7{,}5400 \cdot 10^{17}$	1,3263	$9{,}9898 \cdot 10^{35}$	$1{,}9980 \cdot 10^{33}$	$1{,}1310 \cdot 10^{18}$	$7{,}5318 \cdot 10^{55}$
10^{6}	$2{,}0713 \cdot 10^{8}$	$7{,}5400 \cdot 10^{18}$	1,3263	$9{,}9900 \cdot 10^{36}$	$1{,}9980 \cdot 10^{34}$	$1{,}1310 \cdot 10^{19}$	$7{,}5320 \cdot 10^{58}$

1. *Für* $a = 0$. Entwickelt man die Funktionen (15) (16) und (18) nach Potenzreihen, so erhält man

$$(33)\quad \begin{cases} x = -bt^3 \frac{z_x}{(at)^3} = -bt^3 \dfrac{1 - e^{-at} - at + \frac{(at)^2}{2}}{(at)^3} \\ \qquad = +bt^3 \sum_{m=3}^{m=\infty} (-1)^m \cdot \dfrac{(at)^{m-3}}{m!}, \end{cases}$$

$$(34)\quad \begin{cases} v = -bt^2 \frac{z_v}{(at)^2} = -bt^2 \dfrac{e^{-at} - 1 + at}{(at)^2} \\ \qquad = +bt^2 \sum_{m=2}^{m=\infty} (-1)^{m-1} \cdot \dfrac{(at)^{m-2}}{m!}, \end{cases}$$

$$(35)\quad \begin{cases} V = +sb^2t^4 \frac{z_V}{(at)^4} = +sb^2t^4 \dfrac{1 - e^{-at} - ate^{-at} - \frac{(at)^2}{2} + \frac{(at)^3}{3}}{(at)^4} \\ \qquad = +sb^2t^4 \sum_{m=4}^{m=\infty} (-1)^m \cdot \dfrac{(at)^{m-4}}{m(m-2)!}. \end{cases}$$

Hieraus folgt für $a = 0$

$$(36)\quad x = -\frac{b}{6} t^3 = 3{,}330 \cdot 10^{27} \cdot i_A \cdot t^3,$$

$$(37)\quad v = -\frac{b}{2} t^2 = 9{,}990 \cdot 10^{27} \cdot i_A \cdot t^2,$$

$$(38)\quad V_V = +\frac{sb^2}{8} t^4 = 2{,}8245 \cdot 10^{40} \cdot i_A^2 \cdot t^4.$$

Eliminiert man das t aus (36) und (38), so erhält man

$$(39)\quad \frac{V_V^{3/2}}{x^2 i_A} = G(at)\Big|_{at=0} = 4{,}2809 \cdot 10^5$$

oder

$$(40)\quad i_A = 2{,}33 \cdot 10^{-6} \frac{V_V^{3/2}}{x^2},$$

welcher stes mit der Tab. 1 übereinstimmt, und welch letztes die oben (S. 459) angeführte Langmuir-Schottkysche Formel für den Raumladungsgrenzstrom ist.

Schließlich liefert Division von (38) durch (36)

$$(41)\quad t \cdot \frac{x i_A}{V_V} = H(at) = 1{,}1789 \cdot 10^{-13},$$

was ebenfalls im Einklang mit der Tabelle steht. Aus (15), (16), (18) und (27) folgt ohne weiteres $z_x = z_v = z_y = 0$, also auch $Z_x = Z_v = Z_y = 0$ und $F(at) = f(at) = 0$. Schließlich kann E in (31) nur dann einen endlichen, von Null verschiedenen Wert haben, solange i endlich und größer als Null und $a = 0$ ist, wenn auch $Z_E = 0$ ist.

2. *Für großes at.* Da $e^{-20} = 2{,}06 \cdot 10^{-9}$ ist, so kann für $at \geqq 20$ jeder Summand, der e^{-at} enthält, gegen die anderen vernachlässigt werden, denn der hierdurch begangene Fehler ist kleiner als fünf Einheiten der achten Dezimale. Dann wird

$$(42)\qquad \begin{cases} z_x = 1 - at + \dfrac{(at)^2}{2}, \\ z_v = at - 1, \\ z_y = 1 - \dfrac{(at)^2}{2} + \dfrac{(at)^3}{3}. \end{cases}$$

Wird $at \geqq 10^6$ so wird sowohl at wie $at/2$ und $at/3$ groß gegen 1 und man darf setzen

$$(43)\qquad \begin{cases} z_x = \dfrac{(at)^2}{2}, \\ z_v = at, \\ z_y = \dfrac{(at)^3}{3}, \end{cases}$$

was im besonderen unter Beachtung von (19), (20) und (21)

$$(44)\qquad \begin{cases} g(at)\big|_{at \geqq 10^6} = 0{,}7698 \sqrt{at}, \\ f(at)\big|_{at \geqq 10^6} = 0{,}\bar{6} \cdot at, \\ h(at)\big|_{at \geqq 10^6} = 1{,}5 \end{cases}$$

liefert. Zur Berechnung der Tabellen wurden dementsprechend für Werte von at zwischen 20 und 10^6 die Formeln (42), für $at = 10^6$ die Formeln (43) und (44) verwandt.

Setzt man die in (44) gefundenen Werte von g und f in (19) und (20) ein, und eliminiert das at, so erhält man die Schweidler-Thomsonsche Formel für den Raumladungsgrenzstrom bei hohen Drucken

$$i \sim \frac{V^2}{a x^3}$$

Man kann indessen auch das nicht nur für Raumladungsgrenzstrom geltende Schweidler-Thomsonsche Bewegungsgesetz als Grenzfunktion des vorliegenden Problems gewinnen. Für großes a wird e^{-at} nahezu gleich Null. Vernachlässigt man nun in den Gleichungen (11), (12) und (14) alle Summanden, in denen e^{-at} als Faktor oder a im Nenner quadratisch oder von höherer Ordnung auftritt, so erhält man aus (12)

$$v = \frac{1}{a}\left(\frac{E_0}{s} - b\,t\right)$$

oder vermöge (5) und (13)

$$v = \frac{s}{\mu}\cdot\frac{E}{a}. \tag{45}$$

Die Geschwindigkeit ergibt sich also für großes a als der Feldstärke proportional. Für $x = 0$ geht die letzte Gleichung über in

$$v_0 = \frac{s}{\mu}\cdot\frac{E_0}{a}. \tag{46}$$

Ferner liefert (11)

$$x = \frac{1}{a}\left(v_0 + \frac{E_0}{s}\,t - \frac{b}{2}\,t^2\right).$$

Eliminiert man hieraus und aus (13) das t, so erhält man unter Beachtung von (5)

$$E = \left\{\frac{8\pi i}{s/\mu}\,(a\,x - v_0) + E_0^{\,2}\right\}^{1/2}. \tag{47}$$

Schließlich liefert (14)

$$V = \frac{1}{a}\left(E_0 v_0 + \frac{E_0^{\,2}}{s}\,t - b\,E_0\,t^2 + \frac{s\,b^2}{3}\,t^3\right),$$

oder vermöge (5) und (13)

$$V = \frac{1}{a\,4\pi i}\left[E_0 v_0\,4\pi i + \frac{s}{3\mu}\,(E^3 - E_0^{\,3})\right].$$

Führt man (47) hierein ein, so ergibt sich

$$V = \frac{s/\mu}{a\,12\pi i}\left[E_0 v_0\cdot\frac{12\pi i}{s/\mu} + \left\{\frac{8\pi i}{s/\mu}(a\,x - v_0) + E_0^{\,2}\right\}^{3/2} - E_0^{\,3}\right],$$

oder durch Einsetzen von (46)

$$V = \frac{s/\mu}{a\,12\pi i}\left[\left\{\frac{8\pi i}{s/\mu}\,a\,x - E_0\left(\frac{8\pi i}{a} - E_0\right)\right\}^{3/2} + E_0^{\,2}\left(\frac{12\pi i}{a} - E_0\right)\right].$$

Vernachlässigt man $\frac{12\pi i}{a}$ und $\frac{8\pi i}{a}$ gegen E_0, so geht diese Gleichung über in

$$V = \frac{\varepsilon/\mu}{a\,12\pi i}\left[\left(\frac{8\pi i}{\varepsilon/\mu}a x + E_0^2\right)^{3/2} - E_0^3\right],$$

was mit der oben (S. 458) angeführten Schweidler-Thomsonschen Formel identisch ist, wenn man für die Ionenbeweglichkeit

$$R = \frac{\varepsilon}{\mu a} = \frac{\varepsilon}{k}$$

setzt, was für den Reibungskoeffizienten bei hohem Gasdruck die Definition

$$k = \frac{\varepsilon}{R}$$

liefert.

Beispiele für den Gebrauch der Tabellen.

Die folgenden Rechnungen sind mit Hilfe des Rechenschiebers ausgeführt. Für alle drei Beispiele ist angenommen:

$$V_V = P = 10 \text{ Volt}; \quad x = l = 1 \text{ cm}.$$

1. *Zunächst werde ein Überblick über den Zusammenhang zwischen dem Reibungskoeffizienten k und dem Raumladungsgrenzstrom i_A gegeben.* Hierzu bestimmt man mit Hilfe von (26) und (27)

$$i_A = \frac{10^{3/2}}{1^2} \cdot \frac{1}{G(at)} = 31{,}62 \cdot \frac{1}{G(at)},$$

$$a = \frac{i_A}{10} \cdot F(at) = 3{,}162 \cdot \frac{F(at)}{G(at)}$$

Für beliebige Werte von at liefert dann Tab. 2 zusammengehörige Werte von a und i_A, die in nachstehender Tab. 3 zusammengestellt sind. Die letzte Spalte gibt aus $k = a\mu$ für $\mu = 8{,}83 \cdot 10^{-23}$ die Werte für k unter der Annahme reinen Elektronenstroms.

Tabelle 3.

$a\,t$	i_A	a	k
0	$7{,}38 \cdot 10^{-5}$	0	0
1	6,73	$5{,}62 \cdot 10^{7}$	$4{,}96 \cdot 10^{-15}$
2	6,20	$1{,}02 \cdot 10^{8}$	9,03
4	5,42	1,75	$1{,}55 \cdot 10^{-14}$
6	4,87	2,33	2,06
8	4,45	2,81	2,48
10	4,17	3,23	2,85
20	3,14	4,84	4,27
40	2,31	7,06	6,23
60	1,92	8,74	7,71
80	1,67	$1{,}01 \cdot 10^{9}$	8,95
100	1,50	1,14	$1{,}00 \cdot 10^{-13}$
10^2	$4{,}82 \cdot 10^{-6}$	3,63	3,21
10^4	1,53	$1{,}15 \cdot 10^{10}$	$1{,}02 \cdot 10^{-12}$
10^5	$4{,}83 \cdot 10^{-7}$	3,64	3,21
10^6	1,53	$1{,}15 \cdot 10^{11}$	$1{,}02 \cdot 10^{-11}$

2. *Raumladungsgrenzstrom bei Reibung* ($k > 0$).

Es wird beispielsweise $a\,t = 100$ gesetzt. Dann liefert Tab. 2 in Verbindung mit (26) und (27):

$$i_A = \frac{10^{3/2}}{1^2} \cdot \frac{10^{-6}}{2{,}1075} = 1{,}500 \cdot 10^{-5}\ \text{Amp.},$$

$$a = 1{,}50 \cdot 7{,}577 \cdot 10^{8} = 1{,}136 \cdot 10^{9},$$

$$k = 1{,}003 \cdot 10^{-13}.$$

Für beliebige Werte von $a\,t$ zwischen Null und 100 liefert alsdann Tab. 2 und Gleichung (29) bis (32) die in Tab. 4 zusammengestellten Werte.

Tabelle 4.

$a\,t$	t sec	$E_V \frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$	$v \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$	x cm	V_V Volt
0	0,00	0,00	0,00	0,000	0,000
30	$2{,}64 \cdot 10^{-8}$	4,48	$6{,}73 \cdot 10^{8}$	0,086	0,261
40	3,52	5,97	9,06	0,155	0,626
50	4,40	7,46	11,4	0,245	1,23
60	5,28	8,96	13,7	0,356	2,14
70	6,16	10,4	16,0	0,486	3,41
80	7,04	11,9	18,3	0,637	5,10
90	7,92	13,4	20,7	0,809	7,28
100	8,80	14.9	23,0	1,000	10,00

3. *Langmuir-Schottkyscher Raumladungsgrenzstrom* ($k = a = 0$).

Tab. 2 liefert für a $t = 0$ in Verbindung mit (26) und (27) für den Raumladungsgrenzstrom

$$i_A = 7{,}382 \cdot 10^{-5} \text{ Amp}$$

und für die zum Durchfliegen des Plattenabstandes $l = 1$ cm erforderliche Flugzeit des Elektrons

$$t = 1{,}597 \cdot 10^{-8} \text{ sec.}$$

Indem man nun beliebige Werte für t zwischen 0 und $1{,}597 \cdot 10^{-8}$ in die Formeln (31) und (36) bis (38), die das a nicht enthalten, einsetzt, gewinnt man nachstehende Tab. 5.

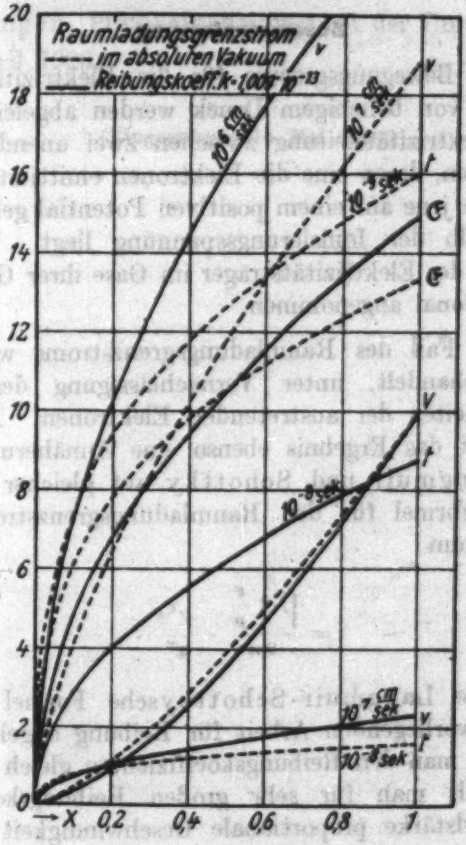


Fig. 1.

Die Werte der Tabb. 4 und 5 sind in Fig. 1 zum Vergleich graphisch dargestellt.

Tabelle 5.

t sec	E_V $\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$	v $\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$	x cm	V_x Volt
0,0	0,00	0,00	0,000	0,00
$0{,}4 \cdot 10^{-8}$	3,34	$1{,}18 \cdot 10^{7}$	0,016	0,04
0,6	5,01	2,65	0,053	0,20
0,8	6,68	4,71	0,126	0,63
1,0	8,35	7,37	0,246	1,54
1,2	10,00	10,7	0,425	3,19
1,4	11,7	14,4	0,674	5,91
1,597	13,3	18,8	1,000	10,00

Zusammenfassung.

1. Die Bewegungsgesetze für die Elektrizitätsträger in einem Gase von beliebigem Druck werden abgeleitet für den Fall der Elektrizitätsleitung zwischen zwei unendlichen, parallelen Ebenen, deren eine die Elektronen emittiert, und deren andere gegen jene auf einem positiven Potential gehalten wird, das unterhalb der Ionisierungsspannung liegt. Dabei wird die Reibung der Elektrizitätsträger im Gase ihrer Geschwindigkeit proportional angenommen.

2. Der Fall des Raumladungsgrenzstroms wird im besonderen behandelt, unter Vernachlässigung der Anfangsgeschwindigkeiten der austretenden Elektronen. Aus diesem Grunde stellt das Ergebnis ebenso eine Annäherung dar wie die von Langmuir und Schottky auf gleicher Grundlage berechnete Formel für den Raumladungsgrenzstrom im absoluten Vakuum

$$i = \frac{\sqrt{2\frac{e}{\mu}}}{9\pi} \cdot \frac{V^{3/2}}{x^2}.$$

3. Diese Langmuir-Schottkysche Formel folgt aus dem in der vorliegenden Arbeit für Reibung abgeleiteten Ergebnis, wenn man den Reibungskoeffizienten gleich Null setzt. Ebenso erhält man für sehr großen Reibungskoeffizienten eine der Feldstärke proportionale Geschwindigkeit der Elektrizitätsträger, sowie die auf dieser Grundlage von v. Schweidler, Richardson und J. J. Thomson berechnete Formel für hohe Gasdrucke von der Größenordnung einer Atmosphäre.

4. Für den Reibungskoeffizienten ergibt sich im letzteren Falle, daß er gleich der Ladung des Elektrizitätsträgers, dividiert durch dessen Geschwindigkeit im Felde von 1 Volt pro Zentimeter ist. Im übrigen ist keinerlei Annahme über die Beziehung des Reibungskoeffizienten zur Beschaffenheit des Gases und zum Gasdruck gemacht, vielmehr soll es dem Experiment vorbehalten bleiben, durch Ermittlung dieser Beziehungen zur Beantwortung der Frage nach dem Walten der Kräfte beizutragen, die beim Zusammenstoß des Elektrons mit dem Gasatom oder bei seiner Ablenkung durch dieses aus seiner Bahn wirksam sind.

Göttingen, Physikalisches Institut der Universität,
April 1920.

(Eingegangen 14. Mai 1920.)

4. *Untersuchungen über die spezifische Wärme bei tiefen Temperaturen;* von *Paul Günther.*

(Aus dem Physik.-chem. Institut der Universität Berlin.)

Mit der von W. Nernst und F. Schwers[1]) angegebenen und in wenigen Einzelheiten modifizierten Apparatur zur Messung wahrer spezifischer Wärmen bei tiefen Temperaturen, die schon früher an dieser Stelle[2]) ausführlich beschrieben worden ist, wurden weitere Versuche angestellt.

Eine erhebliche Verbesserung der Gebrauchssicherheit der ganzen Apparatur konnte dadurch erreicht werden, daß an Stelle der durch die starken Erschütterungen ihres schnell laufenden Motors sehr viel Bruchschaden verursachenden Geyboldschen Molekularpumpe eine Quecksilberpumpe der inzwischen von M. Vollmer[3]) angegebenen Konstruktion gesetzt wurde. Diese Pumpe, die auf der saugenden Wirkung eines Quecksilberdampfstrahles beruht, pumpt zwar nicht mit derselben hohen Geschwindigkeit wie die Molekularpumpe, doch lag hierin für den vorliegenden Zweck kein Nachteil, da die Vollmerpumpe direkt an den Rezipienten angesetzt werden konnte, während bei der Molekularpumpe zum Abfangen der heftigsten Erschütterungen die Zwischenschaltung einer dreifach gewundenen elastischen Glasspirale notwendig gewesen war, die infolge ihrer geringen Weite die Geschwindigkeit des Auspumpens verlangsamte. Ebensowenig wie bei der Molekularpumpe reichte das mit der Vollmerpumpe und der zugehörigen Kondensationspumpe zu erzielende Vakuum zur Messung aus auch nicht, wenn sie während der ganzen Versuchsdauer geheizt wurden und an einem Vorvakuum

1) W. Nernst u. F. Schwers, Sitzungsber. d. preuß. Akademie S. 355. 1914; vgl. ferner ebenda S. 262. 1910; S. 306. 1911.

2) P. Günther, Ann. d. Phys. 51. S. 828. 1916.

3) M. Vollmer, Ber. d. D. Chem. Ges. 52. S. 804. 1919.

von 8 mm lagen. Erst wenn nach dem Abstellen der Pumpen die mit flüssiger Luft gekühlte, ausgeglühte Kokosnußkohle mit dem Rezipienten verbunden wurde, konnte mit den Beobachtungen begonnen werden.

Ferner wurden als Zuleitungsdrähte zu dem eigentlichen Kalorimetersystem für das Bleithermometer und das Thermoelement dünnere Kupferdrähte (0,05—0,2 mm) eingeführt, während die den Heizstrom führenden Drähte noch unverändert gelassen wurden. Es wurde sorgfältig darauf geachtet, daß nicht nur, wie schon bei den früheren Versuchen, keine Berührung des äußeren Kupfermantels mit der Wand des von der Kühlflüssigkeit umspülten Glasgefäßes stattfand, sondern daß auch kein einziger Zuleitungsdraht die Glaswand berührte. Zu dem Zwecke wurden die Drähte fest mit gewachstem Zwirn an den äußeren Kupferzylinder angebunden und oberhalb des Kalorimetersystems sorgfältig zu Spiralen gewickelt, die gleichzeitig auf den Wärmezufluß stauend wirkten. Durch diese Vorsichtsmaßregeln wurde erreicht, daß der Gang der den Temperaturunterschied zwischen dem inneren Kalorimetergefäß und dem äußeren Kupfermantel messenden Thermokraft erheblich verkleinert wurde (1—3 Skalenteile pro Minute für das leere Kalorimeter bei flüssiger Luft gegen 3—5 Skalenteile bei den früheren Versuchen), und daß der Gang bei allen Messungen infolge des Wärmezuflusses zu dem inneren Kalorimeter durch die verhältnismäßig dicken Heizdrähte im Sinne einer Erwärmung des Kalorimetergefäßes gegen den äußeren Kupfermantel gerichtet war, auch dann, wenn nach mehreren Heizungen das innere Gefäß schon um mehrere Grade wärmer war als der äußere Mantel. Da unzureichendes Vakuum im Sinne eines Temperaturausgleiches zwischen dem inneren Gefäß und dem äußeren Mantel wirkt, so ist das Auftreten eines vom Nullpunkt der Thermokraft fortführenden aufsteigenden Ganges ein sicheres Kriterium für das Vorhandensein eines genügend hohen Vakuums, was, wie schon früher beobachtet wurde, durch das Fehlen jeder elektrischen Entladung in dem mit dem Rezipienten kommunizierenden Geißlerrohre noch nicht verbürgt wird.

Mit dieser Apparatur — alles nicht Erwähnte ist unverändert geblieben — wurden folgende Messungen ausgeführt.

Ergebnisse der Messungen.

Da die Wasserstoffverflüssigungsanlage des hiesigen Institutes nach dem Kriege noch nicht wieder in Gang gekommen war, konnte vorläufig nur mit flüssiger Luft gearbeitet werden. Zunächst wurde die Wärmekapazität des leeren Kalorimeters bei den Temperaturen der flüssigen Luft neu bestimmt; die Ergebnisse standen in völliger Übereinstimmung (bis auf 1,1 Proz.) mit den ursprünglich von Nernst und Schwers[1]) gemessenen Werten.

Natrium. 0,3045 Mol.

Reines Natrium (Kahlbaum) wurde unter Petroleum blank geschält, danach mit Äther, der lange über Na-Metall gestanden hatte, abgespült und durch Überblasen eines lebhaften Wasserstoffstromes getrocknet, wobei die Stücke blank blieben.

T	E	WC	WC_v	AW
87,0	2,5782	2,202	1,604	5,26
87,9	3,8630	2,215	1,614	5,30
89,7	3,8715	2,217	1,609	5,29
91,5	4,2934	2,263	1,646	5,40
92,2	4,3256	2,288	1,668	5,48
105,2	4,2927	2,353	1,698	5,58
107,2	4,3170	2,372	1,713	5,63
108,0	4,3513	2,378	1,717	5,64
121,9	4,3941	2,411	1,725	5,67
124,0	4,3941	2,413	1,725	5,67

Antimon. 0,4898 Mol.

Gepulverte Kristalle.

T	E	WC	WC_v	AW
80,4	4,3586	2,849	2,283	5,19
81,6	5,8114	2,794	2,224	5,06
83,7	5,8114	2,797	2,223	5,04
85,6	5,8114	2,808	2,297	5,22
86,2	5,8114	2,808	2,293	5,22
92,0	5,8114	2,965	2,346	5,33
93,3	6,1021	2,977	2,353	5,35
98,1	6,1165	3,043	2,405	5,47

1) W. Nernst u. F. Schwers, a. a. O.

Lithiumhydrid. 0,69914 Mol.

Von Hrn. Mörs dargestellt; anscheinend nicht vollkommen rein.

T	E	WC	WC_k	MW
74,0	1,110	0,991	0,471	0,674
75,2	1,389	1,043	0,513	0,734
76,6	1,488	1,061	0,524	0,749
77,6	1,555	1,052	0,505	0,722
83,2	2,934	1,227	0,647	0,925
85,9	3,110	1,304	0,711	1,017
88,4	3,127	1,370	0,766	1,095
90,5	3,168	1,464	0,851	1,217
—	—	—	—	—
292,7	5,948	6,088	5,718	8,177

Nach der von Debye[1]) entwickelten Formel für den Abfall der spezifischen Wärmen lassen sich die erhaltenen Ergebnisse folgendermaßen ausdrücken.

Natrium $\beta r = 125$.

T	$AW_{\text{beobachtet}}$	$AW_{\text{berechnet}}$
87,0	5,26	5,36
87,9	5,30	5,39
89,7	5,29	5,41
91,5	5,40	5,43
92,2	5,48	5,45
105,2	5,58	5,55
107,2	5,63	5,57
108,0	5,64	5,58
121,9	5,67	5,67
124,0	5,67	5,70

Antimon $\beta r = 140$.

T	$AW_{\text{beobachtet}}$	$AW_{\text{berechnet}}$
80,4	5,19	5,14
81,6	5,06	5,16
83,7	5,04	5,20
85,6	5,22	5,22
86,2	5,22	5,24
92,0	5,33	5,33
93,3	5,35	5,34
96,0	5,36	5,36
98,1	5,47	5,39

1) W. Debye, Ann. d. Phys. **39**, S. 789. 1912.

Lithiumhydrid $\beta r = 825$.

T	$\frac{1}{4} M W_{beob.}$	$\frac{1}{4} M W_{ber.}$
74,0	0,34	0,34
75,2	0,37	0,35
76,6	0,38	0,36
77,6	0,36	0,38
83,2	0,46	0,46
85,9	0,51	0,52
88,4	0,55	0,56
90,5	0,61	0,61
93,0	0,67	0,66
95,7	0,69	0,71
—	—	—
292,7	4,09	4,12

Die Berechnung der βr-Werte aus den Schmelzpunkten nach der Formel von Lindemann[1]) ergibt für Natrium 190, für Antimon 142 und für Lithiumhydrid 909 (Schmelzpunkt 680°).

Die Messungen werden von Hrn. stud. phil. Simon weiter fortgesetzt.

Hrn. Prof. Dr. Nernst sage ich für seine Anregung zur Ausführung dieser Messungen und seine liebenswürdige Unterstützung meinen aufrichtigen Dank.

1) W. Lindemann, Phys. Zeitschr. 11. S. 609. 1910.

(Eingegangen 27. April 1920.)

3. Erwin Schrödinger. Grundlinien einer Theorie der Farbenmetrik im Tagessehen. (6. Mitteilung.) 481
4. Reinhold Fürth. Zur Beweglichkeitsbestimmung aus der Brownschen Bewegung in einem Einzelstäbchen. (Aus dem physikalischen Institut der deutschen Universität in Prag.) 501
5. Max Jakob. Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit des Wassers im Bereich von 0 bis 80°. (Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.) 531
6. H. Dember und M. Uibe. Über die spektrale Polarisation des diffusen Sonnenlichtes in der Erdatmosphäre 611
7. Hilding Faxén. Der Gültigkeitsbereich der Stokes-Oseenschen Widerstandsformel. Erörterung einiger von J. Weyssenhoff gefundener Unstimmigkeiten 551

Die Redaktion der Annalen wird von den unterzeichneten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: München, Leopoldstraße 9/I.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für die verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls größere Exemplarzahl gewünscht wird, so muß dies bei Rücksendung der ersten Korrekturbogen an die Druckerei auf deren erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Ausführlicher Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren ferner möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskripts recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskripts (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst so, wie es in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Bandes, Jahres und Seitenzahl anzubringen.

1920. № 22.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 63.

1. *Grundlinien einer Theorie der Farbenmetrik im Tagessehen;*

von Erwin Schrödinger.

(III. Mitteilung.)

Der Farbenmetrik II. Teil: Höhere Farbenmetrik (eigentliche Metrik der Farbe).

§ 1. **Notwendigkeit, über die niedere Metrik hinauszugehen.**

Im ersten Teil dieser Arbeit hatten wir es mit denjenigen Beziehungen zwischen Farben zu tun, welche experimentell gewonnen werden durch ausschließliche Verwendung des *Gleichheitsurteils*, d. h. der Einstellung zweier aneinander grenzender Farbfelder auf völlige Ununterscheidbarkeit, so daß die Trennungslinie, wenn sie sonst durch nichts bezeichnet ist, als durch die eventuelle Farbverschiedenheit, verschwindet. Diese Beziehungen, gewöhnlich als Gesetze der Lichtmischung, von uns als niedere Farbenmetrik oder Affinität der Farbe bezeichnet, fanden ihre vollkommen adäquate Darstellung durch Abbildung der Farbenmannigfaltigkeit auf ein räumliches Vektorbüschel mit affiner Geometrie. Wir haben wiederholt darauf hingewiesen, daß wegen der genauen Übereinstimmung der primitiven Farberfahrung mit den Axiomen der affinen Geometrie solche und nur solche Beziehungen zwischen den darstellenden Vektoren ein kolorimetrisches Korrelat haben, die invariant sind gegen affine Transformation. Eine ganze Anzahl einfacher Beziehungen, für welche das nicht zutrifft, so insbesondere der Winkel und das Längenverhältnis zweier Vektoren von verschiedener Richtung, dann der Abstand zweier Vektorspitzen (Farbenpunkte), mußten ohne Korrelat im Farbenraum bleiben, weil diese Größen durch geeignete Auswahl der Darstellung unter lauter gleichberechtigten Darstellungen (oder, was dasselbe ist, durch Ausübung einer affinen Transformation auf die einmal gewählte Darstellung) innerhalb weiter Grenzen beliebig variiert werden können.

Auf der anderen Seite sagt uns unser Gefühl und die Beurteilung der Farben, die wir aus dem täglichen Leben mit-

bringen, daß unsere bisherige Auffassung noch sehr unvollständig ist, daß es noch mancherlei *Beziehungen zwischen Farben* gibt, die ihrerseits noch kein *geometrisches Korrelat* in unserem Vektorraum gefunden haben, sondern von uns völlig unbeachtet geblieben sind. Wir können aus unserer Darstellung durchaus nicht ablesen, welche von zwei Farben verschiedener Reizart heller, welche dunkler ist. Das Längenverhältnis der Vektoren hat damit zunächst nichts zu tun, denn dreien Farben, als Eichfarben, dürfen wir drei ganz beliebige Vektoren zuweisen, z. B. auch einer sehr hellen einen ganz kurzen Vektor und gleichzeitig einer viel dunkleren einen sehr langen. Aus ähnlichen Gründen dürfen wir aus dem Abstand zweier Farbpunkte niemals einen Schluß auf den Grad der Verschiedenheit der betreffenden Farben ziehen; und doch wissen wir, daß Urteile über die relative Größe des Unterschiedes bei verschiedenen Farbenpaaren („diese Farbstufe ist sehr viel größer als jene") mindestens in extremen Fällen mit aller Entschiedenheit und Sicherheit gefällt werden.

Daß all dies aus dem Rahmen unserer bisherigen Entwicklungen herausfällt, kann uns nicht wundern, weil uns ja eben bisher zwei Farben nur entweder gleich oder ungleich waren und wir uns weder um den Grad der Ungleichheit noch etwa um irgendwelche „spezifische" Gleichheit („im Farbton". „in der Sättigung", „in der Helligkeit") gekümmert haben. *Der Gedanke, der im folgenden durchgeführt werden soll, ist der, daß alle Begriffsbildungen dieser Art gewonnen und quantitativ festgelegt werden können ausschließlich aus der in der Einleitung des ersten Teiles besprochenen Einstellung auf größte Ähnlichkeit.* Die dort erwähnte Einstellung b) auf *Ebenunterschiedbarkeit* dient dabei zur Verankerung der, übrigens sehr allgemeinen, Hypothese im Experiment.

Ein sehr naheliegender Versuch, Begriffe, wie Helligkeitsverhältnis, Farbverschiedenheit und ähnliches quantitativ festzulegen, wäre der, daß man sich denkt, unter den vielen affingeometrisch gleichwertigen Darstellungen sei doch eine ausgezeichnet, und zwar *eben dadurch, daß* das Längenverhältnis, der (gewöhnliche euklidische) Abstand der Farbpunkte und ähnliches, jene Bedeutung wirklich erhalten, die ihnen zu geben wir unwillkürlich uns versucht fühlen. Eine derartige Deutung wäre als sehr spezieller Fall in dem allgemeinen Ansatz, den

wir machen werden, enthalten, erweist sich übrigens auf den ersten Blick als unmöglich, und zwar wegen des, im großen und ganzen gültigen, Fechnerschen Gesetzes für reine Intensitätsänderungen. Betrachten wir zwei Farben

$$A \qquad (1+\varepsilon)\,A,$$

wo ε so groß gewählt ist, daß die Farben vollkommen deutlich unterscheidbar sind, während sie es bei, sagen wir, 10 mal kleinerem ε durchaus nicht wären. Dann werden die Farben

$$10\,A \qquad (10+\varepsilon)\,A$$

ununterscheidbar sein. Der euklidische Abstand der Vektorspitzen ist aber für beide Farbenpaare der gleiche, wie immer man die Vektordarstellung im übrigen spezialisieren mag. Man wird sich nicht gern entschließen, zwei Farbstufen als gleich zu bezeichnen, deren eine vollkommen deutlich ist, während die andere unter der Schwelle der Erkennbarkeit liegt.

§ 2. **Maß der Verschiedenheit. Das Linienelement des Farbenraums.**

Wenn wir ein Maß der Verschiedenheit zweier beliebiger Farben X (Koordinaten x_1, x_2, x_3) und Y (Koordinaten y_1, y_2, y_3) besäßen, d. h. eine Funktion

$$s\,(x_1,\ x_2,\ x_3,\ y_1,\ y_2,\ y_3),$$

welche diese Verschiedenheit bestimmt, so wäre klar, daß die *Einstellung auf größte Ähnlichkeit* darin bestehen müßte, die Funktion s unter gewissen, durch die Versuchsanordnung gesetzten Nebenbedingungen für die Farben X und Y (z. B. X fest, Y in bestimmter Weise veränderlich) zu einem relativen Minimum zu machen. Das liegt in den Begriffen und bedeutet keine besondere Annahme.

Die allgemeine Hypothese, die wir nun mit Helmholtz einführen, betrifft das Maß des Unterschiedes, und zwar das Maß des Unterschiedes für nahe benachbarte Farben. Wir nehmen an

1. daß für

$$y_1 = x_1 + d\,x_1, \quad y_2 = x_2 + d\,x_2, \quad y_3 = x_3 + d\,x_3$$

das Quadrat von s, wofür wir dann passend $d\,s^2$ schreiben, eine quadratische Form der Koordinatendifferentiale ist

$$(1) \qquad d\,s^2 = \sum_1^3 \sum_1^3{}_k\, a_{ik}\,dx_i\,dx_k \qquad a_{ik} = a_{ki},$$

wobei die a_{ik} gewisse Funktionen von x_1, x_2, x_3 bedeuten;

2. daß für je zwei *eben unterscheidbare* Farben die dx_i (daher auch ds) als Differentiale angesehen werden dürfen (d. h. die a_{ik} nicht merklich variieren) und *daß ds für jedes solche Farbenpaar denselben Wert hat.*

Der Wert, welchen man dem ds für ein solches Farbenpaar beilegt, ist belanglos und bedeutet nur eine Normierung. Am besten denkt man zunächst eine Standardfarbe gewählt und definiert ds für die ebenmerkliche Intensitätssteigerung dieser Standardfarbe, als den hierfür nötigen *relativen Intensitätszuwachs*. Wegen des (gewöhnlichen) Fechnerschen Gesetzes, das bekanntlich für einen großen Teil des Farbenraumes gültig ist[1]), stellt sich dann heraus, daß die genaue Angabe der Standardfarbe unnötig ist, wenn sie nur in jenem Bereich gewählt wird. (Ich sprach von der Standardfarbe nur darum, um zu zeigen, daß die *allgemeine* Theorie von der Gültigkeit des Fechnerschen Gesetzes ganz unabhängig ist; wäre es ungültig, so müßte man eben die Standardfarbe *genau* angeben; man hätte übrigens auch ds für ebenunterscheidbare Farben $= 1$ setzen können und damit nur alle späteren Formeln mit einem konstanten Proportionalitätsfaktor behaftet.)

Die *wesentliche* Annahme ist natürlich die zweite. Die erste mußte sich daraus streng genommen auf Grund der Messungen der Unterschiedsempfindlichkeit experimentell ergeben. Ich glaube kaum, daß die Messungen je widersprechen werden. Etwas anderes als die geradzahlige Wurzel aus einer Form von der betreffenden geradzahligen Ordnung ist aus handgreiflichen Gründen unmöglich (Zeichenumkehr aller Differenziale muß ds in allen Fällen ungeändert lassen).

Bekanntlich ist durch den Ansatz (1) eine *Metrik*, im allgemeinen Sinne von Bernhard Riemann, für die Mannigfaltigkeit von Zahlentripeln $(x_1\, x_2\, x_3)$ vollkommen festgelegt, wenn man ds als *Linienelement* dieser Mannigfaltigkeit auffaßt. Wir können also jetzt und erst jetzt von einer eigentlichen Metrik des Farbenraumes sprechen. Seiner allgemeinen Form nach ist der Ansatz invariant nicht nur gegen die früher betrachteten linearen, sondern gegen ganz beliebige Trans-

1) A. König und E. Brodhun, Sitzungsber. d. Berliner Akad. d. Wiss. Juli 1888, S. 917; Juni 1889, S. 641.

formationen der x_i; aber natürlich verändern dabei die a_{ik} ihre Form, und zwar in wohlbekannter Weise. Der *allgemeine* Ansatz gilt also für jedes System von Eichwerten; sobald wir dagegen ein spezielles Funktionensystem a_{ik} ausprobieren wollen, müssen wir das für ein ganz bestimmtes System, d. h. für ein ganz bestimmtes Tripel von Grundfarben tun; natürlich werden wir erwarten und hoffen, daß das Linienelement die einfachste Gestalt annehmen wird für die „wahren" Grundfarben, zu denen wir im ersten Teil auf ganz andere Weise gelangt sind.

Für viele Zwecke, nämlich immer dann, wenn es sich nur um den Vergleich *sehr ähnlicher Farben* handelt, finden wir mit dem Helmholtzschen differenziellen Ansatz das Auslangen. Für andere Zwecke, insbesondere für die „stark heterochrome" Photometrie, benötigen wir das Verschiedenheitsmaß s auch für endlich verschiedene Farben. Nun ist zu beachten, daß ds nach (1) zwar eine homogene Funktion ersten Grades der dx_i ist, aber nicht das Differenzial einer bestimmten Koordinatenfunktion. Dennoch gibt es nur *eine* konsequente, ja wohl überhaupt nur eine mögliche Verallgemeinerung des Helmholtzschen Verschiedenheitsmaßes, wenn man nicht die Aufstellung eines solchen Maßes für stark verschiedene Farben überhaupt für unmöglich erklären will. Es ist die folgende Annahme

3. die Verschiedenheit beliebiger Farben wird nach der Größe von

$$\int ds,$$

genommen für die kürzeste Verbindungslinie (geodätische Linie) zwischen den beiden Farbpunkten in der nach (1) vermessenen Mannigfaltigkeit, beurteilt.

Es braucht kaum erwähnt zu werden, daß dabei als kürzeste Verbindungslinie nicht etwa die gerade Linie im Vektorenraum, sondern jene Kurve zu verstehen ist, für welche jenes Integral den kleinsten Wert annimmt.

Anschaulich kolorimetrisch gesprochen kommt unsere Annahme 3, unter Rücksicht auf die Annahme 2, darauf hinaus: zwei Farben werden für um so ähnlicher erklärt, mit je weniger ebenunterscheidbaren Zwischenstufen man den kontinuierlichen Übergang von der einen zur anderen bewerkstelligen

kann, *wenn man die Zwischenstufen für diesen Zweck so geschickt wie möglich wählt.*

Für die anschauliche Vorstellung dürfen wir übrigens den im ersten Teil benützten Vektorenraum beibehalten, ja wir dürfen ihn sogar beliebig spezialisieren, wenn man sich nur vor Augen hält, daß Begriffe wie Länge einer Kurve, Senkrechtstehen (oder überhaupt Winkel) zweier von einem Punkt ausgehenden Richtungen u. dergl. *nicht* nach der unmittelbaren Anschauung, sondern nach Riemanns Geometrie beurteilt werden müssen. Dann dürfen wir sogar *ganz beliebige* Transformationen mit den Koordinaten vornehmen, wie sie in der Folge sich nützlich erweisen werden.

Die anschauliche Fassung unserer drei Annahmen, wenn wir von vornherein „gleichweit" und „gleichstark verschieden" identifizieren, ist diese:

Als gleichweit entfernt von irgendeinem Farbpunkt F gelten die Farbpunkte, die von ihm ebenunterscheidbar sind (Annahme 2). Sie liegen auf einem kleinen Ellipsoid mit dem Mittelpunkt F (Annahme 1). Alle Durchmesser aller dieser kleinen Ellipsoide gelten als gleichlang (Annahme 2). Weitere Flächen gleichen Abstandes um F erhält man für *kleine* Abstände dadurch, daß man alle Durchmesser des ersten Ellipsoides, das wir „Streuungselipsoid" nennen wollen, in demselben Verhältnis vergrößert, es sind also zu ihm ähnliche, ähnlich liegende Elipsoide; das Abstandsverhältnis ist das Vergrößerungsverhältnis (Annahme 1). Diese Euklidische Konstruktion gilt aber streng nur im Unendlichkleinen. Um Flächen von gleichem *endlichen* Abstand um F zu konstruieren, hat man die Durchmesser des Streuungsellipsoides nicht *in ihrer Richtung* (im Euklidischen Sinn) proportional zu vergrößern, sondern man muß *in geradester Richtung* im Riemannschen Sinn, d. h. auf einer Geodätischen fortschreiten um gleiche Beträge des Linienintegrals $\int ds$, welches dann den Abstand mißt (Annahme 3).

Wir werden nun aus diesen Annahmen zunächst einige allgemeine Folgerungen ziehen, ohne noch die Koeffizienten a_{ik} zu spezialisieren. Sodann werden wir ein spezielles Linienelement vorschlagen und näher untersuchen, das, obzwar sicher nicht *genau* zutreffend, doch bei größter Einfachheit die beste Annäherung an die Wirklichkeit bilden dürfte.

§ 3. Begriff der Helligkeit.

Die Möglichkeit, *stark* verschiedene Farben gegeneinander zu photometrieren, wird von vielen geleugnet. Dagegen unterliegt es keinem Zweifel, daß man zwei Farben, die sich in der Reizart (d. h. nach dem Sprachgebrauch: in Farbton und Sättigung) nur *wenig* unterscheiden, auf gleiche Helligkeit bringen kann dadurch, daß man die objektive Intensität der einen Farbe geeignet abändert. An diesen „fast monochromen" Helligkeitsvergleich, der auch in der experimentellen Methodik immer mehr die Oberhand zu gewinnen scheint, knüpfen wir unseren Begriff der Helligkeit. Wir fassen ihn natürlich auf als eine Einstellung auf größte Ähnlichkeit.

Seien OF und OF' (Fig 1) die Richtungen zweier nahe benachbarter Farbvektoren, F ein *fester* Punkt auf der einen, F' ein *variabler* Punkt auf der anderen. Um diejenige Lage von F' zu finden, die dem Punkt F am nächsten liegt, haben wir um F ein Ellipsoid gleichen Abstandes in solcher Größe zu zeichnen, daß die Gerade OF' es gerade berührt. Der Berührungspunkt F'' ist die ausgezeichnete Farbe, auf die eingestellt wird; d. h. nach dem Sprachgebrauch, den wir hiermit zu dem unseren machen wollen: F'' ist mit F *gleich hell*. Führen wir die gleiche Konstruktion für alle möglichen, der Richtung OF benachbarten Richtungen aus, so erfüllen die gleichhellen Punkte F'' ein Flächenelement, wir wollen es kurz als das „gleichhelle Flächenelement" in F bezeichnen. Da man den Tangentenkegel von O an eines der kleinen Ellipsoide als Zylinder mit der Achse OF auffassen darf, so ist das gleichhelle Flächenelement einfach die zu OF konjugierte Durchmesserebene des Ellipsoids. Nun ist die Gleichung der Ellipsoide[1])

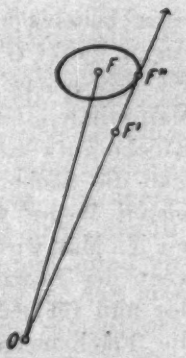


Fig. 1.

$$a_{ik}\, d\, x_i\, d\, x_k = \text{const.} \tag{2}$$

Seien die Koordinaten von F .... $x_1\, x_2\, x_3$, von F'' .... $x_1 + d\, x_1,\ x_2 + d\, x_2,\ x_3 + d\, x_3$, so ist die Fortschreitungs-

1) Wir lassen, wie es üblich geworden ist, die Summenzeichen von nun an fort. Über doppelt auftretende allgemeine Indizes ist stets von 1—3 zu summieren!

richtung OF im Punkte F, sagen wir δx_1, δx_2, δx_3 (die reine Intensitätsänderung), bestimmt durch

$$\delta x_1 : \delta x_2 : \delta x_3 = x_1 : x_2 : x_3.$$

Die $d x_k$ genügen der Gleichung der zu dieser Richtung bezüglich der Ellipsoide (2) konjugierten Durchmesserebene, also

$$a_{ik} x_i \, d x_k = 0; \tag{3}$$

das ist die Differentialgleichung des gleichhellen Flächenelementes im Punkt $x_1 x_2 x_3$. Im Sinne der Riemanngeometrie steht es auf der Richtung OF im Punkt F senkrecht.

Soll nun der Begriff der Helligkeit überhaupt einen Sinn haben, so wird man verlangen müssen, daß zwei Farben, die mit einer dritten gleichhell sind, es auch untereinander sein müssen. Das kann man zu folgender Konstruktion benützen. Man schreite von F aus auf dem gleichhellen Flächenelement in einer beliebigen Richtung um ein kleines Stück fort, bis zu einem Punkt G; von da auf dem *durch G gelegten* gleichhellen Flächenelement wieder in beliebiger Richtung bis H usf. Man erhält so entlang einer Kurve, die übrigens auch beliebige Knicke aufweisen darf, einen *gleichhellen Streifen*. Nun richte man die Sache so ein, daß man nach Zurücklegung eines gewissen Weges wieder auf einen Punkt von OF stößt, sagen wir K. Man wird verlangen müssen, daß K mit F übereinstimmt, wenn der Begriff der Helligkeit einen Sinn haben soll. Wenn das nun für jeden beliebigen Weg gelten soll, so müssen sich die Flächenelemente (3) zu Integralflächen zusammenfassen lassen, auf denen dann die früher betrachteten gleichhellen Streifen verlaufen. Der Pfaffsche Differentialausdruck auf der linken Seite muß also integrabel sein, er muß einen Multiplikator $\mu(x_1, x_2, x_3)$ zulassen, derart, daß

$$\frac{\partial \mu a_{ik} x_i}{\partial x_l} = \frac{\partial \mu a_{il} x_i}{\partial x_k} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} k, l = 1, 2, 3 \\ k \neq l. \end{matrix}$$

Das ist nun für ganz beliebige Funktionen a_{ik} bekanntlich keineswegs der Fall, sondern nur, wenn die a_{ik} einer gewissen Bedingung genügen. Es muß nämlich

$$\mu \cdot \left(\frac{\partial a_{ik} x_i}{\partial x_l} - \frac{\partial a_{il} x_i}{\partial x_k} \right) = - \left(a_{ik} x_i \frac{\partial \mu}{\partial x_l} - a_{il} x_i \frac{\partial \mu}{\partial x_k} \right).$$

Multipliziert man jede der drei Gleichungen dieser Art, die sich für die drei Kombinationen (k, l) ergeben, mit $a_{rs} x_r$,

wo m der dritte Index, und addiert, so kommt rechts identisch Null. Es muß also

$$\sum_{(k\,l\,m)} a_{pm}\, x_p \left(\frac{\partial\, a_{ik}\, x_i}{\partial\, x_l} - \frac{\partial\, a_{il}\, x_i}{\partial\, x_k} \right) = 0 .$$

Das eigenartige Summenzeichen soll andeuten, daß außer den beiden, nach Übereinkunft nicht angezeigten Summationen über die Indizes i und p, das Indextripel (k, l, m) die drei Wertekombinationen (1, 2, 3), (2, 3, 1) (3, 1, 2) zu durchlaufen hat. Die Relation läßt sich noch etwas vereinfachen, da wegen $a_{ik} = a_{ki}$ gilt

$$\frac{\partial\, a_{ik}\, x_i}{\partial\, x_l} - \frac{\partial\, a_{il}\, x_i}{\partial\, x_k} = x_i \left(\frac{\partial\, a_{ik}}{\partial\, x_l} - \frac{\partial\, a_{il}}{\partial\, x_k} \right) .$$

Daher

$$\sum_{(k\,l\,m)} a_{pm} \left(\frac{\partial\, a_{ik}}{\partial\, x_l} - \frac{\partial\, a_{il}}{\partial\, x_k} \right) x_i\, x_p = 0 . \tag{4}$$

Diese Bedingung ist *notwendig* für die Integrabilität von (3), es kann übrigens gezeigt werden, daß sie dafür auch *hinreicht.*[1])

Nun sind die a_{ik} nach unserer Annahme durch Messungen der Unterschiedsempfindlichkeit prinzipiell empirisch bestimmbare Koordinatenfunktionen und es wäre ganz wohl denkbar, daß sie der Differentialgleichung (4) *nicht* genügen. In diesem Falle hätte der Begriff der Helligkeit überhaupt keine quantitativ faßbare Bedeutung. Ob er sie hat, kann nur durch das Experiment entschieden werden, am besten wohl so, daß man in sich geschlossene Farbzykeln, die in kleinen Stufen fortschreiten, durchphotometriert und nachsieht, ob sich als Produkt aller aufeinanderfolgender Helligkeitsverhältnisse 1 ergibt, oder bei öfterer Wiederholung des Versuches eine systematische Abweichung von der Einheit. Daß in letzterem Falle der Begriff der Helligkeit als sinnlos aufgegeben werden müßte, ist übrigens unabhängig von aller Theorie einleuchtend.

Die große Unklarheit, die über diesen Begriff in der Literatur herrscht, könnte wohl den Verdacht erwecken, daß der zweite Fall in der Natur zutrifft. Glücklicherweise sind gerade während der Niederschrift dieser Abhandlung am hiesigen Institut Helligkeitsmessungen von der beschriebenen Art an Zykeln Ostwaldscher Farbtäfelchen ausgeführt worden, die-

1) A. R. Forsyth, Theorie der Differentialgleichungen, Deutsche Ausgabe (Leipzig, Teubner, 1893), I. Teil, S. 7ff.

demnächst von anderer Seite veröffentlicht werden und die Integrabilität von (3) mit sehr großer Annäherung sicherstellen. Wir werden sie im folgenden als exakt erfüllt ansehen, halten aber die Feststellung für wichtig, daß es sich hier um ein rein empirisches Resultat handelt, und daß die Sache unter anderen Verhältnissen, z. B. im parazentralen Sehen und bei Einmischung des Purkinjephänomens möglicherweise anders liegen kann.

Es gibt dann also bei geeigneter Wahl des Multiplikators $\mu(x_1, x_2, x_3)$ eine Funktion $h(x_1, x_2, x_3)$, für welche

$$\frac{\partial h}{\partial x_k} = \mu a_{ik} x_i \qquad k = 1, 2, 3. \tag{5}$$

Beim Fortschreiten auf den Flächen

$$h = \text{const},$$

die den Farbenraum zwiebelschalenartig zerlegen, ist (3) erfüllt, die Flächen sind Orthogonalflächen (im Riemanngeometrischen Sinne) der vom Ursprung aus gezogenen Farbvektoren. Wir werden sie als Flächen gleicher Helligkeit oder *Isolychnen* und h als ein vorläufiges Maß der Helligkeit bezeichnen.

h ist aber durch (5) noch keineswegs bestimmt. Jede eindeutige Funktion von h stellt dieselbe Flächenschar dar und ist als Maß der Helligkeit von vornherein gleichberechtigt. Es ist also eine Normierung nötig. Die Normierung gestaltet sich nur dann einfach, wenn wir annehmen dürfen, daß die Isolychnen im Vektorraum ähnlich und ähnlichliegend sind (im elementargeometrischen Sinne) bezüglich des Ursprungs. Experimentell bedeutet das, daß auch die Helligkeitsgleichheit (ebenso wie die Farbengleichungen) bei proportionaler Veränderung der objektiven Intensität beider Lichtgemische erhalten bleibt. Wir sind uns bewußt, daß diese Permanenz aus der Permanenz der Farbengleichungen *keineswegs folgt*, glauben sie aber dennoch auf Grund allgemeiner Erfahrung mindestens *als Näherung* annehmen zu dürfen, trotz des widersprechenden Befundes von A. König[1]), der mindestens zum

1) A. König, Beiträge zur Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane (Helmholtz-Festschrift), S. 309, 1891; vgl. auch F. Allen, Phil. Mag. 38. S. 81. 1919.

Teil auf dem Purkinjeschen Phänomen beruhen dürfte (vgl. jedoch unten S. 519).

Man kann dann den Helligkeitsparameter h so normieren, daß er proportional wird dem Abschnitt der Isolychne auf irgendeinem Farbvektor (weil diese Abschnitte eben von Isolychne zu Isolychne für alle Farben proportional variieren). Experimentell bedeutet das, daß man übereinkommt, eine von 2, 3, 4 Glühlampen beschienene Fläche als 2, 3, 4 mal so hell zu bezeichnen.[1]) Rechnerisch bedeutet es, daß h eine homogene Funktion ersten Grades der Koordinaten sein soll. Man hat dann noch dem Eulerschen Satz über homogene Funktionen

$$h = x_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial h}{\partial x_3} = x_k \frac{\partial h}{\partial x_k},$$

also nach (5)

$$h = \mu \cdot a_{ik} x_i x_k; \qquad \mu = \frac{h}{a_{ik} x_i x_k}.$$

In (5) eingesetzt

$$\frac{\partial \lg h}{\partial x_l} = \frac{\sum_i a_{il} x_i}{\sum_i \sum_k a_{ik} x_i x_k} \qquad l = 1, 2, 3. \tag{6}$$

Diese drei Gleichungen bestimmen lg h bis auf eine additive Konstante, h also bis auf einen belanglosen Proportionalitätsfaktor.

§ 4. Spezieller Ansatz für das Linienelement.

Um die folgenden Rechnungen nicht allzusehr zu kompli zieren, wollen wir sie sogleich für das spezielle Linienelement durchführen, das ich in Vorschlag bringe und für eine gute Annäherung in einem großen Gebiete des Farbenraumes halte. Das sicherste wäre natürlich, die a_{ik} im ganzen Farbenraum experimentell zu bestimmen durch Messung der Unterschiedsempfindlichkeit für alle möglichen Abwandlungsrichtungen jeder Farbe; und dann erst, mit den experimentell bestimmten Koeffizienten, die Theorie der ähnlichsten Farbe, von der die vorstehende Helligkeitstheorie nur ein Speziallfall, an den verschiedensten Anordnungen durchzuprüfen. Leider ist dieser Weg in seiner Vollständigkeit experimentell hoffnungslos

1) Beim gebräuchlichen Helligkeitsvergleich mit dem Nicol wird die Möglichkeit einer solchen Fassung des Begriffes der Helligkeit stillschweigend vorausgesetzt.

schwierig. Experimentell ist das Linienelement bisher nur längs einiger Farbvektoren[1]), dann längs gewisser Kurven[2]) auf dem Spektralkegel ausgemessen worden, Messungen vom Spektralkegel gegen Weiß zu (Empfindlichkeit für „Sättigungsänderung") fehlen fast völlig, es liegen in dieser Richtung nur einige Messungen von M. Gottlieb[3]) vor (nicht an Spektralfarben, sondern an Pigmenten). Viel Material läßt sich gewiß aus dem prachtvollen Ostwaldschen Farbatlas schöpfen, nur sind diese Farben hinsichtlich ihrer Koordinaten nicht definiert und ihre genaue Bestimmung erfordert viel Mühe.

Es bleibt also nichts übrig als versuchsweise einen Ansatz für das Linienelement zu machen, der den hauptsächlichsten Anforderungen genügt, und diesen Ansatz dann im Detail durchzuprüfen an Messungen der Unterschiedsempfindlichkeit einerseits und an ähnlichsten Farbeinstellungen andererseits.

H. v. Helmholtz hat auf Grund gewisser, an das Fechnersche Gesetz anknüpfenden Überlegungen folgenden Ansatz versucht, der gelten sollte, wenn die x_i auf die wahren Grundfarben bezogen sind:

$$a_{ik} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k; \quad a_{ii} = \frac{1}{3\,x_i^2}, \tag{7}$$

d. h.

$$ds^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{dx_1^2}{x_1^2} + \frac{dx_2^2}{x_2^2} + \frac{dx_3^2}{x_3^2}\right). \tag{8}$$

Dieser Ansatz hat sich schon insofern nicht bewährt, als er die Königschen Messungen der Farbunterschiedsschwelle im Spektrum nicht wiederzugeben vermochte, wenn man unter den x_i die Koordinaten bezüglich der Fehlfarben der Dichromaten verstand. Es mußten neue Grundfarben ad hoc berechnet werden, um das Linienelement für ebenunterscheidbare Farbenpaare einigermaßen konstant zu machen; die einfache Auffassung der Dichromasie, die wir im § 10 des ersten Teils dargelegt haben, wird damit über den Haufen geworfen.

Das Linienelement (8) führt aber auch — was Helmholtz nicht bemerkt zu haben scheint — zu einer ganz un-

1) A. König u. E. Bradhun, Sitzungsber. d. Berliner Akad. d. Wiss. Juli 1888, S. 917 u. Juni 1889, S. 641.

2) A. König u. C. Dieterici, Ann. d. Phys. **22.** S. 579. 1884; Uhthoff, Gräfes Archiv **34** (4), S. 1; F. Exner, Wiener Ber. (2a) **111.** S. 857. 1902; O. Steindler, Wiener Ber. (2a) **115.** S. 39. 1906.

3) M. Gottlieb, Wiener Ber. (2a) **126.** S. 1299. 1917.

möglichen Helligkeitsfunktion; es ist also für sich allein, ganz ohne Beziehung zur Theorie der Dichromasie, mit der Erfahrung im Widerspruch. Daß die Integrabilitätsbedingung und die Homogenitätsannahme des vorigen Paragraphen erfüllt sind, davon überzeugt man sich leicht. Nun ergibt (6) mit den speziellen Werten (7) der a_{ik}

$$\frac{\partial \lg h}{\partial x_l} = \frac{1}{3x_l} \qquad l = 1, 2, 3,$$

also

$$h = \text{const} \cdot \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}.$$

Diese Helligkeitsfunktion ist aber ganz unmöglich, da sich z. B. für die Helligkeitsverteilung im Sonnenspektrum ein scheußlicher Kamelrücken mit zwei ausgeprägten Maximis ergibt, und zwar sowohl für die Königschen, aus der einfachen Dichromatentheorie abgeleiteten, als auch für die von Helmholtz ad hoc umgerechneten Grundempfindungsvalenzen. Aber noch aus einem allgemeineren Grunde ist diese Helligkeitsfunktion, mithin dieses Linienelement unannehmbar.

Es ist in letzter Zeit, namentlich durch Versuche von W. Abney[1]), dann von F. Exner[2]) und von K. W. F. Kohlrausch[3]) bewiesen worden, daß die Helligkeit, jedenfalls sehr angenähert, eine additive Eigenschaft der Farben ist, d. h. daß gleichhelle Lichter gemischt, gleichhelle Lichter ergeben. Diese Additivität der Helligkeit folgt keineswegs aus der

---

1) W. Abney, Phil. Trans. A. 1899; ibid. **205**. S. 333. 1906. Da Abney, im Gegensatz zu Exner und Kohlrausch, „stark heterochrom" photometriert (vgl. unten § 7), sind seine Ergebnisse, von unserem im § 3 vertretenen Standpunkt aus, nicht von so grundlegender Bedeutung wie die der beiden anderen Forscher. Bei dieser Gelegenheit will ich auch begründen, warum ich von den vielen, schönen Ergebnissen der geistvollen *Flimmermethode* hier, wo es sich um Klarstellung der Grundbegriffe handelt, nirgends Gebrauch mache: weil meines Erachtens erst feststehen muß, *was Helligkeit ist, dann* kann man empirisch feststellen, *daß* und *wie* sie sich aus diesen theoretisch höchst verwickelten Nachbildversuchen richtig berechnen läßt, und *dann* darf man die Methode für theoretische Zwecke einwandfrei verwenden.

2) F. Exner, Wiener Ber. (2a) **127**. S. 1829. 1918; ibid. **129**. 1920 (im Druck).

3) K. W. F. Kohlrausch, Mitteilungen des techn. Versuchsamtes in Wien, 9. Jahrg. 1920 (im Druck).

Additivität der Farb*gleichungen*, sie wurde sogar von Helmholtz, dem die letztere vollkommen feststand, bezweifelt, und zwar auf Grund einiger sehr interessanter Versuche am Farbenkreisel, auf die wir im § 6 näher zurückkommen. Dort werden wir zeigen, daß diese Versuche von Helmholtz falsch gedeutet wurden und in Wahrheit mit der Additivität der Helligkeit *nicht* im Widerspruch stehen. Wir werden letztere also auf der Suche nach dem richtigen Linienelement mit als Führer benützen. Unsere Darstellungsweise hat ja den Vorteil, daß wir uns damit in keiner Weise festlegen, sondern schlimmstenfalls nur eine gewisse Näherung an die Wirklichkeit erreichen, die später immer verbessert werden kann.

Soll nun

$$\begin{cases} h(x_1, x_2, x_3) + h(x_1', x_2', x_3') \\ \quad = h(x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3') \end{cases} \tag{9}$$

als Identität gelten für irgend zwei Wertetripel x_i und x_i', so folgt durch Differentiation nach x_l

$$\frac{\partial h}{\partial x_l}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial h}{\partial x_l}(x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3') \qquad l = 1, 2, 3$$

und da x_i und $x_i + x_i'$ wiederum zwei beliebige Wertetripel sind, so müssen die drei partiellen Differentialquotienten $\partial h / \partial x_l$ Konstante sein. h muß also die Form haben

$$h = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, \tag{10}$$

homogen linear, damit auch die integrale Forderung (9) erfüllt bleibe. Diese Form wird, beiläufig bemerkt, durch eine lineare Transformation nicht geändert, gilt also für beliebige Eichfarben.

Um mit der Erfahrung in Einklang zu sein, muß also unser Linienelement jedenfalls als *Isolychnen eine Ebenenschar*

$$a x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = \text{const} \tag{11}$$

ergeben; d. h. nach § 3, es muß so beschaffen sein, daß die Ebenen dieser Schar überall auf der Richtung des Radiusvektors ($d x_1 : d x_2 : d x_3 = x_1 : x_2 : x_3$) senkrecht stehen (im Riemanngeometrischen Sinn). Nun verwandelt die Transformation

$$\xi_1 = \sqrt{a_1 x_1}, \quad \xi_2 = \sqrt{a_2 x_2}, \quad \xi_3 = \sqrt{a_3 x_3}$$

Radienvektoren in Radienvektoren, die Ebenenschar (11) aber in die Kugelschar

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = \text{const.}$$

Das im Raume der ξ_i euklidische Linienelement

$$4\,(d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2) = a_1 \frac{dx_1^2}{x_1} + a_2 \frac{dx_2^2}{x_2} + a_3 \frac{dx_3^2}{x_3} = ds^2$$

würde also unserer Forderung genügen.

Dieser einfachste Ansatz, auf den ich durch ein Aperçu von Hrn. W. Pauli jun. aufmerksam gemacht wurde, verbietet sich aber wegen des Fechnerschen Gesetzes. In der Tat, wenn man Farben gleicher Reizart, aber verschiedener Intensität nur in der Intensität variiert

$$dx_1 = \varepsilon x_1, \quad dx_2 = \varepsilon x_2, \quad dx_3 = \varepsilon x_3 \quad (\varepsilon \ll 1),$$

so würde sich

$$ds = \varepsilon \sqrt{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3}$$

ergeben, also nicht konstant für *konstantes* ε, wie es das Fechnersche Gesetz verlangt, sondern für ein mit der Quadratwurzel aus der Helligkeit umgekehrt proportionales ε, was der Erfahrung widerspricht.

Wir brauchen aber deshalb den errungenen Vorteil richtiger Isolychnen nicht aufzugeben. Denn die Isolychnen ändern sich, wie man aus (3) erkennt, nicht, wenn dem Linienelement noch eine beliebige Koordinatenfunktion als Faktor hinzugefügt wird. Wählen wir für diesen Faktor die reziproke Helligkeit

$$\frac{1}{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3},$$

so erhalten wir die Fechnerstufe konstant nicht nur bei gleicher Reizart, sondern für alle Farben überhaupt, wie es die Erfahrung für ein großes Gebiet des Farbenraumes zu verlangen scheint.

Auf Grund dieser Überlegungen möchten wir also folgendes Linienelement als das den Tatsachen wahrscheinlich am nächsten kommende vorschlagen:

$$(12)\quad \begin{cases} a_{ik} = 0, & i \neq k, \\ a_{ii} = \dfrac{a_i}{x_i (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)}, & \text{d. h.} \\ ds^2 = \dfrac{1}{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3} \left(\dfrac{a_1 dx_1^2}{x_1} + \dfrac{a_2 dx_2^2}{x_2} + \dfrac{a_3 dx_3^2}{x_3} \right), \end{cases}$$

worin die a_i gewisse, experimentell zu bestimmende Konstante, die so zu wählen sind, daß

$$h = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

die *Helligkeit* der Farbe (x_1, x_2, x_3) mißt.

Dieses Linienelement liefert nach Konstruktion die eben angegebene, mit der Erfahrung übereinstimmende Helligkeitsfunktion und das gewöhnliche Fechnersche Intensitätsgesetz mit derselben Konstante für alle Farben.

Daß es nicht das einzig mögliche ist, das diesen Forderungen genügt, folgt schon daraus, daß es gegen lineare Transformation der x_i *nicht invariant* ist; jede Form, in die es durch eine solche Transformation übergeführt wird, wäre jedenfalls ebenso möglich.

Wir nehmen an, daß die einfache Gestalt (12) *für die wahren Grundfarben zutrifft,* als die wir, vorläufig jedenfalls, die von König und Dieterici abgeleiteten ansehen.

§ 5. Farbunterschiedsempfindlichkeit im Spektrum.

Als erste weitere Erfahrungskontrolle suchen wir aus unserem Ansatz die Farbunterschiedsempfindlichkeit im Spektrum abzuleiten. Diese wird rationeller Weise stets unter Ausgleichung des Helligkeitsunterschiedes der verglichenen Spektralfarben gemessen, weil das Resultat sonst von der speziellen Intensitäts- oder Helligkeitsverteilung in dem benützten Spektrum abhängt. Man schreitet von einer Stelle λ bis zu jener Nachbarstelle $\lambda + d\lambda$ fort, welche von λ *auch dann noch,* und zwar eben noch, unterscheidbar ist, wenn man den Helligkeitsunterschied so gut wie möglich ausgleicht.

Sind also

$$x_i, \quad x_i + d x_i$$

die Koordinaten der ebenunterschiedenen Farbtöne λ, $\lambda + d\lambda$, wie sie im Spektrum sich vorfinden, so ist das Linienelement nicht zwischen diesen, sondern etwa zwischen

$$(1 + \varepsilon) x_i, \quad x_i + d x_i$$

gemessen. Der zum Helligkeitsausgleich erforderliche Wert von ε ergibt sich leicht zu $d \lg h$.

Es ist also

$$(13)\qquad \begin{cases} ds^2 = a_{ik}(x_i\, d\lg h - dx_i)\,(x_k\, d\lg h - dx_k) \\ \quad = a_{ik} x_i x_k\, d\lg\frac{x_i}{h}\, d\lg\frac{x_k}{h}\,. \end{cases}$$

Für unser Linienelement (12) also

$$(14)\qquad ds^2 = \frac{a_1 x_1}{h}\left(d\lg\frac{x_1}{h}\right)^2 + \frac{a_2 x_2}{h}\left(d\lg\frac{x_2}{h}\right)^2 + \frac{a_3 x_3}{h}\left(d\lg\frac{x_3}{h}\right)^2$$

mit

$$h = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3.$$

Hier haben wir h und die x_i als Funktionen von λ anzusehen; Ableitungen nach λ sollen durch einen Strich bezeichnet werden. Als für die Ziffernrechnung geeignete Form ergibt sich:

$$(15)\qquad ds = \sqrt{\frac{a_1 x_1}{h}\left(\frac{x_1'}{x_1} - \frac{h'}{h}\right)^2 + \frac{a_2 x_2}{h}\left(\frac{x_2'}{x_2} - \frac{h'}{h}\right)^2 + \frac{a_3 x_3}{h}\left(\frac{x_3'}{x_3} - \frac{h'}{h}\right)^2}\cdot d\lambda.$$

Als Zahlenmaterial benützen wir, wegen des Auftretens der Differentialquotienten, die aus empirischen Daten heikel zu bestimmen sind, die schon von Helmholtz[1]) zu demselben Zweck sorgfältig ausgeglichenen Werte. Helmholtz gibt aber die Werte r, g, v für die *Elementarfarben* Königs, wir müssen sie erst mit den Königschen Koeffizienten[2]) auf die Grundfarben umrechnen. Es ist vorteilhaft, dabei gleich die Multiplikation mit den Konstanten a_i in die Umrechnung einzubeziehen; d. h. wir beziehen die x_i von nun an (und so auch in den folgenden Abschnitten) nicht auf solche Einheiten der Grundfarben, die, gemischt, Weiß ergeben, sondern auf solche, die *gleichhell* erscheinen bzw. in Mischungen gleichen Helligkeitswert haben. Die Helligkeitsfunktion wird dadurch

$$(10')\qquad h = x_1 + x_2 + x_3\,,$$

das Linienelement im allgemeinen Fall

$$(12')\qquad ds^2 = \frac{1}{h}\left(\frac{dx_1^2}{x_1} + \frac{dx_2^2}{x_2} + \frac{dx_3^2}{x_3}\right)$$

und in unserem jetzt behandelten Fall

$$(15')\qquad ds = \sqrt{\frac{x_1}{h}\left(\frac{x_1'}{x_1} - \frac{h'}{h}\right)^2 + \frac{x_2}{h}\left(\frac{x_2'}{x_2} - \frac{h'}{h}\right)^2 + \frac{x_3}{h}\left(\frac{x_3'}{x_3} - \frac{h'}{h}\right)^2}\cdot d\lambda\,.$$

1) H. v. Helmholtz, Zeitschr. f. Psychol. u. Physiol. d. Sinnesorgane **3**. S. 1. 1891 (Tafel I).

2) A. König u. C. Dieterici, ibid. **4**. S. 241. § 23. 1892.

Die a_i, von denen nur die Verhältnisse in Betracht kommen, verdanke ich der Freundlichkeit F. Exners, der jetzt eben Versuche darüber angestellt hat:

$$a_1 = 43 \cdot 33, \quad a_2 = 32 \cdot 76, \quad a_3 = 1. \tag{16}$$

Für die Umrechnung unserer neuen x_i aus den Elementarvalenzen r, g, v ergibt sich so

$$\begin{cases} x_1 = 45 \cdot 6\, r - 6 \cdot 84\, g + 4 \cdot 56\, v, \\ x_2 = 6 \cdot 57\, r + 26 \cdot 3\, g, \\ x_3 = \qquad\qquad\qquad v. \end{cases} \tag{17}$$

Dieselben Formeln gelten natürlich für die gestrichenen Größen.

Für $d\lambda$ endlich benütze ich die neueren experimentellen Resultate von Uhthoff.[1])

Die beigefügte Tabelle ist ohne weiteres verständlich.

Tabelle 1.

λ	x_1	x_2	x_3	h	x_1'	x_2'	x_3'	h'	1. $100\frac{ds}{d\lambda}$	2. $d\lambda$ beob.	3. $100\,ds$ ber.	4. $d\lambda$ ber.
640	119	23,8	—	142	−5,12	−1,37	—	− 6,49	0,586	2,97	1,74	1,81
630	176	40,2	—	216	−5,58	−2,01	—	− 7,59	0,712	1,68	1,20	1,49
620	236	64,5	—	301	−6,77	−3,10	—	− 9,87	0,793	1,24	0,98	1,34
610	286	100,5	—	387	−4,03	−3,93	—	− 7,96	1,100	1,08	1,11	0,96
600	317	144,1	—	461	−2,56	−4,87	—	− 7,43	1,194	1,02	1,20	0,89
590	340	198	—	538	−1,63	−5,91	—	− 7,54	1,207	0,91	1,10	0,88
580	354	259	—	613	−1,14	−5,62	—	− 6,76	0,915	0,88	0,81	1,16
570	359	324	—	683	−0,42	−5,50	—	− 5,92	0,789	1,10	0,87	1,34
560	359	364	0,22	723	+0,68	−2,63	—	− 1,95	0,456	—	—	2,33
550	339	375	0,30	714	+3,04	+0,45	−0,0138	+ 3,48	0,401	1,66	0,67	2,64
540	301	358	0,49	659	+4,83	+2,98	−0,0233	+ 7,79	0,420	—	—	2,53
530	230	315	0,75	546	+8,10	+4,98	−0,0326	+13,05	0,991	1,88	1,86*	1,07
520	158	255	1,10	414	+6,06	+7,12	−0,0400	+13,14	0,618	—	—	1,72
510	105	171	1,55	278	+5,28	+8,18	−0,0536	+13,41	0,632	1,29	0,83	1,68
500	55,7	97,2	2,2	155	+3,65	+5,17	−0,0887	+ 8,73	1,493	—	—	0,71
490	36,7	64,0	3,6	104	+0,97	+1,89	−0,208	+ 2,65	1,58	0,72	1,14	0,67
480	41,8	52,0	7,9	101	−0,60	+1,02	−0,52	− 0,10	—	0,95	—	—
										Mittel	1,06	

Die ersten neun Spalten geben das nach obiger Formel umgerechnete Helmholtzsche Zahlenmaterial, die letzten vier: 1. 100 × die ausgerechnete Quadratwurzel; 2. die Beob-

1) Uhthoff, Archiv f. Ophthalmol. 34 (4), S. 1; zitiert nach W. Nagel, Handbuch d. Physiologie des Menschen, III 1, S. 251 (Braunschweig, Viehweg, 1904).

achtungen Uhthoffs; 3. das Produkt beider, dieses sollte konstant sein; 4. das Mittel von Kolonne 3. dividiert durch Kolonne 1. als $d\lambda$ *berechnet.*

Die Konstanz von ds ist sehr schlecht erfüllt, ungefähr ebenso schlecht wie bei Helmholtz. Trägt man sich jedoch die berechneten und beobachteten Werte von $d\lambda$ graphisch auf (Fig. 2), so sieht man, daß der allgemeine Verlauf der Unterschiedsempfindlichkeit im Spektrum von der Theorie getroffen,

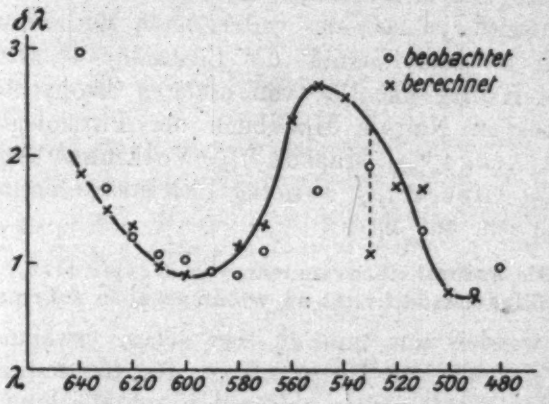


Fig. 2.

nur etwas übertrieben wird, wobei noch die Extremwerte gegen Rot verschoben erscheinen.

Ich will durchaus nicht behaupten, daß man aus dieser ungefähren Übereinstimmung ein starkes Argument zugunsten des vorgeschlagenen Linienelementes entnehmen kann. Aber ich glaube wirklich, daß man auch von einer vollkommen richtigen Theorie eine bessere nicht hätte erwarten können. Man bedenke, daß keine einzige zur Rechnung benützte Zahl ad hoc angenommen wurde, sondern daß dieselben dem heterogensten Beobachtungsmaterial entstammen (König, Uhthoff, Exner); und ferner, daß die Lage der wahren Grundfarben noch keineswegs völlig sicher ist, wie wir am Ende des ersten Teiles dieser Abhandlung auseinandergesetzt haben. Auch ist insbesondere die Interpolation von Differentialquotienten (auf deren Wert es aber hier sehr entscheidend ankommt) aus Kurven von rein empirischem, ziemlich unregelmäßigem Verlaufe, wie es die Königschen sind, immer eine

gewagte und unsichere Sache. Welche Fehler dabei unterlaufen, erkennt man an der merkwürdigen Lage des *theoretischen* Punktes $\lambda = 530$, der, wie bei Helmholtz so auch nach meiner Rechnung, auch aus dem *theoretischen* Kurvenverlauf völlig herausfällt.

Als Mittel des ds für eben unterscheidbaren Farben ergab sich sehr nahe 0,01 (vgl. Tab. 1, vorletzte Spalte). Diese Zahl sollte nach der Theorie mit der Fechnerschen Intensitätsstufe übereinstimmen. Leider ist der Vergleich kein scharfer, weil letztere von verschiedenen Beobachtern sehr verschieden angegeben wird, je nach der verwendeten Methode und wohl auch nach der Individualität des Beobachters. Den größten Wert gibt König mit $^1/_{57}$, von anderen Beobachtern führt von Kries in Nagels Handbuch der Physiologie (III. 1, S. 250) an: Arago $^1/_{130}$, Masson $^1/_{120}$, Volkmann $^1/_{100}$, Helmholtz $^1/_{167}$, Aubert $^1/_{186}$. Dem fügt sich unsere hier berechnete Zahl ($^1/_{94}$) sehr gut ein.

§ 6. Die Farbscheibenversuche von Helmholtz, die der Helligkeitsadditivität zu widersprechen scheinen.

Wir wenden uns nun zu den schon erwähnten Farbscheibenversuchen von Helmholtz[1]), aus denen dieser fälschlich auf das Nichtbestehen einer additiven Mischungsregel für die Helligkeit schloß. Sie liefern uns ein Beispiel für eine Einstellung auf ähnlichste Farbe, die *kein* gewöhnlicher Helligkeitsvergleich ist. Helmholtz hat das nicht erkannt, darin lag eben sein Irrtum.

Der Versuch verläuft folgendermaßen. Man erfüllt einen Farbenkreisel, unter Aussparung des kleinen Winkels ε' (etwa $^1/_{50}$ bis $^1/_{100}$ des Vollwinkels), der zunächst lichtlos bleibt, mit einem Gemisch zweier Pigmentfarben F und V. Dieses Gemisch nennen wir den *Grund* G. Genauer, es sollen F bzw. V die Farben sein, die man erblickt, wenn man die ganzen $2\pi - \varepsilon'$ mit dem ersten bzw. zweiten Pigment erfüllt und rotieren läßt, G die Farbe, wenn λ' mit dem ersten, μ' mit dem zweiten erfüllt sind, wobei $\lambda' + \mu' = 2\pi - \varepsilon'$. Dann ist

$$G = \lambda F + \mu V; \quad \lambda + \mu = 1 \tag{18}$$

$$\left[\lambda = \frac{\lambda'}{2\pi - \varepsilon'}, \quad \mu = \frac{\mu'}{2\pi - \varepsilon'}\right].$$

1) H. v. Helmholtz, Zeitschr. f. Psychol. u. Phys. 2. S. 1. 1891.

F soll das dunklere Pigment sein. — Nun wird auf einem inneren Ring der Winkel ε' auch noch mit F ausgefüllt, auf einem anstoßenden äußeren Ring wird nur ein Bruchteil des Winkels ε' mit V ausgefüllt, sagen wir der Winkel ζ', während $\varepsilon' - \zeta'$ schwarz gedeckt bleibt.[1]) Nun wird ζ' solange variiert, bis der Grenzkreis zwischen den beiden Ringen möglichst undeutlich, die beiden Farben also möglichst wenig unterscheidbar werden, was Helmholtz mit der Einstellung auf gleiche Helligkeit identifiziert. Nach ihm haben also die Farbzuwüchse

$$\frac{\varepsilon'}{2\pi - \varepsilon'} F = \varepsilon F; \quad \frac{\zeta'}{2\pi - \varepsilon'} V = \zeta V \tag{19}$$

$$\left[\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2\pi - \varepsilon'}, \quad \zeta = \frac{\zeta'}{2\pi - \varepsilon'}\right]$$

zum Grunde G die Helligkeit gleichstark geändert. Wenn nun die Helligkeit eine additive Eigenschaft wäre, so müßten die Helligkeiten von F und V sich umgekehrt verhalten wie die Zuwüchse ε und ζ oder die kleinen Winkel ε' und ζ':

$$\frac{h(F)}{h(V)} = \frac{\zeta}{\varepsilon} = \frac{\zeta'}{\varepsilon'} \tag{20}$$

und dieses Verhältnis müßte sich konstant ergeben, *unabhängig von der Farbe des Grundes.* Das ist nun nicht der Fall. Das Winkelverhältnis variiert entschieden, in extremen Fällen wie 1 : 2, und zwar in *dem* Sinne, daß eine im Grund *wenig* vertretene Farbe hinsichtlich ihrer „aufhellenden Kraft" begünstigt zu werden scheint. Helmholtz deutet das durch Verallgemeinerung des Fechnerschen Gesetzes.

Wir wollen nun zeigen, daß das Winkelverhältnis ζ'/ε' *nicht* mit dem Helligkeitsverhältnis zusammenfällt, daß die Unabhängigkeit dieses Bruches von der Farbe des Grundes *nicht* zu erwarten ist, und daß im besonderen unser Linienelement (12) bzw. (12′), welches die Helligkeitsfunktion (10) bzw. (10′) impliziert, gerade die beobachtete Variation des Winkelverhältnisses mit der Farbe des Grundes voraussehen läßt.

Seien (Fig. 3) OF und OV die Farbvektoren der reinen Pigmente (im oben angegebenen Sinn), dann liegt die Vektorspitze des Grundes

$$G = \lambda F + \mu V \quad [\lambda + \mu = 1]$$

1) Bei „F" und „V" denke man hier „*feste*" und „*variierte*" Farbe!

auf der Verbindungslinie $F\,V$. Eine spezielle Lage von G ist gezeichnet. Die Farbe des *inneren* Ringes erhält man, indem man an $O\,G$ einen kleinen Vektor $G\,G'$ von der Richtung $\overrightarrow{O\,F}$ und der Länge $\varepsilon \cdot \overline{O\,F}$ ansetzt. (Diese und die folgenden Konstruktionen sind in der Figur für eine mittlere und für die beiden Randlagen ausgeführt, wo G mit F bzw. V zusammenfällt.) Auf dem *äußeren* Ring wird zu $O\,G$ ein Vektor $G\,G''$ von der Richtung $\overrightarrow{O\,V}$ und *solcher* Länge hinzugefügt, daß G'' möglichst nahe an G' zu liegen kommt. Man hat, ähnlich wie früher, um G' ein Streuungsellipsoid (2) in solcher Größe zu zeichnen, daß es die Gerade $G\,G''$ (die Parallele zu $O\,V$ durch G) eben berührt; G'' ist der Berührungspunkt. *Er liegt auf der zu $G\,G''$* (bzw. in den Randlagen zu $F\,F''$ und $V\,V''$) *konjugierten Durchmesserebene, nicht auf der zu $O\,G$* (bzw. $O\,F$, $O\,V$) *konjugierten Durchmesserebene, ist also im allgemeinen mit G'* (bzw. F', V') *nicht gleichhell.* Nur in dem einen Grenzfall, wenn G mit V zusammenfällt, sind die beiden Richtungen, daher auch die konjugierten Ebenen identisch, nur in diesem Falle liegt auch hier ein gewöhnlicher Helligkeitsvergleich vor.

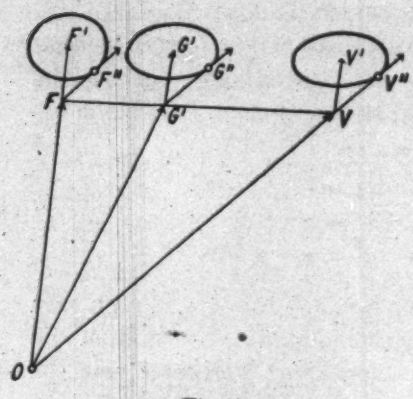


Fig. 3.

Nur wenn die beim Versuch variierte Farbe dieselbe ist wie die Farbe des Grundes, läßt sich aus dem Verhältnis der kleinen Zusatzwinkel unmittelbar das Helligkeitsverhältnis der beiden Pigmente berechnen.

Im übrigen erkennt man ohne weiteres aus der Figur, daß in allen anderen Fällen $G\,G''$ *noch verlängert* werden müßte, um die zu $G\,O$ konjugierte Ebene zu durchstoßen; ein *kleinerer* Zusatz der variierten Farbe V (*kleiner*, als für Helligkeitsgleichheit nötig wäre) reicht aus zur Herstellung größter Ähnlichkeit. D. h. (wenn man den Helmholtzschen Irrtum begeht) die variierte Farbe scheint auf andersfarbigem Grund relativ stärker aufhellend zu wirken als auf ihrem eigenen;

wie Helmholtz wirklich gefunden hat. Auch kann man vermuten, daß die Abweichung um so größer wird, je mehr die Richtungen OG und GG'' voneinander abweichen, d. h. je näher G an F heranrückt.

Der letzte Schluß ist jedoch nicht sicher, weil die Gestalt des Streuungsellipsoides mitvariiert, wenn sein Mittelpunkt G' sich entlang der Geraden $V'F'$ verschiebt.

Quantitativ ergibt sich folgendes. Seien die Koordinaten von

$$F \ldots . \ y_i$$
$$V \ldots . \ z_i$$
$$G \ldots . \ x_i = \lambda y_i + \mu z_i .$$

Die Koordinaten von

$$G' \text{ sind } x_i + \varepsilon y_i$$
$$G'' \text{ sind } x_i + \zeta z_i .$$

Der Vektor $G'G''$ hat daher die Komponenten

$$\zeta z_i - \varepsilon y_i .$$

Er muß konjugiert sein (bezüglich des Streuungsellipsoids in G') zur Richtung GG'', deren Komponenten sich wie die

$$z_i$$

verhalten. D. h. es muß

$$a_{ik} (\zeta z_i - \varepsilon y_i) z_k = 0$$

oder

$$\frac{\zeta}{\varepsilon} = \frac{\sum_i \sum_k a_{ik} y_i z_k}{\sum_i \sum_k a_{ik} z_i z_k} . \tag{21}$$

Dies ist nach (20) *das scheinbare Helligkeitsverhältnis der festen Farbe F zur variierten Farbe V.* Dabei sind unter den a_{ik} streng genommen ihre Werte im Punkte G' zu verstehen, wofür natürlich mit ausreichender Genauigkeit die Werte in G, also für $x_i = \lambda y_i + \mu z_i$ gesetzt werden dürfen.

Das wahre Helligkeitsverhältnis muß, wie wir gesehen haben, durch dieselbe Formel gegeben sein, wenn man den a_{ik} ihre Werte im Punkte V verteilt.

Spezialisieren wir für unser Linienelement (12′), setzen also

$$a_{ik} = 0 \quad [i \neq k] \qquad a_{ii} = \frac{1}{(x_1 + x_2 + x_3) x_i} ,$$

so ergibt sich

$$\frac{\zeta}{s} = \frac{\frac{x_1}{x_1} \cdot y_1 + \frac{x_2}{x_2} \cdot y_2 + \frac{x_3}{x_3} \cdot y_3}{\frac{x_1}{x_1} \cdot x_1 + \frac{x_2}{x_2} \cdot x_2 + \frac{x_3}{x_3} \cdot x_3}, \tag{22}$$

wo $x_i = \lambda y_i + \mu z_i$. Man erkennt, daß sich das *richtige* Helligkeitsverhältnis ergibt, wenn die x_i mit den z_i zusammenfallen.

Wie das scheinbare Helligkeitsverhältnis mit der Farbe des Grundes (x_i) variiert, kann man sich auf folgende Weise klar machen. In der Formel (22) treten zu den Grundempfindungsvalenzen „fälschlich" noch drei *Gewichtsfaktoren* z_i/x_i hinzu. Eine Grundvalenz erhält bei der Bildung des Verhältnisses ein um so größeres Gewicht, je mehr sie in der variierten Farbe (z_i) gegenüber der Farbe des Grundes (x_i) überwiegt. Daß der Grund mit der variierten Farbe nicht übereinstimmt, liegt aber an einer Beimischung der festen Farbe (y_i). Die Gewichtsfaktoren bevorzugen also gerade jene Grundvalenzen, an denen die variierte Farbe reich ist auch gegenüber der festen, und zwar um so mehr, je stärker der Grund abweicht. D. h. sie bevorzugen immer mehr die variierte Farbe, je stärker der Grund von ihr abweicht — genau wie es Helmholtz gefunden hat.

Ein quantitativer Vergleich ist nicht möglich, da die Koordinaten der von Helmholtz benützten Farben nicht bekannt sind. Nur eines müßte man verlangen: da Helmholtz drei verschiedene Pigmente in drei Kombinationen benützt hat, kann man nachsehen, ob die Resultate der drei Grenzfälle, in denen $G = V$ war, *konsistent* sind, d. h. ob das Produkt der der Helligkeitsverhältnisse

$$\frac{\text{Rot}}{\text{Blau}} \times \frac{\text{Blau}}{\text{Grün}} \times \frac{\text{Grün}}{\text{Rot}}$$

der Einheit gleich ist, wie die Theorie für diesen Fall verlangt (weil eben in diesem Fall eine gewöhnliche Helligkeitsmessung vorliegt). Bildet man aus den Daten a. a. O. die Verhältnisse, so ergibt sich leider

$$1{,}33 \times 0{,}41 \times 1{,}20 = 0{,}66.$$

Die anderen Extremfälle geben, ebenso kombiniert, 1,55. auf $^1/_2$ und $^1/_2$ gemischtem Grund ergibt sich 1,19.

In diesem Punkte entsprechen die Versuche also nicht der Theorie — aber auch nicht der von Abney, Exner, Kohlrausch, nach Methoden, die einer viel höheren Präzision fähig sind, gesammelten Erfahrung. Wenn die variierte Farbe mit der des Grundes übereinstimmt, handelt es sich ja wirklich nur um eine reine Intensitätsänderung auf dem äußeren Ring (bei konstantem inneren Ring), die sich mit einem Polarimeter sehr viel genauer und bequemer vornehmen läßt, weil man nicht für jede Veränderung den Kreisel aufzuhalten und die Farbscheiben zu verschieben braucht, sondern die verschiedenen Einstellungen kontinuierlich aneinander reiht und hinsichtlich ihrer Güte vergleicht. Und gerade auf diesem Wege ist die Konstanz des Helligkeitswertes einer Pigmentfarbe in den verschiedensten Gemischen von Exner mit großer Schärfe festgestellt worden.

§ 7. Die Geodätischen. Das Maß endlicher Verschiedenheit. Heterochrome Photometrie.

Bisher haben wir immer nur den Ansatz für das Linienelement in differentieller Form, als Maß der Verschiedenheit von *wenig* verschiedenen Farbenpaaren, benützt; von der dritten Annahme des § 2, daß für *stark* verschiedene Farben des Linienintegral von ds längs der kürzesten Verbindungslinie die Verschiedenheit mißt, wurde noch gar kein Gebrauch gemacht. Wir werden sie jetzt dazu verwenden, um zu beurteilen, was die Theorie hinsichtlich der *stark* heterochromen Photometrie für Aussagen macht, ob sie mit der „fast monochromen" oder der Photometrie *in kleinen Stufen*, auf die allein wir die Definition der Helligkeit gestützt haben, übereinstimmen muß oder nicht.

Wir denken uns wieder einen Farbenpunkt F fest, einen anderen F' veränderlich auf seinem Radiusvektor, der aber jetzt nicht nahe an F vorbeiführt, sondern eine beliebige Richtung haben mag. Es ist diejenige Lage F'' von F' aufzusuchen, die am nächsten an F liegt; *F'' ist also der Fußpunkt des von F auf den Radiusvektor OF' gefällten geodätischen Lotes.* Es fragt sich, ob dieser Fußpunkt mit F auf derselben Isolychne

$$x_1 + x_2 + x_3 = \text{const}$$

liegt.

Zur Berechnung der geodätischen Linien bringen wir das Linienelement (12′) durch die Transformation

$$\xi_1 = \sqrt{x_1}, \quad \xi_2 = \sqrt{x_2}, \quad \xi_3 = \sqrt{x_3} \tag{23}$$

auf die Gestalt

$$ds^2 = 4 \cdot \frac{d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} \tag{23a}$$

und bemerken, daß, wenn man vorübergehend die ξ_i als rechtwinkelige Koordinaten deutet, im Raume der ξ_i vollkommene Kugelsymmetrie um den Nullpunkt herrscht. Daher muß hier, im Raume der ξ_i, die Geodätische zwischen zwei Farbpunkten, etwa Y und Z eine *ebene* Kurve in der Ebene YZO sein. Führt man in dieser Ebene Polarkoordinaten ein, r, ψ, so muß der Ausdruck von ds^2 durch dr und $d\psi$ immer derselbe sein, unabhängig von der Stellung der Ebene, und man erkennt durch Spezialisierung (etwa $\xi_3 = 0$), daß er lauten muß

$$ds^2 = 4\left(\frac{dr^2}{r^2} + d\psi^2\right) = 4\left[(d\lg r)^2 + d\psi^2\right]. \tag{24}$$

Daraus erkennt man, daß die Geodätischen *in den Variabeln ψ und $\lg r$ gerade Linien* sind, im Raum der ξ_i also *ebene logarithmische Spiralen mit dem asymptotischen Punkt in 0*. Ihre Gleichung in ψ und r [die in Wahrheit nur *zwei* unabhängige Konstante enthält; zwei weitere sind enthalten in der willkürlichen *Ebenenstellung*] schreiben wir in der Form

$$\frac{\psi - \psi'}{\psi'' - \psi'} = \frac{\lg \frac{r}{r'}}{\lg \frac{r''}{r'}}, \tag{25}$$

wo ψ', r', ψ'', r'' Konstante sind, nämlich die Polarkoordinaten der Punkte Y, Z durch welche die Geodätische gehen soll. Als Spezialfälle für

$$\text{a) } \psi' = \psi'', \; r' \neq r''; \quad \text{b) } \psi' \neq \psi'', \; r' = r''$$

ergibt sich

$$\text{a) } \psi = \text{const}; \quad \text{b) } r = \text{const}. \tag{26}$$

Das sind a) Gerade durch den Ursprung, und zwar nicht nur im ξ_i-, sondern auch im x_i-Raum, da nach (23) feste Verhältnisse der ξ_i auch feste Verhältnisse der x_i im Gefolge haben. Wir merken an:

Beim Übergang zu einer lichtstärkeren oder lichtschwächeren Farbe gleicher Reizart (das ist also bei bloßer Änderung der absoluten Intensität ohne Änderung der Zusammensetzung des Lichtgemisches) *bewegt man sich nach unserer Theorie auf einer kürzesten Farbreihe.* Wir kommen darauf im § 10 zurück.

b) liefert die Kreise um den Ursprung oder, anders ausgedrückt, die Großkreise der um den Ursprung geschlagenen Kugeln

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = \text{const.}$$

Diese Kugeln im ξ-Raum sind aber nach (23) im x-Raum nichts anderes als unsere Isolychnen (vgl. 10′). Die Geodätische zwischen zwei gleichhellen Punkten ist also im ξ-Raum ein solcher Großkreis, im x-Raum eine ebene Kurve (und zwar eine Ellipse, wie wir später sehen werden) *auf der Isolychne.* Da die Isolychne, wie wir von früher wissen, von jedem Radiusvektor orthogonal (im Sinne der Riemanngeometrie) durchsetzt wird, bildet jene ebene Kurve das *gemeinsame geodätische Lot zwischen irgend zweien ihrer Radienvektoren.*

Damit ist unsere eingangs gestellte Frage beantwortet: der Fußpunkt des Lotes liegt mit dem Ausgangspunkt stets auf derselben Isolychne, *die heterochrome Photometrie sollte, soweit sie überhaupt ausführbar ist, nach unserer Theorie dasselbe Resultat ergeben wie die stufenweise, fast monochrome.*

Für später merken wir noch an (was aus der Gestalt (23a) des Linienelementes sofort klar ist), daß überhaupt *auf den isolychnischen Kugeln des ξ-Raumes unsere Maßbestimmung mit der gewöhnlichen Euklidischen übereinstimmt*; es wechselt nur der Maßstab von Kugel zu Kugel, und zwar dient als Längeneinheit der Kugelradius. Die Maßverhältnisse, sowie überhaupt die gesamte Geometrie *innerhalb einer Isolychne* ist also durch unsere ξ-Transformation vollkommen anschaulich geworden, nämlich auf die gewöhnliche Geometrie der Kugel reduziert; nach ihr ist insbesondere der *Winkel* zweier Linienelemente, das *Senkrechtstehen* usw. zu beurteilen.

Den Verlauf der *allgemeinen* Geodätischen im x-Raum werden wir im nächsten Abschnitt diskutieren. Hier wollen wir noch anhangsweise, da sie sehr leicht ausführbar ist, die *Rektifikation* durchführen, die nach unserer Theorie das *Maß der Verschiedenheit zweier endlich verschiedener, d. h. zweier beliebiger Farben* liefert, wovon wir im § 2 ausgegangen waren.

Nach (24) und (25) ist längs der Geodätischen

$$(27)\quad \begin{cases} \int_Y^Z ds = 2\int_Y^Z \sqrt{(d\lg r)^2 + d\psi^2} = 2\sqrt{\left(\dfrac{\lg\frac{r''}{r'}}{\psi''-\psi'}\right)^2 + 1}\cdot\int_Y^Z d\psi \\ \qquad = \sqrt{\left(\lg\frac{r''^2}{r'^2}\right)^2 + 4(\psi''-\psi')^2}, \end{cases}$$

wobei r', ψ', r'', ψ'' sich jetzt natürlich auf die Endpunkte Y, Z beziehen. Das Verschiedenheitsmaß setzt sich also in plausibler Weise aus zwei Komponenten zusammen, dem *Helligkeitsunterschied*, für den das Längenverhältnis der Radienvektoren *im ξ-Raum*, und dem *Farbunterschied*, im engeren Sinn, für den der Winkel zwischen eben diesen Radienvektoren maßgebend ist. In den eigentlichen Koordinaten, y_i, z_i der Farbpunkte Y, Z und ihren Helligkeiten, etwa

$$h_y = \Sigma\, y_i, \qquad h_z = \Sigma\, z_i$$

erhält man, da offenbar

$$h_y = r'^2, \quad h_z = r''^2, \quad \arccos\frac{\sqrt{y_1 z_1} + \sqrt{y_2 z_2} + \sqrt{y_3 z_3}}{\sqrt{h_y h_z}} = \psi'' - \psi'$$

folgenden Ausdruck für das Verschiedenheitsmaß

$$(28)\quad \int_Y^Z ds = \sqrt{\left(\lg\frac{h_z}{h_y}\right)^2 + 4\left(\arccos\frac{\sqrt{y_1 z_1} + \sqrt{y_2 z_2} + \sqrt{y_3 z_3}}{\sqrt{h_y h_z}}\right)^2}.$$

Als Beispiel habe ich den Ausdruck nach den Daten der Tab. 1 berechnet für das Rot $\lambda = 640$ und das Cyanblau $\lambda = 480$, jedoch *bei gleicher Helligkeit*. Man erhält sehr nahe 1. Das bedeutet, daß unter Beobachtungsverhältnissen, wo die Fechnerstufe, sagen wir, 0,01 beträgt, der Übergang durch 100 ebenmerkliche Zwischenstufen sich sollte bahnen lassen, wenn man die Zwischenstufen so geschickt wie möglich wählt.

§ 8. Diskussion des Verlaufs der geodätischen Linien im x-Raum.

Es ist von Interesse, sich eine deutlichere Vorstellung vom Verlauf der geodätischen Linien in unserem für die niedere Farbenmetrik so bedeutungsvollen *Vektorenraume der x_i* zu machen. Das unsympathische an der Transformation (23) ist,

daß sie nicht ein-eindeutig ist: der *positive* Oktant des x-Raums[1]), um den allein es sich handelt, wird auf *jeden* der 8 Oktanten des ξ-Raumes abgebildet. Wenn darum z. B. eine unserer logarithmischen Spiralen vom ersten ξ-Oktanten ausgehend auf eine Koordinatenebene trifft und, sie durchsetzend, in einen anderen Oktanten eintritt, so kehrt die entsprechende Kurve des x-Raumes doch wieder in den ersten Oktanten zurück, läuft unter ständiger Annäherung an den Ursprung (genauer: Verminderung der Σx_i) hinüber zur zweiten Koordinatenebene, von da zur dritten usw. So nähert sie sich unter beständigen Windungen zwischen den drei positiven Quadranten der Koordinatenebenen, immer im ersten Oktanten bleibend, asymptotisch dem Ursprung.

In was verwandelt sich die *Ebene durch den Ursprung des ξ-Raumes*, auf der jede Geodätische verläuft, im *x-Raum*? Jeder solchen Ebene, etwa

$$\gamma_1 \xi_1 + \gamma_2 \xi_2 + \gamma_3 \xi_3 = 0 \tag{29}$$

entspricht

$$\gamma_1 \sqrt{x_1} + \gamma_2 \sqrt{x_2} + \gamma_3 \sqrt{x_3} = 0$$

oder

$$\gamma_1^2 x_1 = \gamma_2^2 x_2 + \gamma_3^2 x_3 - 2\gamma_2 \gamma_3 \sqrt{x_2 x_3}$$

oder

$$(\gamma_1^2 x_1 - \gamma_2^2 x_2 - \gamma_3^2 x_3)^2 = 4\gamma_2^2 \gamma_3^2 x_2 x_3. \tag{30}$$

Das ist ein Kegel zweiter Ordnung mit dem Scheitel im Ursprung. Bildet man seinen Schnitt mit den Koordinatenebenen, so erhält man jedesmal eine *doppeltgezählte* Gerade, z. B. für $x_1 = 0$:

$$(\gamma_2^2 x_2 - \gamma_3^2 x_3)^2 = 0.$$

Der Kegel berührt also alle drei Koordinatenebenen.

Betrachten wir nun, wie im § 10 des ersten Teiles, einen *Schnitt* unseres Vektorbüschels *mit einer Ebene*, etwa mit der Isolychne

$$x_1 + x_2 + x_3 = \text{const.}$$

Die Spur der Koordinatenebenen ist das bekannte Farbendreieck, daß bei der angenommenen Fixierung der Vorstellungen, gleichseitig ausfällt. Die Spur unserer Kegel sind Kegelschnitte,

---

1) Um die Vorstellungen zu fixieren, denken wir uns die x_i als *rechtwinklige* Koordinaten!

die, da sie in der Isolychne liegen, selbst geodätisch sind. Da sie jedenfalls *teilweise* im Inneren des Dreiecks verlaufen und es nirgends durchsetzen — über einen Wendepunkt verfügt ein Kegelschnitt ja nicht —, verlaufen sie *ganz* im Innern, müssen also Ellipsen sein.

Damit haben wir aber, fast ohne Rechnung, nun auch schon eine *vollständige* Anschauung von der *Gesamtheit der geodätischen Linien auf einer Isolychne* gewonnen: es ist die *Gesamtheit der dem Farbendreieck eingeschriebenen Ellipsen.* Denn durch jeden Punkt muß es eine Geodätische in jeder vorgeschriebenen Ausgangsrichtung geben. Wenn wir aber in einem Punkt der Isolychne auch noch die Tangente vorschreiben, so ist die Ellipse durch die weitere Forderung, daß sie die Dreiecksseiten berühren soll, *eindeutig* gegeben.

Nur eine gewisse *Mehrdeutigkeit* hinsichtlich der *kürzesten* Verbindungslinie zweier Punkte des isolychnischen Farbendreiecks müssen wir noch beseitigen. Eingeschriebene Ellipsen durch zwei vorgegebene Punkte gibt es im allgemeinen *zwei*, mithin *vier* geodätische Ellipsenbogen. Welches ist der kürzeste?[1])

Wie erwähnt, genügt *ein* Oktant des ξ-Raumes, etwa der erste, zur Abbildung des ersten x-Oktanten, der uns allein interessiert. *Dem* Teil der Ebene (29), der im ersten Oktanten liegt, entspricht nun offenbar *der* Teil des Kegels (30), der zwischen zwei Berührungslinien mit den Koordinatenebenen liegt. Will man zu den beiden anderen Mantelstücken die entsprechenden Punkte *im ersten ξ-Oktanten* finden, so muß man die übrigen Teile der Ebene (29) an den Koordinatenebenen in den ersten ξ-Oktanten hereinspiegeln. Man gelangt so zu einem dem ersten ξ-Oktanten eingeschriebenen Dreikant ($O\,A\,B\,C$ der Fig. 4), und dieses ist es eigentlich, das sich bei der Transformation (23) in den positiven x-Kegel deformiert, wobei die Ecken sich abrunden und $O\,A$, $O\,B$, $O\,C$ in die Be-

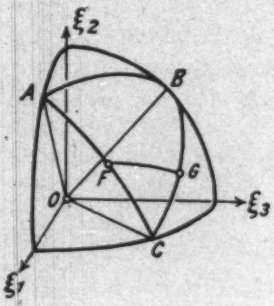


Fig. 4.

1) Man wolle die einfache Figur, die ich der Raumersparnis wegen nicht hinzeichne, skizzieren.

rührungslinien übergehen. Daraus erkennt man, daß *nur derjenige Ellipsenbogen zwischen zwei Punkten kürzeste Verbindungslinie ist, der keinen Berührungspunkt enthält* — und das ist von den vier möglichen immer nur einer. Denn im ξ-Raum ist natürlich zwischen den Punkten F und G das Bogenstück FG das kürzeste, nicht etwa das geknickte Stück GCF oder gar $GBAF$.

Ähnliches gilt natürlich von den logarithmischen Spiralen. Sie setzen sich auf dem Dreikant ABC zu einem geknickten Kurvenzug zusammen, der, den Dreikant umwindend, gegen O hin konvergiert. Im x-Raum glättet sich dieser Kurvenzug und umwindet den Kegel wie die Züge einen konischen Bohrer, mit unbegrenzt abnehmender Ganghöhe asymptotisch gegen den Ursprung zielend. Als *Kürzeste* fungiert dabei aber stets nur das Stück zwischen zwei aufeinander folgenden Berührungspunkten mit den Koordinatenebenen.

Wir sprachen bisher nur vom isolychnischen Farbendreieck, das durch unsere besonderen Annahmen gleichseitig ausfiel. Offenbar sind beide Beschränkungen unwesentlich, da die Eigenschaft der *Berührung* gegen die in Betracht kommenden linearen Transformationen invariant ist. Die einem Dreikant eingeschriebenen Kegel zweiter Ordnung verwandeln sich bei affiner Transformation wieder in die dem entsprechenden Dreikant eingeschriebenen Kegel zweiter Ordnung, und ähnliches gilt für die einem Dreieck eingeschriebenen Ellipsen bei *projektiver* Transformation. Daher gilt folgendes:

1. *Für jedes beliebige auf die wahren Grundfarben* (aber bei beliebigen Einheiten!) *bezogene Farbendreieck*, wenn man darin alle Farben mit gleicher Helligkeit lokalisiert denkt, *sollen nach unserer Theorie die eingeschriebenen Ellipsen die kürzesten Übergangsreihen zwischen zwei gleichhellen Farben bezeichnen, wobei alle Übergangstöne gleichhell zu nehmen sind.*

2. *Auch für zwei verschieden helle Farben gibt der Ellipsenbogen die Aufeinanderfolge der Reizarten an, durch welche hindurch der rascheste Übergang zu bewerkstelligen ist.* Dabei ist die Helligkeit mit der Reizart gleichzeitig in bestimmter gesetzmäßiger Weise zu variieren.

Die Art dieser Gesetzmäßigkeit ist im ξ-Raum durch die logarithmischen Spiralen (25) gegeben. Man hätte in diese

Gleichung die x_i einzuführen, gewinnt aber dadurch kein anschauliches Bild. Vollkommen anschaulich ist die Differentialform des Gesetzes

$$d\psi = c\, d\lg r \qquad \left[c = \frac{\psi'' - \psi'}{\lg \frac{r''}{r'}}\right].$$

Denn nach (24) ist ja

$$ds = 2\sqrt{(d\lg r)^2 + d\psi^2}.$$

Die Gesamtstufe ds setzt sich also aus zwei Teilen zusammen: der Helligkeitsstufe $d\lg r$ $(= \frac{1}{2} d\lg h)$ und der Reizartstufe $d\psi$. Diese sind auf der geodätischen Bahn einander proportional. D. h. man hat die gesamte Helligkeitsänderung, die nötig ist, auf die Reizartänderungen *gleichmäßig aufzuteilen*: wählt man etwa die *Reizartstufen* so, daß sie, *bei ungeänderter Helligkeit ebenunterscheidbar* wären, so hat man die *Helligkeit* um einen bestimmten, längs der geodätischen Linie konstanten, *Bruchteil* (oder ein bestimmtes Multiplum) der *bei ungeänderter Reizart ebenunterscheidbaren Helligkeitsstufe* zu variieren.

§ 9. Spezielle Fälle. Die Farbtonänderung beim Zumischen von Weiß.

Nur in besonderen Fällen ist die geodätische Verbindung auch im x-Raum geradlinig, d. h. fällt die kürzeste Farbreihe mit den Mischfarben der Endpunkte zusammen. *Einen* solchen Spezialfall haben wir schon im § 7 erwähnt (Fortschritt auf einem Radiusvektor, d. h. ungeänderte Reizart). Die einzige weitere Möglichkeit ist die, daß bei gleichhellen Farben der Ellipsenbogen in eine Gerade ausartet. Das ist dann der Fall wenn die Verbindungsgerade der beiden Farben durch einen Eckpunkt des Farbendreiecks geht (oder, im Vektorraum gesprochen, eine Koordinatenachse trifft). In das doppeltgezählte Stück dieser Geraden, soweit sie im Inneren des Farbendreiecks liegt, artet dann die Ellipse aus. Die farbenmetrische Besonderheit dieses Falles ist die, daß die Endfarben *in einem Koordinatenverhältnis* (z. B. x_2/x_3) *übereinstimmen*.

Dieses Ergebnis der Theorie stimmt auffallend überein

mit einem Befund von W. Abney[1]), welcher sich bemüht hat, zu einer weißverdünnten Spektralfarbe aus dem langwelligen Teil des Spektrums (er geht bis $\lambda = 510$) die ähnlichste reine (unverdünnte) Spektralfarbe herauszusuchen, wobei zur Erleichterung des Vergleiches die Helligkeit freigegeben, d. h. ebenfalls möglichst gleich gemacht wird. Abney findet und belegt zahlenmäßig, daß dabei immer *jene* reine Farbe ausgewählt wird, welche mit der Weißverdünnten im $\frac{\text{Rot}}{\text{Grün}}$-Ver-

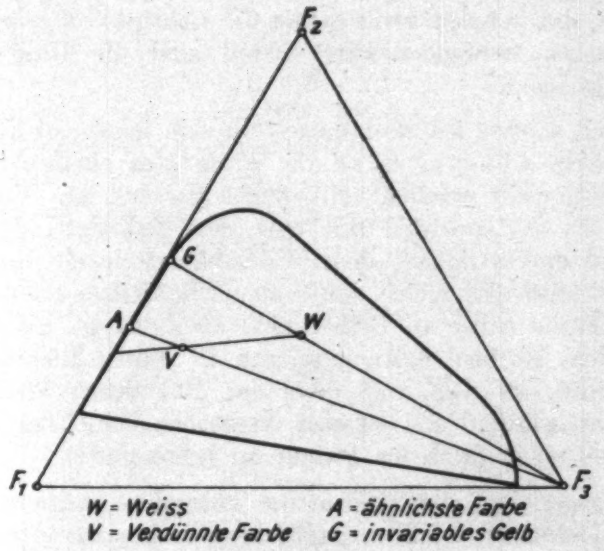


Fig. 5.

hältnis übereinstimmt. Der Farbton erscheint also durch die Verdünnung gewissermaßen verschoben gegen dasjenige Gelb ($\lambda = 577$), welches dasselbe $\frac{\text{Rot}}{\text{Grün}}$-Verhältnis hat, wie das Weiß. Das ist nun genau die Aussage der Theorie, insofern man die Spektralkurven in dem Teil des Spektrums, um den es sich handelt, als angenähert mit dem Rand F_1F_2 des Farbendreiecks (vgl. Fig. 5) zusammenfallend ansehen kann. Denn diejenige Spektralfarbe, die mit der verdünnten Farbe V gleiches

1) W. Abney, Proc. Roy. Soc. A. 83. S. 120. 1910.

$\frac{\text{Rot}}{\text{Grün}}$-Verhältnis hat, findet sich auf der Verbindungsgeraden mit dem dritten Eckpunkt, VF_3, bei A. Daß diese Verbindungsgerade nicht nur geodätisch ist, sondern auch im Schnittpunkt A auf F_1F_2 senkrecht steht, mithin wirklich das *geodätische Lot* von V auf F_1F_2 bildet, macht man sich leicht an unserer ξ-Transformation klar, welche F_1F_2 und F_3A in orthogonale Großkreise der betreffenden isolychnischen Kugel verwandelt.

Das Ergebnis wird in seinem Wert ein wenig gedrückt dadurch, daß Abney nicht genau die richtigen (Königschen) Grundfarben verwendet hat. Groß sind die Unterschiede allerdings nicht.

Auch möchte ich es dahingestellt sein lassen, ob die Ausdrucksweise Abneys, es sei die *Farbe vom gleichen Farbton* (hue) ausgesucht worden, vollkommen passend ist. Für mein Gefühl ist das spektrale Rot eine sehr gesättigte, das Gelb eine viel ungesättigtere, dem Weiß näherstehende Farbe; es wundert mich also nicht, daß man nach Weißzusatz die ähnlichste Farbe näher an Gelb sucht; aber das ist, glaube ich, mehr dem starken Sättigungsabfall in dieser Richtung zuzuschreiben, als dem, daß etwa das Rot durch Weißzusatz gelblicher würde. Bei eigenen Versuchen schien es mir im Gegenteil einen Stich ins Purpur zu bekommen.

Dagegen legt die Theorie der kürzesten Farbreihen eine andere Definiton der Farbtongleichheit nahe; ich betone ausdrücklich, daß es sich dabei *nicht* um eine „Folgerung aus der Theorie" handelt, die über *Empfindungen* natürlich überhaupt keine Aussage macht, sondern nur um den Versuch, einen Begriff, dessen bisherige quantitative Fassung zu äußerlich ist und sich mit der Empfindung *nicht* deckt, anders und tiefer zu fassen und so, daß er sich womöglich besser mit der Empfindung decke.

Um einen kurzen Ausdruck zu haben, pflegt man bisher alle Mischungen aus Weiß und einem Spektrallicht der Wellenlänge λ als farbtongleich zu bezeichnen und den Farbton durch Angabe dieser Wellenlänge zu charakterisieren; andererseits weiß man, daß der Farbton, subjektiv beurteilt, durch Zumischen von Weiß verändert wird.

Ich bringe das nun (wie übrigens schon Helmholtz in einem analogen Falle getan) damit im Zusammenhang, daß die Reihe der Mischfarben *nicht* die kürzeste Übergangsreihe von der Spektralfarbe zum Weiß bildet. Es scheint mir wahrscheinlich, daß *der rascheste Übergang von irgendeiner ausgesprochenen Farbe zur Farblosigkeit sich ohne Änderung des Farbtons vollziehe*, weil eine solche, als überflüssig neu hinzutretendes Unterscheidungsmerkmal zwischen Nachbarfarben der Reihe, den Weg verlängern müßte.

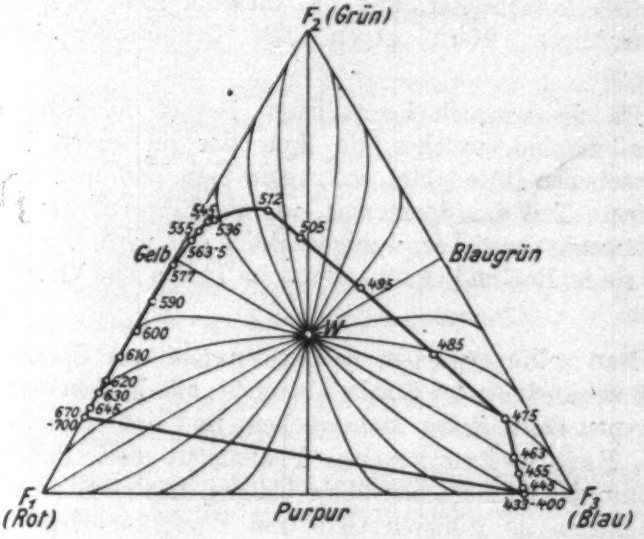


Fig. 6.

Als farbtongleich mit einer gegebenen Farbe hätte man dann also jene Farben zu definieren, die auf der kürzesten Linie zum Weiß liegen.

Konsequent und in sich widerspruchsfrei ist diese Definition jedenfalls. Ob sie wirklich der Empfindung besser entspricht, als die erstgenannte, kann natürlich nur das subjektive Urteil entscheiden.

Was würde sie nun im einzelnen aussagen? Fig. 6 zeigt das Büschel geodätischer Linien durch den Weißpunkt in einem Farbendreieck, in welchem wir uns gleichhelle Farben lokali-

siert denken wollen. Geradlinig sind nur die Verbindungen zu den Grundfarben und ihren Gegenfarben, nur in diesen Fällen wären die Weißmischungen konstant im Farbton. Von allen Zwischenfarben erscheinen die Weißmischungen im Farbton verschoben gegen die überwiegende Grundfarbe, d. h. gegen diejenige Grundfarbe, welche darin — verglichen mit *dem* Mischungsverhältnis der drei Grundfarben, das farblos erscheint — am stärksten vertreten ist. Denn man findet ja nach Annahme zu einer Farbe in der Nähe des Weißpunkts die farbtongleichen am Rande des Dreiecks, indem man längs einer Kurve des Büschels fortschreitet, und das Büschel zieht sich in einem dreistrahligen Stern gegen die Grundfarbenpunkte zusammen.

Da die wirklich herstellbaren Farben in dem Segment enthalten sind, welches die Spur der im ersten Teil vielbesprochenen Düte bildet, so erkennt man, daß die Erscheinung in einem Teil des Spektrums, wo die Ellipsenbogen von Geraden wenig abweichen, wenig merklich sein wird. Am stärksten muß sie in Rot und Orange, dann im Indigo und Violett zutage treten.

Man sollte erwarten, daß, wenn man ein Spektrum mit Weiß in zunehmender Stärke übergießt, alle Farben den nächstgelegenen Grundfarben näherrücken, und daß schließlich, wie beim Bezold-Brückeschen Phänomen, drei Partien vom Farbton der Grundfarben übrig bleiben, mit ziemlich schroffen Übergängen im früheren Gelb und Blaugrün. Diese Farben selbst, als Gegenfarben des Grundblau und Grundrot, sind zwar ebenfalls permanent, werden aber wenig hervortreten, da die Nachbarn von ihnen abrücken.

Ich habe den einfachen Versuch mit einem etwa 1 m langen Gitterspektrum der Sonne ausgeführt, übrigens zu einer Zeit, als ich mir über die eben vorgetragene theoretische Deutung noch nicht klar war. Die Erwartungen bestätigen sich insofern, als in der Tat bei starker Verdünnung drei Farbtöne mit schroffen Übergängen übrig bleiben. Das Rot bekam, wie mir schien, ganz deutlich einen Stich ins Rosenrote, der es dem Grundrot im Farbton ähnlicher macht. Die permanente Farbe im kurzwelligen Teil aber war nicht Blau, sondern — wie schon viele Beobachter festgestellt haben — ein, natürlich sehr

weißliches, Purpurviolett. Der rote Einschlag war deutlicher, als im reinen, unverdünnten Spektrum.

Ich würde nicht wagen, auf die hier vorgeschlagene, doch noch recht unsichere Theorie der Farbtonänderung eine bestimmte Vermutung über die Beschaffenheit der dritten Grundfarbe zu gründen, die von der Meinung anderer, viel erfahrener Forscher abwiche. Aber unser Ergebnis — daß die dritte Grundfarbe Rotviolett und nicht Blau sein muß, wenn die Theorie stimmen soll — trifft mit der Vermutung, die König selbst in einer späteren Arbeit[1]) geäußert hat, so vollkommen zusammen, daß wir nicht in der Theorie, sondern in der üblich gewordenen Lage des dritten Grundpunktes den Fehler erblicken möchten.

Man verschiebe — unter Festhaltung der Spektralkurve — den Punkt F_3 nach abwärts und nach links, so daß die Gerade WF_3 nicht mehr die Spektralkurve, sondern das violette Ende der Purpurgeraden trifft; wobei natürlich die Geodätischen als eingeschriebene Ellipsen des *abgeänderten* Dreiecks zu zeichnen sind. Dann wird die gefundene Verschiebung gegen Rotviolett verständlich — aber auch die a. a. O. beschriebenen Versuche an Königs Blaublinden.[2])

§ 10. Das Bezold-Brückesche Phänomen. Ausblick auf eine künftige Verbesserung des Linienelements.

Der Farbtonänderung beim Vermischen mit Weiß einigermaßen verwandt ist die Farbtonänderung, die beim bloßen Herabsetzen der objektiven Intensität eines Lichtgemisches (ohne Änderung der prozentuellen Zusammensetzung) eintritt, man kann sagen: die Farbtonverschiedenheit von Farben gleicher Reizart. Dabei findet ebenfalls eine Annäherung an

---

1) A. König, „Über Blaublindheit". Sitzungsber. d. Berliner Akad. d. Wiss. Juli 1897, S. 718ff. Die kritische Anmerkung steht auf S. 406 der „Gesammelten Abhandlungen" (Leipzig, Johann Ambrosius Barth, 1903).

2) Königs Versuche ergaben für die pathologisch Blaublinden: 1. Mischbarkeit aller Spektralfarben aus den Endlichtern. 2. Nur *einen* neutralen (farblosen) Punkt im Spektrum, und zwar im Grüngelb. Beides widerspricht der in Fig. 5 gezeichneten Lage des Fehlpunktes F_3 gegenüber der Spektralkurve.

den Farbton der nächstgelegenen Grundfarbe statt; in einem sehr lichtschwachen Spektrum bleiben dann, wie in einem stark mit Weiß verdünnten, nur drei Farbtöne übrig, mit ziemlich schroffen Übergängen (Bezold-Brückesches Phänomen).

Daß diese Erscheinung von unserer Theorie mit dem Linienelement (12′) *nicht* erfaßt wird, ist nach der einfachen qualitativen Erklärung, die Brücke davon gibt, begreiflich.

Zunächst: sie wird in der Tat nicht erfaßt. Denn wenn man auch, wie gesagt, von der Theorie keine unmittelbare Aussage über die Empfindung verlangen kann, so drängt sich doch die Annahme auf, daß zu einer *vorgegebenen* Farbe die *ähnlichste Farbe* einer *vorgegebenen* (höheren oder geringeren) *Helligkeit* die *farbtongleiche* ist; und daß auch der rascheste Übergang über lauter Farben gleichen Farbtons bewerkstelligt wird. Die geodätischen Lote auf die Isolychnen sind aber die Radienvektoren. Folglich sollten die Farben gleicher Reizart auch farbtongleich, eine Änderung des Farbtons bei bloßer Änderung der objektiven Intensität nicht vorhanden sein.

Dieses Versagen der Theorie ist *deshalb* nicht verwunderlich, weil sie ganz auf der Annahme des Fechnerschen Gesetzes für Intensitätsstufen aufgebaut ist und sicherlich nur soweit eine Annäherung an die Wirklichkeit darstellt, wie dieses Gesetz selbst. Nach Brücke beruht nun die in Rede stehende Erscheinung auf einem ganz oder teilweise Unterschwelligwerden der in der betreffenden Farbe — im Vergleich mit Weiß — am schwächsten vertretenen Grundvalenz (wobei angenommen ist, daß die Schwellenwerte der Grundvalenzen sich so verhalten, wie die Grundvalenzen des Weiß, mit anderen Worten: daß Weiß farblos unter die Schwelle sinkt).

Nun muß das Fechnersche Gesetz beim Nullpunkt des Reizes schon aus mathematischen Gründen seine Gültigkeit verlieren, weil sich dort eine unendlich hohe Unterschiedsempfindlichkeit ergibt (unser Linienintegral $\int d s$ *divergiert*, wenn man es in den Ursprung zu führen sucht). An der Reizschwelle steht es schon in faustdickem Widerspruch mit der Erfahrung, da hier die Reizänderungen ganz aufhören, empfunden zu werden, anstatt daß, wie das Gesetz will, die Empfindlichkeit mit abnehmender Reizstärke immer größer würde. Merkliche Abweichungen vom Gesetz müssen also wohl schon

bei sehr viel größerer Reizstärke auftreten, und das bestätigt auch die Erfahrung.

Darum können wir nicht erwarten, daß eine Erscheinung, die gerade auf der Annäherung an die Reizschwellen beruht, von unserer Theorie wiedergegeben werde, solange wir uns mit dem Fechnerschen Gesetz als Näherung begnügen.

Die naheliegende Korrektur ist auch schon von Helmholtz versucht worden, allerdings natürlich an *seinem*, wie wir sahen, unbrauchbaren Linienelement.

Man hätte — in zweiter Näherung — die x_i in (12′) nicht mit den Grundvalenzen zu identifizieren, sondern mit den um gewisse kleine Konstante ε_i vermehrten Grundvalenzen (Helmholtz bringt die ε_i mit dem „Eigenlicht der Netzhaut" in Zusammenhang). D. h., an der Bezeichnungsweise des ersten Teiles festhaltend, hätte man in dieser Formel zu ersetzen

$$x_i \text{ durch } x_i + \varepsilon_i.$$

Dadurch wird das Verschwinden der Nenner beim Verschwinden einer Grundvalenz vermieden. Ich habe von der Anbringung einer derartigen Korrektur in diesem Aufsatz Abstand genommen, um die ohnehin nicht leichte Materie nicht noch mehr zu komplizieren. Zwar würde die Metrik des Farbenraumes dadurch nicht verändert, aber gegen den im ersten Teil betrachteten affinen Raum *verschoben*. Dadurch würden die Isolychnen leicht deformiert werden, und zwar lediglich deshalb, weil wir beim wirklichen Versuch die *objektiven* Grundvalenzen x_i proportional ändern, nicht die um das „Eigenlicht" vermehrten, $x_i + \varepsilon_i$, in denen sich die Metrik einfach darstellt. Für die Gestalt der deformierten Isolychnen berechne ich

$$x_1 + x_2 + x_3 - \lg (x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} x_3^{\varepsilon_3}) = \text{const.}$$

Es solten sich also, besonders bei geringer Helligkeit (für *große* x_i tritt der Logarithmus zurück) Abweichungen von der Additivität der Helligkeit ergeben, übrigens auch Abweichungen im Helligkeitsverhältnis verschiedener Farben, wie sie König[1]) experimentell gefunden hat.

Überhaupt kann man sagen: diese oder eine ähnliche Korrektur unseres Linienelementes, *deren Notwendigkeit wegen*

1) Vgl. oben S. 490.

des Näherungscharakters des Fechnerschen Gesetzes außer allem Zweifel steht, muß alle in unserer „höheren Farbenmetrik" aufgestellten „Gesetze" — z. B. auch die genaue Übereinstimmung zwischen stark heterochromer und kleinstufiger Photometrie — zu bloßen Näherungen herabdrücken; *nur als solche wollen wir sie deshalb von vornherein aufgefaßt wissen.* Der Wert der Theorie scheint uns darin zu liegen, daß sie den inneren Zusammenhang all dieser Näherungsgesetze in Evidenz setzt, zugleich aber auch den inneren Zusammenhang der *Abweichungen der realen von unserer idealisierten, „rein Fechnerschen" Farbenmannigfaltigkeit*; Abweichungen, die in den meisten Fällen erst der genauen experimentellen Durchforschung harren.

(Eingegangen im März 1920.)

2. *Zur Beweglichkeitsbestimmung aus der Brownschen Bewegung an einem Einzelteilchen. III.;*

von Reinhold Fürth.

(Aus dem physikalischen Institut der deutschen Universität in Prag.)

§ 1.

In zwei unter dem gleichen Titel in dieser Zeitschrift veröffentlichten Arbeiten[1]) habe ich mich mit der Frage beschäftigt, inwieweit man berechtigt ist, aus Messungen der Brownschen Bewegung an einem, in einer Flüssigkeit oder einem Gase suspendierten Einzelteilchen auf die Beweglichkeit dieses Teilchens zu schließen. Die Resultate der Untersuchung an Partikeln in Gasen ließen, infolge unserer derzeitigen Unkenntnis über die genaue Form des Widerstandsgesetzes keinen eindeutigen Schluß darüber zu, ob die nach der Einsteinschen Formel der Brownschen Bewegung aus dieser berechnete Beweglichkeit mit der gegenüber einer geradlinigen Bewegung identisch sei, insbesondere, ob sie daher zur Ladungsbestimmung an solchen Partikeln herangezogen werden könne.

Da nun die Ermittelung des Widerstandsgesetzes für sehr kleine Teilchen, wie es scheint, mit beträchtlichen experimentellen Schwierigkeiten verbunden ist, schien es mir zunächst vorteilhaft, zu untersuchen, ob die als Beweglichkeit bezeichnete Größe wirklich eine dem Partikel bzw. dem umgebenden Medium eigene, von der Geschwindigkeit der Bewegung unabhängige Größe darstelle oder mit anderen Worten, ob die Gleichung

$$v = B \cdot K \tag{1}$$

(v: Geschwindigkeit, B: Beweglichkeit, K: Kraft) für einen genügend großen Bereich der Variablen v und K mit konstantem B erfüllt sei.

Dies wurde nun in mehrfacher Weise sicherzustellen getrachtet und zwar auf folgenden Wegen: 1. Durch Messung der Geschwindigkeit unter dem Einflusse verschiedener Kräfte

1) R. Fürth, Ann. d. Phys. 59. S. 409. 1919; 60. S. 77. 1919.

an ein und demselben Partikel in möglichst großem Variabilitätsbereich; 2. durch Untersuchung der Bewegung unter dem Einfluß einer periodischen Kraft von großer Frequenz und gleichzeitiger Messung von Geschwindigkeiten nach der Methode 1 an einem und demselben Partikel, um zu erproben, ob auch gegenüber einer solchen, rasch oszillierenden Bewegung die Gleichung (1) mit derselben Konstanten gültig sei, wie gegenüber solchen mit konstantem K, und schließlich 3. durch Messung der Brownschen Bewegung nach der Methode der „mittleren doppelseitigen Erstdurchgangszeiten" und Messungen nach Art der obigen 1 und 2 an einem und demselben Partikel.

Durch letztere Art der Beobachtung war es auch möglich, eine neuerliche Vergleichung der Beweglichkeitsbestimmungen, wie sie aus den verschiedenen Widerstandsgesetzen einerseits und aus der Theorie der Brownschen Bewegung andererseits sich ergeben, durchzuführen, sowie einen neuerlichen Beitrag zur Frage nach der Größe der an solchen Partikeln auftretenden Ladungen zu liefern.

§ 2.

Die experimentelle Anordnung war, was den optischen Teil betrifft, im Prinzip dieselbe, wie sie in Teil II, S. 79, beschrieben und abgebildet ist. Jedoch geschah diesmal die Konzentration des Bogenlichtes durch das Mikroskopobjektiv *aa* statt des *AA* von Zeiss. Die Beobachtungsoptik blieb dieselbe, nämlich Objektiv *AA*, Okular 4 von Zeiss, mit einer 90fachen Vergrößerung. Als Okularmikrometer fand entweder ein Okularnetz mit $3 \cdot 4$ quadratischen Feldern von 0,25 mm Seitenlänge Verwendung, der bei der verwendeten Optik eine Objektgröße von 0,04 mm entsprach oder ein Okularmikrometer mit $50 \cdot 50$ quadratischen Feldern von 0,1 mm Seitenlänge, denen die wahre Objektgröße 0,016 mm zugeordnet war, beide von Zeiss.

Der früher verwendete Kondensator war durch eine zweckmäßigere Konstruktion ersetzt worden. Die Distanz seiner Platten wurde mikroskopisch mittels einer schwachen Vergrößerung und eines Okularmikrometers zu $d = 0{,}204$ cm bestimmt.

Als Teilchenmaterial diente diesmal ausschließlich im Gleichstromlichtbogen in gut getrockneter Luft zerstäubtes Feinsilber.

Die Registrierung der Beobachtungen geschah, wie früher vermittelst Metronom, Morsetaster und elektromagnetischem Doppelstiftschreiber.

Eine Änderung hatte jedoch die elektrische Anordnung erfahren, die dazu diente, dem Kondensator die zur Bewegung der Teilchen notwendige Spannung zuzuführen. Sie ist schematisch in der folgenden Figur wiedergegeben.

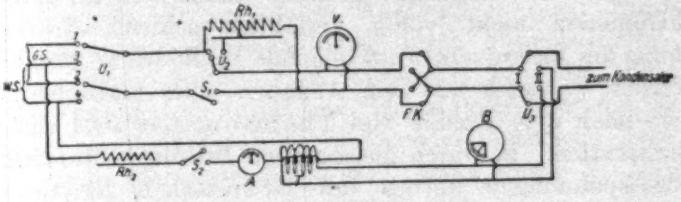


Fig. 1.

Durch Umlegen des zweipoligen Umschalters U_1 auf das Klemmenpaar 1, 2 bzw. 3, 4 kann zunächst dem Kondensator entweder die konstante Spannung einer Akkumulatorenbatterie von 120 Volt oder die Wechselspannung des Prager Lichtleitungsnetzes von etwa 125 Volt zugeführt werden. Vermittelst des Ruhstrat-Regulierwiderstandes Rh_1 kann man nun durch Schließen des Schlüssels S_1 bis zum oben bezeichneten Höchstausmaße beliebige Gleich- oder Wechselspannungen an die Kondensatorplatten anlegen, wenn der Wippenumschalter U_3 in der Stellung I steht. Vermittelst des Umschalters U_2 kann man nach Bedarf mit einem Griff entweder die variable oder die volle zur Verfügung stehende Spannung anlegen, die mittels des Voltmeters V (Hitzdrahtvoltmeter für Gleich- und Wechselstrom von Hartmann und Braun) zur Messung gelangt.[1]) Der durch ein Pedal betätigbare Hg-Kommutator $F \cdot K$ dient, wie üblich, zum raschen Verändern der Feldrichtung.

Um auch mit Wechselstrom höherer Spannung arbeiten zu können, diente der aus den Spulen eines Rumkorffinduktors bestehende Wechselstromtransformator T, in dessen Primärspule der Wechselstrom durch einen Regulierwiderstand Rh_2

1) Durch einen in der Figur nicht gezeichneten Umschalter konnte dabei nach Bedarf jeder der beiden verschiedenen Meßbereiche des Instrumentes zur Anwendung kommen.

und den Schlüssel S_2 eingeleitet wird; zu seiner Messung dient das Weicheisenamperemeter A. Von der Sekundärwicklung von T führen zwei Drähte zu dem Umschalter U_3, der somit in der Stellung II den Kondensator mit der Hochspannung verbindet. Ihre Messung erfolgt mittels eines Braunschen Elektrometers B. Auf diese Weise wurde es ermöglicht, mit Wechselspannungen bis zu 2500 Volt arbeiten zu können.

Da mir die empirisch geeichte Skala des Braunschen Elektrometers nicht völlig verläßlich schien, wurde eine Eichung des Instrumentes auf folgende Methoden vorgenommen. 1. Durch Vergleich mit den Angaben eines statischen Voltmeters nach dem Prinzip von Thomson, mit zwei Empfindlichkeitsstufen. 2. Durch gleichzeitige Messung von effektiven Wechselspannungen mittels des Braunschen Elektrometers und eines Hitzdrahtvoltmeters von Hartmann und Braun mit vorgeschaltetem hohen Widerstande, um es für einen höheren Meßbereich gebrauchen zu können. Durch Messung des vorgeschalteten Widerstandes einerseits und des inneren Widerstandes des Voltmeters anderseits; mit Berücksichtigung der Impedanzwirkung konnten so die Angaben des Voltmeters auf den höheren Meßbereich umgerechnet werden. Die Messung wurde mit zwei verschiedenen Vorschaltwiderständen ausgeführt. 3. wurden zwei Zeigerstellungen des Braunschen Elektrometers verglichen mit den Angaben eines absoluten Elektrometers nach Thomson (mit Schutzring). Die Resultate wurden graphisch ausgeglichen und zur Herstellung einer Korrekturtabelle für das Braunsche Elektrometer benützt Da die Übereinstimmung der Eichergebnisse nach diesen Methoden einigermaßen zu wünschen übrig ließ, muß den Spannungsangaben für die Hochspannung eine gewisse Ungenauigkeit zugute gehalten werden.

In Ermangelung eines Frequenzmessers wurde ferner die Frequenz des verwendeten Wechselstromes vermittelst eines Telephones bestimmt, dessen Ton dann vermittelst eines Monochordes und einer Normalstimmgabel auf Schwingungen pro Sek. reduziert wurde. Es ergab sich für die Frequenz

$$\nu = 50 \text{ per/sec.}$$

Die Ladung der Partikel erfolgte, wenn sie nicht an und für sich geladen erschienen, mit einem Radiumpräparat.

§ 3.

Es wurde zunächst versucht, ob die an einem und demselben Partikel durch Verwendung verschiedener Gleichspannungen hervorgerufenen Steig- und Fallgeschwindigkeiten zu dem gleichen Wert für die Beweglichkeit B führen, eine Untersuchung, die meines Wissens explizit für Teilchen dieser Größenordnung noch nicht durchgeführt wurde. Zu diesem Zwecke wurde ein geladenes Ag-Teilchen nach Einstellen einer bestimmten Gleichspannung durch abwechselndes Umlegen des Kommutators F. K. einigemal auf- und abgeführt und die Durchgänge durch zwei Horizontalstriche des Mikrometers 1 vermittelst des Morseapparates registriert, sowie die Spannung am Voltmeter abgelesen. Dann wurde der Vorgang für eine zweite Spannung wiederholt usw.

Aus Gleichung (6) in Teil II dieser Arbeit S. 83 geht hervor, daß man aus den gemessenen Fall- bzw. Steiggeschwindigkeiten das Produkt $e\,B$, das für ein und dasselbe Partikel eine Konstante sein soll, berechnen kann nach der Formel

$$e\,B = \frac{v_f + v_s}{2\,E} \tag{2}$$

(E: elektrische Feldstärke im Kondensator), während sich aus Gleichung (5) a. a. O. die ebenfalls konstante Größe

$$B\,m\,g = \frac{v_f - v_s}{2} \tag{3}$$

bestimmen lassen muß.

Da es sich uns zunächst nur um relative Vergleichungen handelt, sind unter den Angaben der folgenden Tabelle die Geschwindigkeiten als Mikrometerteile pro Sekunde und die Feldstärken als die am Voltmeter abgelesenen Spannungen in Volt eingesetzt.

Die Tab. 1 enthält die Meßergebnisse für sämtliche beobachtete Teilchen. Man ersieht aus ihr, daß in der Tat mit ziemlicher Genauigkeit das Produkt $e\,B$ für jedes Teilchen eine Konstante ist, während die analogen Produkte $B\,m\,g$ zwar keinen systematischen Gang mit der verwendeten Spannung, wohl aber eine große Streuung bezüglich der Fehler aufweisen, was sich darauf zurückführen läßt, daß die erstere Größe durch Summation, die letztere hingegen durch Differenzbildung zweier mit Fehlern behafteter Größen hervorgeht,

wodurch sich, wie man unmittelbar sieht, im letzteren Falle die relativen Fehler vergrößern.

Tabelle 1.[1])

Nr.	v_f	v_s	E	eB	Bmg	$\overline{eB}$ (Mittel)	$\overline{Bmg}$ (Mittel)
1	0,588	0,214	12,02	0,0334	0,374		
	0,658	0,483	19,0	0,0300	0,175	0,0314	0,239
	0,926	0,758	27,4	0,0307	0,168		
2	0,233	0,110	7,8	0,0220	0,123		
	0,357	0,265	14,0	0,0222	0,092	0,0234	0,145
	0,714	0,493	23,2	0,0261	0,219		
3	0,690	0,588	22,4	0,0285	0,102		
	0,455	0,286	12,2	0,0304	0,169	0,0288	0,125
	0,280	0,137	7,0	0,0298	0,143		
	0,156	0,068	4,2	0,0266	0,088		
4	0,272	0,108	23,4	0,0081	0,164	0,0091	0,195
	0,405	0,179	28,8	0,0101	0,226		
5	0,361	0,226	11,2	0,0261	0,135		
	0,274	0,138	7,2	0,0286	0,136		
	0,211	0,0725	4,8	0,0295	0,138		
	0,667	0,505	23,8	0,0246	0,162		
	0,704	0,617	25,6	0,0257	0,087	0,0272	0,117
	0,541	0,488	19,4	0,0265	0,053		
	0,476	0,323	14,0	0,0284	0,154		
	0,341	0,270	10,8	0,0283	0,071		
6	0,448	0,165	27,2	0,0112	0,283		
	0,382	0,116	19,6	0,0127	0,266		
	0,260	0,082	14,2	0,0120	0,178		
	0,0967 (fr. Fall)					0,0110	0,188
	(Schwebespann.)		10,4	0,0093	0,097		
	0,377	0,225	27,8	0,0108	0,152		
	0,281	0,126	20,2	0,0101	0,155		
7	0,549	0,500	13,8	0,0380	0,049		
	0,459	0,407	10,8	0,0400	0,052		
	0,294	0,294	7,2	0,0407	0,000		
	0,206	0,137	4,4	0,0390	0,069	0,0388	0,056
	0,633	0,676	17.0	0,0385	0,043		
	0,990	0,909	24.9	0,0380	0,081		
	0,546	0.450	13,4	0,0371	0,096		

Dieser Umstand muß berücksichtigt werden, wenn man, wie es gewöhnlich geschieht, aus Bmg durch Vermittelung eines Widerstandsgesetzes die Beweglichkeit B und damit die Ladung e des Teilchens ermittelt, insbesondere, wenn es sich um die Entscheidung der Frage handelt, ob diese Ladung ihrer Konstitution nach atomistisch oder kontinuierlich teil-

1) Die angegebenen Werte für v_f und v_s sind Mittelwerte aus je 9—15 Einzelmessungen.

bar ist. Wie die Spalte 6 der Tab. 1 zeigt und wie auch aus den Resultaten von Teil II dieser Arbeit hervorgeht, erscheint es kaum möglich, aus Messungen dieser Art irgend etwas Positives zur Entscheidung der Frage beizutragen.

§ 4.

Wie bereits in der Einleitung hervorgehoben, schien es erwünscht, zu erproben, ob das Gesetz (1) auch dann noch erfüllt sei, wenn es sich nicht um die relativ kleinen und gleichförmigen Geschwindigkeiten des vorigen Paragraphen handelt, sondern um eine rasch oszillierende Bewegung, wie sie hervorgebracht werden kann, wenn man das geladene Teilchen einem elektrischen Wechselfelde hoher effektiver Spannung aussetzt.

Solche Messungen sind bereits früher von Frl. A. Snethlage[1]) auf einem, dem meinigen ganz analogen Wege angestellt worden und führten zu dem von der Verfasserin selbst allerdings als ziemlich roh bezeichneten Resultat, daß die Beweglichkeit gegenüber einer solchen schwingenden Bewegung für ein und dasselbe Teilchen größer sei, als gegenüber einer gleichförmigen Bewegung. Es erschien mir wünschenswert, diese Messungen unter Variierung der Versuchsbedingungen und im Zusammenhang mit den anderweitigen hier durchgeführten Untersuchungen nochmals zu wiederholen.

Die Theorie dieser Art der Beobachtung ist die folgende: Die Teilchen führen unter dem Einflusse der periodischen Kraft des Feldes, die wir als einfache Sinusfunktion annehmen wollen, eine erzwungene Bewegung, ohne Richtkraft aus, mit einem Widerstande, der aus Gleichung (1) entnommen, zu folgender Bewegungsgleichung führt

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{B}\frac{dx}{dt} + A\sin 2\pi\nu t, \tag{4}$$

worin m die Masse des Teilchens, ν die Frequenz des verwendeten Wechselstromes und A die Amplitude der elektrischen Feldkraft bedeutet.[2]) Die Integration dieser Differentialgleichung

1) A. Snethlage, Versl. K. Akad. v. Wetensch. Amst. 25. S. 1173. 1917.

2) Hierbei ist zu berücksichtigen, daß eigentlich infolge des Umstandes, daß es sich hier um eine periodische Bewegung in einer zähen Flüssigkeit handelt, unter m die sog. „hydrodynamische Masse" und unter B die Beweglichkeit gegenüber periodischer Bewegungen zu verstehen wären, die sich von den Werten gegenüber gleichförmiger Bewe-

führt zu folgendem Wert für die Amplitude H der Teilchenschwingung

$$H = \frac{A}{2\pi\nu m\sqrt{(2\pi\nu)^2 + \frac{1}{m^2B^2}}}. \tag{5}$$

In dem für die Praxis allein wichtigen Fall ist nun $(2\pi\nu)^2$ gegen $\frac{1}{m^2B^2}$ völlig zu vernachlässigen, so daß also Gleichung (5) die einfache Gestalt annimmt

$$H = \frac{AB}{2\pi\nu}. \tag{6}$$

Führen wir nun statt A die am Elektrometer ablesbare effektive Spannung V ein, die mit A durch die Beziehung zusammenhängt

$$A = \frac{V\cdot\sqrt{2}\cdot e}{d} \tag{7}$$

(d: Plattendistanz im Kondensator), so erhalten wir schließlich für die Amplitude der Schwingung den Ausdruck

$$H = \frac{1}{\nu\pi d\sqrt{2}}\cdot V\cdot eB, \tag{8}$$

woraus sich bei Kenntnis der Größen V und H das Produkt eB berechnen und mit dem aus den Geschwindigkeiten v_a und v_f erfließenden vergleichen läßt.

Die betreffenden Messungen wurden nun so durchgeführt, daß ein geeignetes Teilchen durch Anwendung von Gleichspannung zunächst im Gesichtsfelde einigemal hin und her geführt und seine Geschwindigkeit mittels des Okularrasters 2 und des Morseapparates gemessen wurde, worauf man durch Umlegen des Umschalters U_3 eine Wechselspannung an den Kondensator anlegte, die den leuchtenden Punkt des Teilchens in eine vertikale Lichtlinie von der Länge $2H$ auseinanderzog. Die Länge dieser Linie wurde mittels des Okularrasters gemessen, was jedoch, da das Teilchen im Gesichtsfelde nicht ruhig bleibt, sondern langsam nach aufwärts wandert, nur mit einer Genauigkeit von ± 1 Teilstrich des Mikrometers zu erzielen ist.

Um zunächst die Proportionalität von H mit der Größe der effektiven Wechselspannung zu erweisen, wurden einige Messungen in der Weise angestellt, daß ein und dasselbe Teilchen

gung unterscheiden (vgl. z. B. Lamb, Hydrodynamik, 1907, S. 726, Formel 26). Wie jedoch eine Überschlagsrechnung zeigt, sind die dadurch verursachten Abweichungen in unserem Falle ohne Belang.

verschiedenen Wechselspannungen ausgesetzt und die jeweilige Amplitude gemessen wurde. Die Tab. 2 enthält in der ersten Spalte die Protokollnummer, in der zweiten die Amplitude in Mikrometerpartes, in der dritten die effektiven Spannungen in Volt und in der vierten den Quotienten beider Größen, der nach der Theorie konstant sein soll, was, wie man sieht, innerhalb der Fehlergrenzen in der Tat zutrifft.

Tabelle 2.

Nr.	$2H$	V	$V/2H$
8	9	2100	233
	7	1630	232
	6	1420	235
9	5	2150	431
	4	1890	472
	3,5	1630	465
10	2	580	288
	3	1000	332
11	1,5	630	420
	2,5	1000	398
25	2	630	314
	3	970	323
	5—6	1450	286—238
	8	2290	286

Die in der folgenden Tab. 3 enthaltenen Messungen wurden auf die oben beschriebene Weise angestellt und enthalten in der ersten Spalte die Protokollnummer, in der zweiten und dritten die Fall- und Steiggeschwindigkeiten in Mikrometerteilen pro Sekunde, sowie in der vierten die Spannungen in Volt bei der Bewegung im Gleichfelde, in der fünften Kolonne die Amplituden und in der sechsten die Spannungen bei der Bewegung im Wechselfelde, schließlich in der siebenten und achten Kolonne die aus diesen beiden Arten der Bewegung erfließenden Werte für $e\,B$, bezeichnet als $(e\,B)_g$ bzw. $(e\,B)_w$ in absolutem Maße.

Man sieht, daß in den meisten Fällen die Differenz zwischen den so gewonnenen Werten von $(e\,B)_g$ und $(e\,B)_w$ in der Größenordnung der durch die Angaben des Elektrometers und der Ablesung der Amplituden bedingten Fehler liegt. Auffallend ist jedoch immerhin die Tatsache, daß sämtliche beobachteten $(e\,B)_w$ größer als $(e\,B)_g$ sind, in Übereinstimmung mit den a. a. O. erwähnten Beobachtungen von Snethlage.

Tabelle 3.[1])

Nr.	v_f	v_s	V_g	$2H$	V_w	$(eB)_g \cdot 10^3$	$(eB)_w \cdot 10^3$
12	2,51	1,12	10,8	2,5	1575	16,45	17,2
13	1,69	1,02	7,0	3	1575	19,02	20,8
14	3,41	1,61	11,2	3—4	1575	22,0	20,8—27,6
15	5,30	3,70	10,6	3	1575	41,5	41,5
16	4,59	2,24	8 8	6—7	1520	38,0	43,0—50,0
17	3,83	1,15	8,8	5	1575	27,8	34,5
18	4,55	2,17	8,8	6	1575	37,5	41,5
19	4,57	3,46	12,8	7—8	2150	30,6	35,3—40,4
20	4,52	3,70	15,0	7	2625	26,9	29,0
21	1,95	1,69	5,4	7—8	2150	33,0	35,3—40,5
22	2,66	2,14	18,6	1,5	735	12,65	22,0
23	2,70	1,00	20,6	1	755	8,80	14,41
24	3,70	1.81	9,8	2,5	775	27,6	34,6
25	3,70	1,93	28,7	V/H (mittel)	296[2])	28,7	33,7—45,8
26	4,27	2,91	18,3	2	745	19,21	28,8

Fraglich muß es jedoch erscheinen, ob man berechtigt ist, aus dieser Tatsache einen Schluß auf die nicht strenge Gültigkeit der Gleichung (1) bei so raschen Bewegungen zu ziehen, da ja die Annahme, daß die Wechselspannung eine reine Sinusfunktion sei, in unserem Falle sicher nicht gerechtfertigt ist, vielmehr streng genommen auch noch die überlagerten Oberschwingungen berücksichtigt werden müßten. Es ist möglich, daß die beobachteten Abweichungen auf diese Vernachlässigung zurückzuführen sind.

Auf jeden Fall ist die systematische Abweichung, wenn es sich ja um eine solche handeln sollte, so klein, daß man mit großer Näherung das Gesetz (1) auf jeden Fall auch bei solchen rasch oszillierenden Bewegungen als gültig ansehen kann. Der Geschwindigkeitsbereich, in dem also die Anwendbarkeit der Formel erprobt erscheint, erstreckt sich etwa von der Größenordnung $5 \cdot 10^{-3}$ cm/sec für die Bewegungen im Gleichfeld bis zu einer mittleren Geschwindigkeit von der Größenordnung 1 cm/sec bei der Bewegung im Wechselfelde, wobei

1) Die angegebenen Werte für v_f und v_s sind Mittelwerte aus je 50—150 Einzelmessungen.

2) Mittelwert aus den in Tab. 2, Spalte 4 angegebenen Werten.

aber in der Nähe der Mitte der Schwingungsbahn des Teilchens die Geschwindigkeit noch größer anzusetzen ist.[1])

Aus dem Gleichverteilungssatz kann man nun für Partikel der verwendeten Größenordnung die mittlere Geschwindigkeit bei ihrer Brownschen Bewegung ausrechnen und erhält dafür der Größenordnung nach etwa 3 cm/sec, was also mit der Bewegung im Wechselfelde um so eher vergleichbar erscheint, als es sich ja auch hier um eine rasch zitternde Bewegung handelt.

Es erscheint mir daher berechtigt, aus dem Vorhergehenden den Schluß zu ziehen, daß für die geradlinige Bewegung eines Teilchens unter dem Einfluß einer konstanten Kraft dasselbe Widerstandsgesetz Gültigkeit habe, wie für die Brownsche Molekularbewegung, eine Annahme, die ja übrigens bis jetzt allgemein gemacht worden ist, aber ohne eine genügende Stütze keineswegs von vornherein als plausibel angesehen werden kann.

Es ist also gestattet, bei Teilchen dieser Größenordnung aus Messungen der Brownschen Bewegung, vorausgesetzt, daß man zu ihrer Auswertung ein einwandfreies Rechenverfahren benützt, die Beweglichkeit der Teilchen zu bestimmen.

§ 5.

Nach dem im vorigen Paragraphen Auseinandergesetzten können wir also daran gehen, die aus der Brownschen Bewegung an einem Einzelteilchen berechneten Beweglichkeitswerte mit jenen zu vergleichen, die sich aus den an demselben Teilchen gemessenen Steig- und Fallgeschwindigkeiten bei Zugrundelegung eines bestimmten Widerstandsgesetzes ergeben, ohne befürchten zu müssen, daß den ersteren Werten ein

1) Die genaue Gültigkeit von Gleichung (7) ist inzwischen durch Versuche von N. A. Shewhart (Phys. Rev. (2) **9**. S. 425. 1917) und R. B. Albott (Phys. Rev. (2) **12**. S. 381. 1918), die mir aber im Originale nicht zugänglich waren, für noch größere Geschwindigkeiten von $v = 10$ bis 75 cm/sec an Öl- und Wassertropfen, sowie Lykopodiumteilchen erwiesen worden, indem die Partikel zwischen parallelen, vertikalen Kondensatorplatten gleichzeitig der Wirkung der Schwerkraft und der eines horizontalen Wechselfeldes von 28000 Volt und 60 per/sec ausgesetzt wurden. Es zeigte sich, daß die so beschriebene Bahn rein sinusförmig war und daß ihre Amplitude der Feldstärke proportional war. Diese Resultate sprechen für die Richtigkeit der obigen Überlegungen.

wesentlicher, verfälschender Einfluß zugesellt sei. Eine solche Vergleichung ist ja bereits in Teil II dieser Arbeit, S. 89, durchgeführt worden und hatte das Ergebnis, daß für Metallpartikel die Brownsche durchwegs unterhalb derjenigen Beweglichkeit lag, die sich aus dem Stokesschen oder dem Cunninghamschen Gesetz ergab, bei Ölpartikeln hingegen meist oberhalb. Während die Beobachtungen an letzterem Material durch allmähliches Verdampfen der Öltropfen sicher verfälscht sind, läßt sich ein Grund für die Abweichung an den Metallpartikeln darin finden, daß bei der Berechnung der Brownschen Beweglichkeit aus den Abweichungen von den konstanten Steig- und Fallzeiten ein sytematischer Fehler stets zu kleine Resultate vortäuscht.[1])

Um diesen Fehler zu entgehen, wurde diesmal die Brownsche Beweglichkeit nach der vom Verfasser mit dem Namen der Messung von „mittleren, doppelseitigen Erstdurchgangszeiten" bezeichnete Methode[2]) verwendet, indem vermittelst des Morseapparates jeder Durchgang eines Teilchens durch einen Vertikalstrich des Okularrasters registriert und aus allen, zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen liegenden Zeiten das Mittel genommen wurde. Aus diesen doppelseitigen horizontalen Erstdurchgangszeiten ϑ ergibt sich nach der a. a. O., S. 183 mitgeteilten Formel die Beweglichkeit aus

$$2D = \frac{b^2}{\vartheta}, \qquad D = \frac{R}{N} T \cdot B \tag{9}$$

(D: Diffusionskoeffizient; b: Rasterintervall; R: absolute Gaskonstante; N: Loschmidtsche Zahl; T: absolute Temperatur).

Die Stokessche bzw. Cunninghamsche Beweglichkeit folgt aus den Formeln Teil II, S. 88 Formel (4) bzw. (4').

Es wurden nun für eine Anzahl von Ag-Teilchen Beobachtungen dieser Art angestellt, deren Ergebnis die folgende Tabelle 4 enthält. Die Werte der zur Berechnung verwendeten Konstanten sind dieselben, wie früher, bis auf die Dichte des Ag: $\sigma = 10{,}5$.

Wie man sieht, fällt B_{Br} innerhalb der, wie bereits oben erwähnt, beträchtlichen Fehlergrenzen, durchwegs mit den B_{St} zu-

1) R. Fürth, Ann. d. Phys. 59. S. 409ff. 1919.
2) R. Fürth, Ann. d. Phys. 53. S. 177. 1917.

sammen, während die B_c meist eine ganze Größenordnung höher liegen als diese. Da nach dem Obigen kein Grund vorliegt, an der Richtigkeit der B_{Br} zu zweifeln, werden wir neuerlich, und diesmal schärfer, zu der bereits in Teil II am Schlusse dargelegten Meinung gedrängt, daß die Cunninghamsche Korrektur am Stokesschen Gesetz nicht den tatsächlichen Verhältnissen gerecht wird, sondern vielmehr das unkorrigierte Stokessche Gesetz zur Anwendung zu kommen hat.

Tabelle 4.

Nr.	$B_{Br} \cdot 10^{-8}$	$B_{St} \cdot 10^{-8}$	$B_c \cdot 10^{-8}$
14	0,326	0,256	0,740
17	0,286	0,210	0,500
20	0,318	0,380	1,220
21	0,257	0,393	9
22	0,287	0,368	3,22
27	0,236	0,271	0,81
28	0,222	0,331	1,26
29	0,329	0,325	1,20
30	0,348	0,250	0,698
31	0,165	0 250	0,710
32	0,239	0 256	0,740
33	0,367	0,246	0,68
34	0,240	0,311	1,14
35	0,311	0,342	1,35
36	0,260	0,339	1,28
37	0,249	0,285	0,92

Da seiner theoretischen Begründung nach das Stokessche Gesetz eine vollständige Mitnahme des umgebenden Mediums durch die bewegte Kugel verlangt, das Cunninghamsche Gesetz jedoch eine Mitnahme nur insofern, als sie durch die Stöße der Mediummoleküle auf die Kugeloberfläche bedingt werden, scheint es nach unseren obigen Überlegungen, als ob von dem Partikel in der Tat an seiner Oberfläche das umgebende Gas vollständig mitgeführt wird, was mir durchaus plausibel erscheint, da ja die Annahme einer an der Oberfläche fester Körper haftenden Gashaut, die auf gewisse Adhäsionskräfte zwischen Gas und festem Körper ungezwungen zurückgeführt werden kann, geläufig ist.

§ 6.

Mit der Frage der Gültigkeit eines bestimmten Widerstandsgesetzes hängt in der innigsten Weise auch die nach der

Größe der auf den Partikeln sitzenden Ladungen zusammen, da ja diese aus der bekannten Größe von $e\,B$ einerseits und von B andererseits berechnet wird. Die bekannten Arbeiten über Ladungsbestimmungen an Einzelpartikeln der Ehrenhaftschen Schule verwenden ausschließlich die Cunninghamsche Korrektur des Stokesschen Gesetzes und es geht aus Tab. 4 hervor, daß im Falle dieses Gesetz in der Tat nicht richtig sein sollte, zu große Werte der Beweglichkeit, also zu kleine Werte der Ladung vorgetäuscht werden müssen. Und diese Differenz vergrößert sich um so mehr, zu je kleineren Partikeln man übergeht, da der Unterschied zwischen den beiden Widerstandsgesetzen immer größer wird, und schließlich mit fallendem Partikelradius rapide ansteigt.

Ohne hier die strittige Frage nach der Größe dieser Ladungen irgendwie beantworten zu können, gebe ich doch, wie in Teil II dieser Arbeit die Resultate der Ladungsbestimmungen an den von mir beobachteten Ag-Partikeln in der Tabelle V wieder, wobei jedesmal aus v_s, v_f und v_g das Produkt $e\,B$ und vermittelst Zugrundelegung eines der Widerstandsgesetze bzw. aus der Brownschen Bewegung das B und damit das e berechnet wurde.

Man ersieht aus der Tabelle 5, daß durchweg die Ladungen e_e kleiner sind, als die analogen e_{St} bzw. e_{Br}, während die beiden letzten dieselbe Größenordnung besitzen. Jedenfalls auffallend ist die Tatsache, daß diese letzteren Ladungswerte sämtlich in der Größenordnung des üblichen Elektrons liegen, wenn sie auch keineswegs als ganzzahlige Vielfache dieser Größe aufgefaßt werden können und auch öfters Unterschreitungen des Millikanschen Wertes $4{,}77 \cdot 10^{-10}$ auftreten.

Da uns dieses Ergebnis bereits in derselben Weise in Teil II an den Ladungen von Hg- und Ölteilchen entgegengetreten ist, scheint es in Anbetracht der prinzipiellen Wichtigkeit derartiger Messungen dringend notwendig, die wahre Gestalt des Widerstandsgesetzes in Gasen an kleinen Materiepartikeln einwandfrei zu ermitteln. Der Verfasser hofft, auf Grund bereits ins Werk gesetzter Versuche bald in der Lage sein zu können, die Frage im Sinne der Festlegung eines bestimmten Widerstandsgesetzes in Gasen entscheiden zu können.

Tabelle 5.

Nr.	$e_c \cdot 10^{10}$	$e_{St} \cdot 10^{10}$	$e_{Br} \cdot 10^{10}$
1	3,12	8,97	
2	1,328	5,22	
3	1,45	5,96	
4	0,742	2,47	
5	1,266	5,44	
6	0,856	2,82	
7	0,684	5,35	
12	1,71	5,69	
13	0,858	4,54	
14	2,97	8,59	6,72
15	5,19	15,3	
16	6,66	16,9	
17	5,55	13,22	9,72
18	6,58	16,9	
19	2,55	9,42	
20	2,20	7,06	8,45
21	0,367	8,40	12,82
22	0,393	3,45	4,37
23	1,142	3,34	
24	3,96	11,05	
25	3,83	11,15	
26	2,025	6,68	
27	4,63	13,81	15,85
28	1,13	4,30	6,40
29	1,165	4,30	4,24
30	1,222	3,41	2,45
31	2,27	6,48	9,80
32	1,298	3,74	4,02
33	4,51	12,42	8,33
34	2,54	9,30	12,06
35	1,835	7,25	7,95
36	2,20	8,32	10,81
37	2,22	7,19	8,22

Zusammenfassung.

Es wird untersucht, ob die Beweglichkeit eines in einem Gase bewegten kleinen Metallpartikels von der Geschwindigkeit und dem Charakter dieser Bewegung innerhalb gewisser Grenzen unabhängig sei. Zu diesem Zwecke werden elektrisch geladene Ag-Kügelchen mittels der Ehrenhaftschen Versuchsanordnung beobachtet und konstatiert, daß

1. Das Produkt $e\,B$, für ein und dasselbe Partikel berechnet, aus verschiedenen Steig- und Fallgeschwindigkeiten im elektrischen Felde unter dem Einfluß verschiedener Feldkräfte konstant ist.

2. Daß auch für rasch oszillierende Bewegungen im elektrischen Wechselfelde das Produkt $e\,B$, berechnet aus der Amplitude der Teilchenschwingung in derselben Größe herauskommt, als der nach Methode 1. Dabei wurde sowohl die effektive Spannung des Wechselfeldes als auch die Spannung des Gleichfeldes innerhalb weiter Grenzen verändert. Eine kleine systematische Vergrößerung der $(e\,B)_w$ gegenüber den $(e\,B)_g$ ist vielleicht auf Vernachlässigung der elektrischen Oberschwingungen zurückzuführen.

3. Da auch die Brownsche Bewegung den Charakter einer solchen oszillierenden Bewegung mit etwa derselben mittleren Geschwindigkeit besitzt, so kann man schließen, daß die Beweglichkeitsbestimmungen an Einzelteilchen aus der Brownschen Bewegung nach einer einwandfreien Rechenformel (mittlere doppelseitige Erstdurchgangszeiten) zu richtigen Werten für B führen.

4. Berechnet man einerseits für ein und dasselbe Partikel die Beweglichkeit durch Messung der Brownschen Bewegung nach der Methode der „doppelseitigen horizontalen Erstdurchgangszeiten" und andererseits ans Steig- und Fallbeobachtungen unter Zugrundelegung eines bestimmten Widerstandsgesetzes, so findet man innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler zwar Übereinstimmung zwischen der Brownschen und der nach dem Stokesschen Gesetz berechneten Beweglichkeiten, hingegen kommen die nach Cunningham berechneten durchwegs kleiner heraus. Es wird daher die Ansicht ausgesprochen, daß das letztere Gesetz den tatsächlichen Verhältnissen nicht entspricht.

5. Berechnet man aus den gemessenen Steig- und Fallzeiten die Partikelladungen nach einer der drei Methoden e_{Br}, e_{St}, e_c, so findet man ungefähre Übereinstimmung zwischen e_{Br} und e_{St}, während e_c viel kleiner herauskommt. Die ersteren Ladungswerte liegen alle in der ungefähren Größenordnung des üblichen Elektrons, lassen sich aber nicht als ganzzahlige Vielfache eines Elementarquantums dieser Größenordnung auffassen.

Die endgültige Festlegung des Widerstandsgesetzes in Gasen für Kugeln der verwendeten Größenordnung erscheint als ein dringendes Desideratum, Versuche zur Klärung dieser Frage werden in Aussicht gestellt.

Prag, im Mai 1920.

(Eingegangen 22. Mai 1920.)

3. *Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit des Wassers im Bereich von 0 bis 80°; von Max Jakob.*

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

A. Allgemeines.

Das Wärmeleitvermögen des Wassers und anderer Flüssigkeiten in Abhängigkeit von der Temperatur mit Sicherheit zu kennen, ist von großer Wichtigkeit sowohl für die Theorie der Flüssigkeiten[1]) als auch für die technische Beurteilung von Strömungs- und Wärmeübertragungsverhältnissen in Flüssigkeiten und Gasen auf Grund der Ähnlichkeitsgesetze.[2]) Diese Größe ist daher auch von vielen Forschern und nach den verschiedensten Methoden gemessen worden. Deren Ergebnisse weichen aber weit voneinander ab, wie aus Fig. 1 ersichtlich ist. Nicht nur die Absolutwerte sind zum Teil auf 10% und mehr unsicher; es ist auch in den Messungen der letzten 50 Jahre keine kontinuierliche Annäherung an einen wahrscheinlichsten Verlauf der Wärmeleitfähigkeit mit der Temperatur zu erkennen, sondern ein gesetzloses Pendeln zwischen größeren und kleineren Werten; ja es ist noch nicht einmal entschieden, ob das Wärmeleitvermögen mit zunehmender Temperatur zu- oder abnimmt. Oberhalb von 47° endlich sind überhaupt noch keine Messungen vorgenommen worden.

Als nun an die Reichsanstalt aus der Praxis der Antrag gestellt wurde, die Wärmeleitfähigkeit eines Transformatoröles

1) Vgl. z. B. H. F. Weber, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1885. S. 809; R. Goldschmidt, Phys. Zeitschr. 12. S. 417. 1911.

2) Vgl. z. B. W. Nusselt, Der Wärmeübergang in Rohrleitungen (Mitt. über Forschungsarb. auf d. Gebiete d. Ingenieurwesens, Heft 89. S. 1. 1910); L. Prandtl, Eine Beziehung zwischen Wärmeaustausch und Strömungswiderstand der Flüssigkeiten (Phys. Zeitschr. 11. S. 1072. 1910); W. Nusselt, Das Grundgesetz des Wärmeüberganges (Gesundheits-Ingenieur 38. S. 477 u. 490. 1915); W. Nusselt, Die Oberflächenkondensation des Wasserdampfes (Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 60. S. 541. 1916.)

zwischen 20 und 70° zu bestimmen (als Grundlage für die Berechnung von Transformatorkühlern im Sinne der Nusselt-

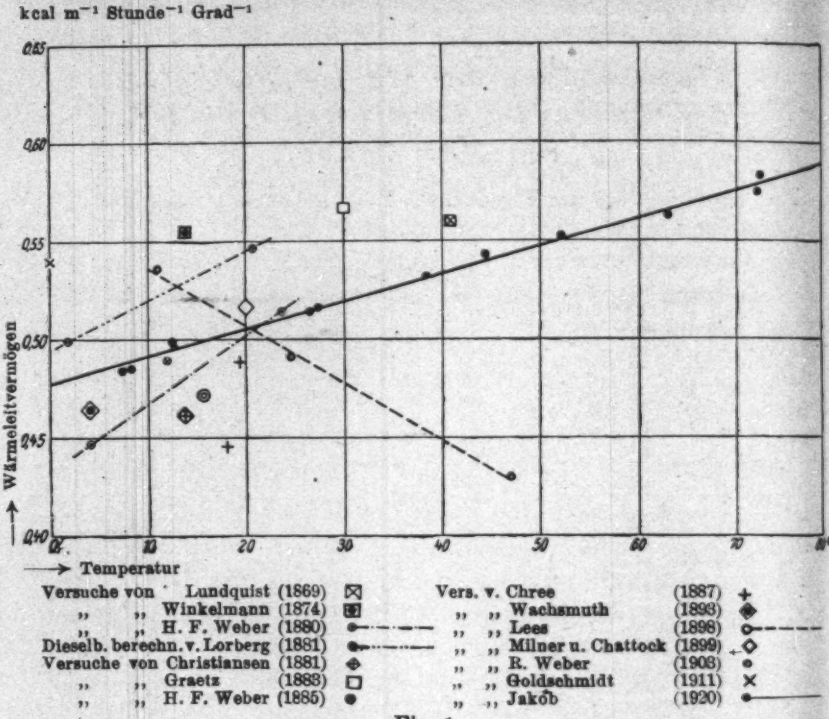


Fig. 1.

schen Untersuchungen), da zeigte es sich, daß keine der bekannten Methoden diese Bestimmung mit Sicherheit erlaubte, und es war erforderlich, eine neue Methode auszuarbeiten. Es lag dann nahe, mit diesem Verfahren eine genaue Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit des Wassers auszuführen.[1])

B. Die bisher angewandten Verfahren und ihre Ergebnisse.

Zunächst sollen nun die bisher angewandten Verfahren in zeitlicher Folge einer kritischen Betrachtung unterzogen werden. Wir werden dabei wichtige Einzelheiten kennen lernen, die nur übernommen zu werden brauchten, und andererseits Fehler, die bei unseren Versuchen vermieden werden mußten.

1) Ein kurzer Bericht ist bereits in den Sitzungsber. d. Berl. Akad. d. Wiss. 1920. S. 406 veröffentlicht.

1. Von den ältesten Bestimmungen verdient nur die von Lundquist[1]) Erwähnung. Dieser hat eine in einen Glaszylinder eingefüllte Wassermenge nach Ångströms Vorgang periodischer Erwärmung und Abkühlung unterworfen und aus dem Temperaturverlauf zweier Quecksilberthermometer, die mit 25 mm vertikalem Abstand horizontal in den Glaszylinder eingeführt waren, bei 40,8° die Wärmeleitfähigkeit

$$\lambda = 0{,}559_8\,[\text{kcal} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{Stde}^{-1} \cdot \text{Grad}^{-1}]$$

gefunden. Die absolute Genauigkeit der Methode läßt sich schwer beurteilen; möglicherweise ist der Wärmeübergang durch Konvektion bei den wechselnden Temperaturen etwas vergrößert; die Einzelbeobachtungen weichen um höchstens 5% voneinander ab.

2. Winkelmann[2]) hat die zu untersuchende Flüssigkeit in den 2 bis 5 mm weiten Ringraum zwischen zwei konzentrischen, vertikalen Messingzylindern gebracht und die Abkühlung der Luft im inneren Zylinder gemessen, nachdem der ganze Apparat in Eis gesteckt war. Infolge der Flüssigkeitsströmung in der Ringschicht, ist sein Wert $\lambda = 0{,}554_4$ bei 14° viel zu hoch, wie H. F. Weber[3]) ausführlich nachgewiesen hat.

3. Letzterer Forscher hat in der gleichen Abhandlung eine bemerkenswerte neue Methode angegeben. Das Wasser wurde dabei zwischen zwei kreisförmige, horizontale, durch kleine Glasstückchen voneinander getrennte Kupferplatten gebracht und durch seine eigene kapillare Spannung am Rand vor dem Ausfließen bewahrt. In einem bestimmten Augenblick wurde nun die untere Kupferplatte auf eine horizontale Eisfläche, bzw. mit einem kühlenden Wasserstrom in Berührung gebracht und das Plattensystem mit einer Kupferhaube von der Temperatur des Kühlmittels überdeckt. Aus der zeitlichen Temperaturabnahme und verschiedenen Konstanten der Anordnung ließ sich dann die Wärmeleitfähigkeit des Wassers berechnen, wenn noch die äußere Wärmeableitung des Plattensystems durch besonderen Versuch bestimmt war. So erhielt Weber

1) C. G. Lundquist, Upsala Universitets Årsskrift 1869. 29 S.
2) A. Winkelmann, Pogg. Ann. 153. S. 481. 1874.
3) H. F. Weber, Wied. Ann. 10. S. 103, 304 u. 472. 1880.

$$\text{für } 4{,}1^\circ \ \lambda = 0{,}447_0 \text{ und}$$
$$\text{für } 23{,}7^\circ \ \lambda = 0{,}514_2$$

und hieraus unter Annahme linearer Zunahme mit der Temperatur t die Gleichung

$$\lambda = 0{,}433_2 (1 + 0{,}00786\, t) \tag{1}$$

(Strichpunktierte Gerade in Fig. 1).

4. Lorberg[1]) hat Webers Berechnungsmethode angezweifelt und abgeändert. Er berechnet aus Webers Versuchen

$$\text{für } 1{,}9^\circ \ \lambda = 0{,}499_0 - 0{,}000046\, h,$$
$$\text{für } 20{,}8^\circ \ \lambda = 0{,}546_5 - 0{,}000046\, h$$

als wahrscheinlichste Werte.[2]) Dabei ist h die äußere Wärmeleitfähigkeit der Wasserlamelle. Weber hat diese vernachlässigt; Lorberg macht zwar darauf aufmerksam, daß in h ein Betrag für die Verdampfung am Rand enthalten sei, hält aber h/λ für wesentlich kleiner als 1, wonach das Korrekturglied $0{,}000046\, h$ innerhalb der von Weber erstrebten Genauigkeit läge und somit zu vernachlässigen wäre.

5. Weber hat in einer späteren Veröffentlichung[3]), laut welcher er den im Vergleich zur Formel (1) etwas höheren Wert $\lambda = 0{,}489_6$ für 12° gefunden hat[4]), Lorbergs Einwände erwähnt und eine Widerlegung in nahe Aussicht gestellt, eine solche aber offenbar ebensowenig veröffentlicht, wie das ebenfalls damals angekündigte ausführliche Versuchsmaterial.

Aus Fig. 1 ist ersichtlich, daß die von Lorberg berechneten Werte (obere strichpunktierte Gerade) bei 4° um etwa 10% höher sind als die von Weber berechneten. Es scheint jedoch, daß in Wirklichkeit λ zwischen beiden Geraden liegt. Die Verdampfung am Rand der Wasserlamelle macht nämlich mehr aus, als Lorberg angenommen hat, wie aus Webers

1) H. Lorberg, Wied. Ann. 14. S. 291 u. 426. 1881.

2) Nach seinen Ausführungen kann man die obigen Werte mit gleichem Recht auf 0 wie auf 3,9° und auf 18,5 wie auf 23,2° beziehen; ich habe daher die Mittelwerte 1,9° und 20,8° angenommen.

3) H. F. Weber, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1885. S. 809.

4) Die Temperatur ist in dieser Abhandlung nicht genau angegeben. Es ist nur erwähnt, daß sie zwischen 9 und 15° gelegen hat. Ich habe daher den Mittelwert 12° angenommen.

eigenen Angaben[1]) hervorgeht. Die von Lorberg unter Vernachlässigung der Verdampfungswärme berechneten Werte sind also zu hoch. Nach all dem sind Webers Werte so unsicher, daß es sich erübrigt, auf experimentelle Mängel, wie die Befestigung des Thermoelementes in der Mitte der oberen Kupferplatte, einzugehen.

6. Kurz nach Webers erster Untersuchung hat Christiansen[2]) die Wärmeleitfähigkeit des Wassers relativ zu Luft bestimmt, indem er drei Kupferplatten mit dünnen Zwischenschichten von Luft und Wasser übereinander anordnete und ihre Temperaturdifferenzen bestimmte, wenn Wärme im Dauerzustande von oben nach unten hindurchströmte. Die Luftschicht war dabei nur 0,2 mm stark; der geringste Feuchtigkeitsniederschlag auf den angrenzenden Kupferflächen mußte die Wärmeleitfähigkeit des Wassers zu gering erscheinen lassen. Christiansen fand bei 13,7° das Wärmeleitvermögen des Wassers 21,0 mal so groß als das der Luft bei 27,9°. Da das letztere nach den neuesten Versuchen

$$0{,}022\,[\mathrm{kcal}\cdot \mathrm{m}^{-1}\cdot \mathrm{Stde}^{-1}\cdot \mathrm{Grad}^{-1}]$$

beträgt[3]), so ergibt sich der in Fig. 1 eingetragene Wert $\lambda = 0{,}462$.

7. Während die bisher erwähnten Messungen an ruhendem Wasser angestellt sind, hat Graetz[4]) versucht, die Wärmeleitfähigkeit aus der Menge und dem Temperaturabfall der ein

---

1) Weber bemerkt (a. a. O. S. 305), daß die Flüssigkeit nach dem Einfüllen „rings an den Plattenrändern mit einem ca. 1 mm dicken, regelmäßig gekrümmten Bauch herausdrängte“ und sagt weiter: „Beim Einfüllen der Flüssigkeit wurde die Weite der Ausbauchung so groß gewählt, daß die nach erfolgter Abkühlung stattfindende Einbauchung von nahezu gleicher Größe war.“ Er legt das Zurücktreten des Flüssigkeitsrandes der Abkühlung (beim Aufbringen der Platten auf Eis) zur Last; durch diese hätte jedoch die Ausbauchung sich nur um wenige Hundertel mm verringern können. Die Einbauchung des Flüssigkeitsrandes ist in Wirklichkeit der Verdampfung zuzuschreiben. Da die Versuchsdauer nur wenige Minuten betrug, so verdampft dabei fast ebensoviel in die übergestülpte Kupferglocke von nicht bezeichneter Größe wie bei gleicher Temperatur und Luftfeuchtigkeit in die freie Atmosphäre. Vgl. hierüber auch S. 556 dieser Abhandlung.

2) C. Christiansen, Wied. Ann. 14. S. 23. 1881.

3) W. Nusselt, Gesundheitsingenieur, a. a. O.

4) L. Graetz, Wied. Ann. 18. S. 79. 1883.

enges Rohr von bestimmter niedrigerer Außentemperatur durchströmenden Flüssigkeit zu bestimmen. Er hat dabei — mit einer relativen Genauigkeit der Versuchspunkte von $\pm 5\%$ — den Mittelwert $\lambda = 0{,}567_0$ für 30° gefunden, in einer späteren Abhandlung[1]) aber selbst ausgeführt, daß die Werte seiner früheren Arbeit zu groß sind.[2])

8. Hieran schließt sich in zeitlicher Folge die Untersuchung von Chree[3]), der auf der Oberfläche der einen vertikalen Zylinder erfüllenden Wassermenge eine Schale aufsetzte und das Wasser erwärmte, indem er in die Schale plötzlich heißes Wasser eingoß. Aus der Temperaturänderung eines in einiger Tiefe gespannten Platindrahtes versuchte er λ zu berechnen. Seine Versuche leiden aber außer an der Vernachlässigung des Einflusses der Randerscheinungen in dem Zylinder vor allem daran, daß die Wärmeabgabe des Wassers in der Schale an die Außenluft nur durch einen kaum einwandfreien Differenzversuch berücksichtigt wurde. Die von Chree gefundenen Werte (0.446_4) (bei 18°) und $0{,}488_9$ (bei 19,5°) weichen zudem auch voneinander um über 9% ab.

9. Die Webersche Lamellenmethode mit der Berechnungsweise von Lorberg hat Wachsmuth[4]) wieder aufgenommen. Sein Wert $\lambda = 0{,}464_5$ für 4,1° liegt aber wesentlich unter dem, Lorbergschen Wert (vgl. Fig. 1).

10. Während aus den Versuchswerten von Lundquist Weber, Graetz und Chree eine Zunahme der Wärmeleitfähigkeit mit der Temperatur mehr oder minder deutlich hervorzugehen scheint, hat Lees[5]) bei Wasser und anderen Flüssigkeiten eine beträchtliche Abnahme von λ mit zunehmender Temperatur gefunden. Er hat das Wärmeleitvermögen der Flüssigkeiten nicht absolut bestimmt, sondern relativ zu dem einer Glasplatte, deren Wärmeleitzahl er nach einem Verfahren für feste, schlechte Wärmeleiter absolut gemessen hat.

---

1) L. Graetz, Wied. Ann. 25. S. 337. 1885 (vgl. insbesondere S. 349).

2) Trotzdem glaubte ich, den obigen Wert nicht unterdrücken zu dürfen, da L. Graetz ihn in A. Winkelmanns Handbuch der Physik (3. S. 524. 1906) ebenfalls angeführt hat.

3) C. Chree, Proc. of the Roy. Soc. 42. S. 300 u. 43. S. 30. 1887.

4) R. Wachsmuth, Wied. Ann. 48. S. 158. 1893.

5) Ch. Lees, Phil. Trans. (A) 191. S. 399. 1898.

Dies Verfahren besteht darin, die in einem scheibenförmigen Heizkörper elektrisch erzeugte Energie durch mehrere daraufgesetzte Scheiben aus Kupfer und dem zu untersuchenden Stoff hindurchzutreiben und aus der Heizenergie und den Temperaturen der Kupferplatten im Dauerzustand die äußere und innere Wärmeleitfähigkeit zu berechnen. Dabei wird vorausgesetzt, daß bei gleicher Außentemperatur die Wärmeabgabe an die Luft nur von der Temperatur und Größe der Außenflächen der einzelnen Platten abhängig sei. Nun ist aber zu beachten, daß es nicht genügt, durch Firnissen gleichartige Oberflächen herzustellen und die Hauptflächen der Platten vertikal zu richten, wie dies Lees tut, daß vielmehr das äußere Wärmeleitvermögen h auch bei gleicher Oberflächenbeschaffenheit sehr wesentlich von der Form der Fläche abhängt[1]) und an den zylindrischen Rändern ganz anders sein wird als an den ebenen Endflächen, weil die Konvektion dabei verschieden ist. Dies hat Lees übersehen. Aber noch mehr; er berücksichtigt die Wärmeableitung durch die zur Messung der Plattentemperaturen angebrachten Thermoelemente, indem er einen gewissen Betrag zu der Dicke der betreffenden Kupferplatten hinzurechnet. Dabei nimmt er für Drähte von Zehnteln mm Stärke das gleiche h wie für seine Platten von 4 cm Durchmesser, während in Wirklichkeit h im ersteren Fall vielleicht viermal so groß ist.[2]) Da $\sqrt{h}$ in Lees Gleichung eingeht, so wäre die Korrektur etwa zweimal so groß zu nehmen. Die Dicke der einzelnen Kupferplatten ist daher um den vollen Betrag der von Lees angegebenen Korrektur (der nicht weniger als 20 bis 30% der wirklichen Plattendicke ausmacht) zu gering angenommen, was allerdings zufällig infolge der Form der Gleichungen auf das Resultat nur einen Einfluß von einigen Prozenten ausübt. Auch die Befestigung der Thermoelemente ist nicht einwandfrei. Endlich wird die Gültigkeit der Formeln durch das viel zu kleine Verhältnis des (nur 4 cm betragenden) Durchmessers zu der Dicke der Platten beeinträchtigt. Es tritt nämlich eine erhebliche Krümmung der Wärmeströmungslinien in den Versuchsplatten auf, die nicht in Rechnung gesetzt ist.

1) Vgl. z. B. A. Winkelmann, Wied. Ann. 29. S. 68. 1886.
2) Vgl. W. Nusselt, Gesundheitsingenieur, a. a. O.

Aus all diesen Gründen wird man den Werten für Glas und andere feste Stoffe kaum eine große Genauigkeit zuschreiben dürfen. Messungen mit Flüssigkeiten darauf zu gründen, ist überaus gewagt.

Bei diesen Messungen strömte die Wärme durch eine ähnliche, aber horizontal gestellte Scheibenanordnung und zwar zunächst durch eine zwischen Kupferplatten eingelegte Glasplatte und dann durch eine Flüssigkeitsschicht von 37 mm Durchmesser, welche am Rand von einem Ebonitring von 16 mm Dicke umschlossen war. Aus dem Temperaturgefälle im Glas und in der Flüssigkeit, dem äußeren Wärmeleitvermögen h (welches aus den Beobachtungen an festen Körpern, ohne Berücksichtigung der veränderten Lage der Platten, mit großer Unsicherheit abgeleitet ist) und der Wärmeleitfähigkeit des Glases wurde nun die Wärmeleitfähigkeit der Flüssigkeit gewonnen. Dabei störte natürlich sehr, daß die Wärme zum Teil in den Ebonitrand strömte; diesen Betrag suchte Lees durch einen Differenzversuch, bei dem sich statt der Flüssigkeit Luft zwischen den unteren Platten und dem Ebonitring befand, zu eliminieren. Bezüglich der Messung und Auswertung gilt das oben über die Messungen an festen Körpern Gesagte.

Die von Lees für Wasser ermittelten Werte $\lambda = 0{,}491_4$ für $24^1/_2{}^0$ und $\lambda = 0{,}430_2$ für 47^0, aus denen er graphisch linear den Wert $\lambda = 0{,}536_4$ für 11^0 extrapolierte (vgl. gestrichelte Gerade in Fig. 1), müssen daher als ganz unsicher bezeichnet werden. Dasselbe gilt für die Gleichung

$$\lambda = 0{,}566_2 (1 - 0{,}0052\, t) \tag{2}$$

mittels deren man seine Werte am besten wiedergeben kann.

11. Im Gegensatz zu dieser Arbeit verdient die Untersuchung von Milner und Chattock[1]) wegen ihrer Gründlichkeit besondere Beachtung. Läßt man durch eine Wasserschicht von der Fläche F, deren Dicke variiert werden kann und einmal d', ein andermal d'' betragen möge, von oben nach unten die gleiche Wärmeenergie W im Dauerzustande strömen, so gilt

1) S. R. Milner und A. P. Chattock, Phil. Mag. (5) 48. S. 46. 1899.

(3) $$W = \frac{F}{d'}(t_1' - t_2)\lambda$$

und

(4) $$W = \frac{F}{d''}(t_1'' - t_2)\lambda\,,$$

wenn die untere Temperatur t_2 der Wasserschicht in beiden Fällen gleich gehalten wird, die obere Temperatur t_1', bzw. t_1'' beträgt. Hieraus folgt

(5) $$\frac{W}{F}(d' - d'') = \lambda(t_1' - t_1'')\,.$$

Man könnte aus jeder der Gleichungen (3) und (4) für sich λ berechnen. Milner und Chattock aber haben ihr Versuchsverfahren auf Gleichung (5) gegründet. Sie verwendeten zwei ganz gleiche Apparate, bei denen die ganz flachen, gleichgebauten und vom gleichen Strom durchflossenen Platindrahtheizkörper durch eine Brückenschaltung gleichzeitig als Differenzthermometer zur Messung von $(t_1' - t_1'')$ dienten. Jeder Heizkörper ruhte auf einer dünnen Glasscheibe, welche die obere Grenze der Flüssigkeitsschicht bildete, während die untere ein Metallboden war, der durch Kühlwasser auf der Temperatur t_2 gehalten wurde. Die Dicke der Schicht wurde durch Bewegung der einen sie begrenzenden Fläche mittels einer Mikrometerschraube beliebig eingestellt. Durch diese Differenzmethode, bei der beide Apparate gleichzeitig in Betrieb waren, sollte erreicht werden, daß zeitliche Ungleichmäßigkeiten im elektrischen Strom und Kühlwasser und andere Korrekturen sich gegenseitig aufheben. Ferner konnte man, ohne Rücksichtnahme auf den Absolutwert von d' und d'', durch Regulieren an der Mikrometerschraube einen Ausgangszustand für die Messung einstellen, bei dem die Meßbrücke stromlos, also $t_1' - t_1'' = 0$ war, und dann $d' - d''$ an der Schraube ablesen. Das Verfahren ist durch viele Feinheiten und Korrekturen ausgezeichnet; so waren die Heizkörper in eine mittlere Heizfläche (von 4 cm Durchmesser) und „äußere Schutzringe“ (von 11,5 cm Durchmesser) zerlegt; die Wärmeabgabe von den Heizkörpern nach oben wurde durch besondere Heizkörper verhindert, die ebenfalls auf die Temperaturen t_1' und t_1'' geheizt wurden usw. Aus 33 Einzelversuchen, deren Abweichungen voneinander sich in den Grenzen von $\pm$ 1,5% halten, er-

mittelten die Verfasser für 20° den Wert $\lambda = 0{,}515_9$. Mit zunehmender Temperatur scheint nach diesen Versuchen λ zuzunehmen.

12. Im Dauerzustand der Wärmeströmung hat auch R. Weber[1]) eine Bestimmung von λ ausgeführt, jedoch nicht annähernd mit der von den eben genannten Forschern erzielten Genauigkeit. Weber hat die Temperatur einer in einem Glaszylinder befindlichen, von oben nach unten von Wärme durchströmten Flüssigkeitsschicht mit zwei im vertikalen Abstand von 9—10 mm voneinander angeordneten Thermoelementen gemessen. Diesen Abstand hat er nur auf 2—3% genau bestimmen können, und er bezeichnet dies selbst als einen schwachen Punkt seines Verfahrens. Der Apparat war mit Wolle umhüllt; da ferner nur bei annähernd der Außentemperatur gleichen mittleren Temperaturen gemessen wurde, waren die Wärmeverluste gering. Sie wurden durch besondere Versuche bestimmt, wobei die Flüssigkeitsschicht durch Eiderdaunen ersetzt und der Glaszylinder einmal weggenommen, einmal beibehalten war. Bei der Verlustbestimmung hat der Verfasser aber offenbar irrtümlicher Weise der Oberfläche der Wollumhüllung die Außentemperatur zugeschrieben, während die 5—7 Watt betragende Verlustenergie einen Unterschied von der Größenordnung von 10° zwischen der Oberflächen- und Lufttemperatur zur Folge gehabt haben muß. Infolge dieses Irrtums ergibt sich übrigens aus den Versuchen der Wert 0,086 für die Wärmeleitfähigkeit der Wolle, 0,00014 für die der Eiderdaunen. Dies hätte den Verfasser veranlassen müssen, seine Verlustbestimmung nachzuprüfen, da ein solcher Unterschied undenkbar ist und vielmehr beide Stoffe ein Wärmeleitvermögen von der Größenordnung 0,03 [kcal. m^{-1}. $Stde^{-1}$. $Grad^{-1}$] haben werden. Infolge des erwähnten Versehens muß Webers Wert $\lambda = 0{,}473_0$ für 15,7° um einige Prozente zu klein sein.

13. Endlich ist nun noch eine Abhandlung von Goldschmidt[2]) zu erwähnen, der die von Schleiermacher für Gase angegebene Methode modifiziert hat. In ein aus der Versuchsflüssigkeit bestehendes Bad bringt er nämlich einen

1) R. Weber, Ann. d. Phys. 11. S. 1047. 1903.
2) R. Goldschmidt, a. a. O.

Messingklotz, der in einer vertikalen Durchbohrung eine mit dem Bad kommunizierende Silberkapillare von 2 mm lichter Weite trägt. In deren Achse ist ein feiner Platindraht gespannt, der gleichzeitig als Heizkörper und Thermometer für die Flüssigkeit in der Kapillare dient. Beim Anheizen des Drahtes mit dem Strom i nehme sein Widerstand um Δx zu (proportional der Temperaturerhöhung). $\Delta i^2 x/\Delta x$ gibt dann ein relatives Maß für die Wärmeleitung, wenn der Messingklotz seine Temperatur nicht ändert. Die Konvektion soll durch die Enge der Kapillare vermieden, die Einwirkung der Enden der Kapillare und des Drahtes durch die geschickte Gegenschaltung eines Drahtes in einer kurzen Kapillare ausgeschaltet sein. Leider gründet Goldschmidt seinen Absolutwert auf den von Lees angegebenen Wert für Alkohol, der seinerseits wieder, wie oben ausgeführt, auf den Messungen an Glas beruht. Der so berechnete Wert für Wasser von 0° $\lambda = 0{,}540_0$ ist daher jedenfalls nicht brauchbar. Auffallend ist, daß Goldschmidt für verschiedene Flüssigkeiten (ebenso wie Lees) Zunahme von λ mit abnehmender Temperatur (zwischen $+15$ und $-79°$) findet. Da er jedoch den Temperaturkoeffizienten der Wärmeleitfähigkeit des *Wassers* nicht untersucht hat, braucht hier darauf nicht eingegangen zu werden.

Von sämtlichen in diesem Abschnitt erwähnten Messungen sind wohl die von Milner und Chattock am einwandfreiesten. Deren Methode läßt sich jedoch nicht ohne weiteres auf beliebige Temperaturen anwenden und erfordert eine teuere und komplizierte Apparatur. Es wurde daher eine Methode ausgearbeitet, die mindestens ebenso genau, einfacher und für verschiedene Temperaturen brauchbar ist.

C. Das neue Meßverfahren.

I. Grundlagen.

Bei dem in der Reichsanstalt neu ausgearbeiteten Verfahren wird in einem elektrischen Heizkörper im Dauerzustand stündlich die Wärmemenge W erzeugt; deren Hauptteil $U = W - V$ durchströmt vertikal abwärts eine Wasserlamelle, die nach H. F. Webers Vorgang zwischen zwei horizontale Kupferplatten gebracht ist. Oberhalb der Temperatur 4° ist

dabei Wärmeübergang durch Konvektion im Wasser gänzlich ausgeschlossen. Aus der stündlichen Wärmemenge $U = W - V$, der Fläche F und der Dicke d der Flüssigkeitsschicht, sowie dem Temperaturabfall $(t_1 - t_2)$ in dieser Schicht ergibt sich daher die Wärmeleitfähigkeit nach der Formel [1])

$$\lambda = \frac{(W - V)\,d}{F(t_1 - t_2)}. \tag{6}$$

Die sämtlichen Größen auf der rechten Seite dieser Gleichung sind ganz einfach zu messen mit Ausnahme von V. Um die Wärmemenge V, die, ohne die Flüssigkeitsschicht zu durchsetzen, nach außen abströmt, gering zu machen, ist ein Vakuummantelgefäß über das Plattensystem gestülpt. Hierdurch wird der Wärmeverlust durch Konvektion und Strahlung und die Verdampfung des Wassers wesentlich verringert, wie weiter unten auseinandergesetzt wird. Es wird aber ferner hierdurch eine derartige Abgrenzung und Definition der gesamten Versuchsanordnung ermöglicht, daß es gelingt, die Einzelanteile, aus denen sich V zusammensetzt, durch Rechnung und besondere Versuche mit der erwünschten Genauigkeit zu ermitteln. In der Verwendung des Vakuummantelgefäßes und der Bestimmung der Wärmeverluste V ist der Fortschritt begründet, den der Verfasser mit dem jetzt näher zu beschreibenden Verfahren erzielt zu haben hofft.

II. Die Versuchseinrichtung.

In Fig. 2 ist der Versuchsapparat dargestellt. Die Wärmemenge W wird erzeugt in dem Heizkörper H_1. Dieser besteht aus vier hintereinandergeschalteten Drahtspiralen in einem mit Öl gefüllten zylindrischen Kupfergefäß von 2 mm Wandstärke. Der 3 mm starke Messingboden des Gefäßes ist außen möglichst eben gearbeitet; ein Deckel von 2 mm Kupferblech ist in die Zylinderwandung gut eingepaßt. Die Wände des Heizgefäßes mußten deshalb aus Kupfer hergestellt und so dick gehalten werden, damit die Temperatur sich auf seiner Oberfläche möglichst ausgleichen konnte, obwohl das Öl nicht ge-

1) Dabei ist vorausgesetzt, daß das Wärmeströmungsfeld in der ganzen Schicht homogen und auch am Rande nicht verzerrt ist. Der Randverlust der Lamelle war bei unseren Versuchen so gering, daß diese Voraussetzung als erfüllt gelten durfte.

rührt wurde. Die Heizspiralen bestehen aus 0,7 mm starkem Konstantandraht; ihre Gesamtlänge beträgt etwa $14^1/_2$ m, ihr

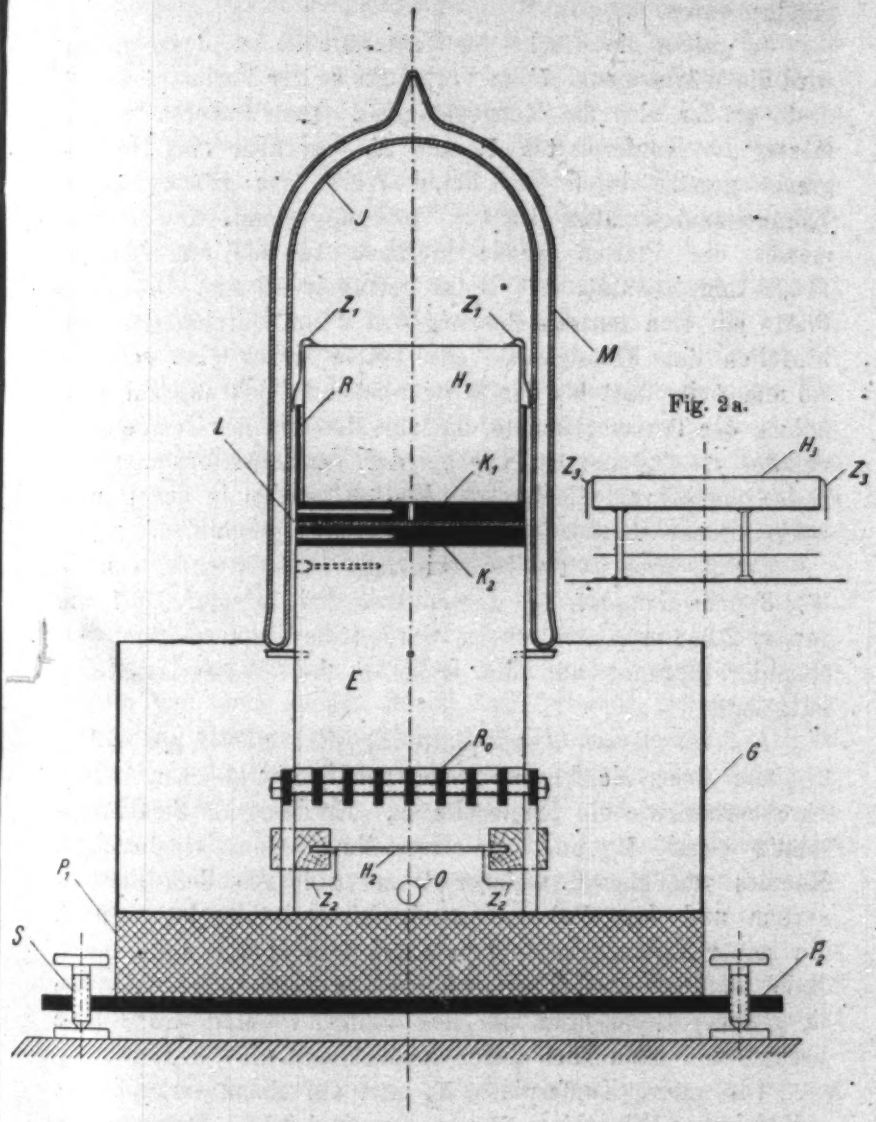


Fig. 2.

Widerstand etwa 20 Ohm. Die Zuleitungsdrähte Z_1 (abgebrochen gezeichnet) sind durch Isolierbuchsen aus dem Deckel des Heizkörpers herausgeführt. Auf dem Deckel war

bei einigen Versuchen ein Thermoelement angelötet, dessen Drähte in üblicher Weise ein Stück weit auf der Deckelfläche geführt waren.

Je größer die Fläche der Wasserlamelle ist, desto größer wird die Wärmemenge U im Verhältnis zu der Verlustwärme V, desto größer also die Meßgenauigkeit. Dem äußeren Durchmesser der Kupferplatten K_1 und K_2 war aber eine Höchstgrenze gesetzt durch die lichte Weite des größten guten Vakuummantelgefäßes, das zur Verfügung stand. Der Durchmesser der Platten wurde hiernach zu 117 mm (genau: 116,85 mm) gewählt; ihre Dicke betrug je 10 mm. Die obere Platte hat eine zentrale Bohrung von 2 mm Durchmesser zum Einfüllen der Flüssigkeit, jede Platte ferner eine seitliche 2,5 mm weite, fast bis zur Mitte reichende Bohrung zur Aufnahme der Thermoelemente, die zur Messung des Temperaturabfalles $(t_1 - t_2)$ dienten. Die bei der Versuchsanordnung einander zugekehrten Flächen der Platten wurden in der Hauptwerkstatt der Reichsanstalt sorgfältig plan geschliffen.

Durch drei kleine rechtwinklige Glasplättchen von je 3×3 qmm Grundfläche, die sämtlich bei 14° (auf 0,001 mm genau) 2,248 mm hoch waren, wurden die Kupferplatten voneinander getrennt und die Dicke d der Wasserlamelle L festgelegt.

Auf der oberen Kupferplatte K_1 sitzt ein 49 mm hoher, $2^1/_2$ mm dicker Messingring R von genau dem gleichen Außendurchmesser wie die Kupferplatten. Er dient als Strahlungsschutz gegen H_1 und zur Herstellung eines ringförmigen Raumes von überall gleicher Weite zwischen dem Plattensystem und dem Vakuummantelgefäß (vgl. hierüber S. 560). An seiner Außenfläche sind je 5 mm vom oberen und unteren Rand entfernt zwei Thermoelemente angelötet, deren Drähte in gleicher Höhe etwa um den halben Umfang des Ringes herum- und dann nach außen geführt sind.

Die untere Kupferplatte K_2 sitzt auf einem verkupferten, zylindrischen Eisenklotz E von genau gleichem Durchmesser, der 10 mm von seinem oberen Rand eine Bohrung für ein Thermoelement enthält und etwa 55 mm vom oberen Rand vier Stifte trägt, auf welchen das Vakuummantelgefäß M aufliegt.

Letzteres, aus Glas und von der üblichen Bauart mit versilberten Wänden (die innere Wand ist noch besonders mit J bezeichnet), war so gleichmäßig zylindrisch, wie man von einem Glasgefäß dieser Größe erwarten kann; die lichte Weite in verschiedenen Tiefen schwankte nämlich um höchstens 2 Proz. ihres Wertes; in einer Tiefe von 50 mm (vom Rand gemessen) war sie im Mittel 122,5 mm. Aus dem Gewicht und den Dimensionen des Gefäßes und der Dichte der Glassorte ergab sich die Wandstärke zu etwa 2,1 mm. Die Dicke der Versilberungsschicht betrug etwa 0,00015 mm.

Der Eisenzylinder E ruhte auf einem eisernen Rost R_0, der auf dem Boden des Gefäßes G stand, und gab die von K_2 herabströmende Wärme an den Inhalt von G ab. Dieser Inhalt bestand bei den Versuchen bis 13° aus schmelzendem Eis. Ein mit Eis gefüllter Blechtrichter mit innerer zylindrischer Wand, welche die Außenwand von M umschloß, war dabei auf das Gefäß G aufgesetzt. Das Schmelzwasser floß durch ein nahe dem oberen Rand von G angebrachtes (hinter E befindliches und daher in Fig. 2 nicht sichtbares) Ablaufrohr ab. — Bei den Versuchen zwischen 20 und 40° durchfloß Kühlwasser[1]), welches bei der Öffnung O eintrat, das Gefäß G. — Bei noch höheren Temperaturen war das Gefäß mit Öl gefüllt. Dieses wurde von dem flachen durch Asbestgewebe isolierten Heizkörper H_2 (Bauart Schniewindt) elektrisch geheizt. H_2 ist mittels zweier Holzklötze zwischen den Füßen des Rostes R_0 eingeklemmt; die Stromzuführungen Z_2 sind abgebrochen gezeichnet. Die Temperatur der in G befindlichen Flüssigkeit wurde mit einem in einem Glasröhrchen eingeführten Thermoelement immer an der gleichen Stelle gemessen.

Das Gefäß G steht auf einer isolierenden Korkplatte P_1, diese wiederum auf einer Richtplatte P_2. Mittels der Schrauben S konnten die Platten K_1 und K_2 genau horizontal eingestellt werden.

Die Versuche wurden im allgemeinen in der Anordnung

---

1) Bei einem dieser Versuche (Nr. 7 der Tabelle 2, S. 569) war dabei die Anordnung nach der in der Zeitschr. f. Instrumentenkunde (39. S. 184. 1919) angegebenen Fig. 11 getroffen. Der dort eingezeichnete Eisenzylinder E' erschwert wegen seiner großen Wärmekapazität die Messung.

der Fig. 2 ausgeführt. Nur zur Messung der Strahlungsverluste (vgl. Abschnitt III, 6) wurde der Eisenklotz E entfernt und dafür die in Fig. 2a dargestellte Anordnung so in das Gefäß M geschoben, daß die Platte K_2 in gleicher Höhe blieb wie in Fig. 2 und auf H_3 aufsaß.

H_3 ist ein kleiner Heizkörper, bestehend aus einer Konstantandrahtspirale, die in einem Messinggefäß in Öl liegt. Die Stromzuführungen Z_3 sind wieder abgebrochen gezeichnet. Das Messinggefäß (vom gleichen Durchmesser wie K_2) ruht auf einer Weißblechscheibe, die von drei Holzstäbchen getragen wird, welche selbst wiederum auf einer Weißblechscheibe stehen. Auf letzterer liegt bei den Strahlungsmessungen das Gefäß M auf. Zwischen den erwähnten Scheiben sind zwei weitere horizontale Weißblechscheiben als Strahlungsschützer angeordnet.

Als elektrische Stromquellen dienten Akkumulatorenbatterien, zur Messung der Heizenergie W Präzisionsamperemeter und -voltmeter von Siemens & Halske, die wiederholt nachgeprüft wurden.

Die Temperaturen wurden mit Thermoelementen bestimmt, die je aus einem 130 cm langen und 0,2 mm dicken Eisendraht und zwei je 65 cm langen und 0,25 mm dicken Konstantandrähten bestanden, an deren freie Enden je 120 cm lange und 0,5 mm dicke Kupferdrähte angelötet waren (Nebenlötstellen). Ihr Widerstand bei Zimmertemperatur betrug je 17,9 Ohm. Bei den Messungen befanden sich die eine Lötstelle und die beiden Nebenlötstellen durch Glasröhrchen geschützt in schmelzendem Eis. Als Meßinstrument diente ein Millivoltmeter von Siemens & Halske für Spannungen bis 18 mV. Der Widerstand des Instrumentes betrug 81,8 Ohm bei 19°; ein Skalenteil Ausschlag bedeutete 0,1 mV, entsprechend etwa 0,43° bei unmittelbarem Anschluß an die Thermoelemente.

III. Die Wärmebilanz und die Bestimmung ihrer einzelnen Posten.

Von der im Heizkörper H_1 im Dauerzustand stündlich erzeugten Wärmemenge W strömt, wie erwähnt, der größte Teil U durch die Wasserlamelle[1]), ein Teil V aber auf anderen

1) In U ist ein vernachlässigbar kleiner Betrag für die Strahlung durch die Wasserschicht enthalten.

Wegen ab. Ich zerlege V in fünf einzelne Anteile V_1, V_2, V_3, V_4 und V_5 und erhalte so die Wärmebilanz

$$W = U + V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5$$

oder mit Benutzung von Gleichung (6)

$$W = \frac{F(t_1 - t_2)}{d}\lambda + V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 . \tag{7}$$

Dabei bedeutet

V_1 die Summe der kleinen Wärmemengen, welche vertikal nach unten abströmen durch die drei Glasplättchen zwischen K_1 und K_2, durch die Luft in dem ringförmigen Raum zwischen der Wasserlamelle L und der inneren Glaswand J des Vakuummantelgefäßes, durch die Zuleitungsdrähte Z_1 des Heizkörpers H_1 und durch die Drähte der oberhalb von L angeordneten Thermoelemente,

V_2 die zur Verdampfung von Wasser aus dem Rand der Lamelle L aufgewandte Energie,

V_3 die in der Höhe von L durch die Innenwand J des Vakuumgefäßes vertikal nach abwärts strömende Wärmemenge,

V_4 die durch Strahlung (und Leitung) quer zu den Wänden des Gefäßes M oberhalb von L nach außen abgeführte Wärme,

V_5 endlich die Summe der Wärmemengen, welche von H_1, K_1, L, K_2, R und dem oberhalb L liegenden Teil der Wand J aufgenommen worden sind, wenn diese am Ende eines Versuches eine etwas höhere Temperatur haben als am Anfang. Sind die Endtemperaturen niedriger, so ist V_5 negativ (Wärmeabgabe).

Wie nun die Posten der Wärmebilanz Gl. (7) im einzelnen bestimmt wurden, das soll in den folgenden Abschnitten dargestellt werden.

1. Die gesamte Heizwärme W.

W wurde in üblicher Weise aus Strom und Spannung erhalten. Die Energie, welche in den Zuleitungen Z_1, soweit diese *unterhalb* der Lamelle L verlaufen, erzeugt wird, wurde dabei entsprechend der Länge dieser Drahtstücke (2,77 Proz. der Gesamtdrahtlänge) in Abzug gebracht. W wurde bei fast allen Versuchen annähernd zu 15,9 kcal/h gewählt, nur bei zwei Versuchen zu 10,2.

2. Der Betrag $\frac{F(t_1 - t_2)}{d}$.

Die Beziehung

$$U = \frac{F(t_1 - t_2)}{d} \lambda$$

gilt natürlich nur unter der Voraussetzung, daß die Wasserlamelle die Kupferplatten unmittelbar berührt, daß also nicht etwa dünne Luftschichten den Wärmeübergang verschlechtern.

Es erwies sich als nötig, das Wasser auszukochen und noch etwas warm ganz langsam zwischen die Platten einzufüllen; sonst perlte Luft aus dem Wasser aus und setzte sich an den Platten fest, während bei richtigem Vorgehen vor und nach dem Versuch die Platten bei horizontaler Durchleuchtung der Wasserlamelle blank spiegelnd erschienen.

In dem Ausdruck für U ist $d = 0{,}002248$ m zu setzen (vgl. S. 550); die Veränderlichkeit von d in den Temperaturgrenzen der Versuche ist zu vernachlässigen.

Die Fläche der Wasserlamelle ist $F = F_K - F_G - F_L$, wobei F_K die Fläche einer Kupferplatte bedeutet, $F_G = 0{,}000027$qm die Summe der Querschnitte der 3 Glasplättchen zwischen den Platten und F_L der Querschnitt des schmalen Luftringes zwischen dem Rand der Kupferplatten und dem Meniskus der Wasserlamelle. F_L wurde folgendermaßen bestimmt: Zu Beginn und am Ende eines jeden Versuches wurde der Meniskus mittels einer Mikrometerschraube mit nadelfeiner Spitze an verschiedenen Stellen des Umfanges ausgemessen. Bei den Versuchen mit größerer Verdampfung wurde ferner unmittelbar nach dem Versuch soviel Wasser nachgefüllt, bis der Meniskus wieder genau gleich viel ausgebaucht oder eingebaucht war wie zu Beginn des Versuches. Aus der nachzufüllenden Wassermenge und d ließ sich berechnen, wie groß F_L in dem für die Berechnung von λ zugrundegelegten Zeitraum (vgl. Abschnitt 7, S. 567) im Mittel war. Dabei mußte natürlich jeweils die Änderung von F_L mit der Temperatur des Wassers berücksichtigt werden. Bei unseren Versuchen betrug F zwischen 0,0097 und 0,0106, im Mittel 0,0102 qm.

Der Temperaturabfall $(t_1 - t_2)$ in der Wasserschicht ergibt sich aus der Differenz der Angaben der in die Kupferplatten K_1 und K_2 eingeführten Thermoelemente. Von dieser Differenz

ist noch der Temperaturabfall in den Kupferplatten abzuziehen. Er beträgt etwa 1 Proz. von $(t_1 - t_2)$ und ist aus der Wärmeleitfähigkeit des Kupfers, der Fläche F und der annähernd bekannten Wärmemenge U aufs einfachste zu berechnen.

Da bei den Versuchen $(t_1 - t_2)$ etwa 5,6—6,8° (bei zwei Versuchen 4,4°) betrug, war eine sehr sorgfältige Prüfung der Thermoelemente erforderlich, damit die Temperaturdifferenz auf mindestens $^1/_2$ Proz. genau gemessen werden konnte. Sämtliche Elemente wurden zunächst am Kompensator und mit dem Zeigergalvanometer geeicht.[1]) Die Mittelwerte der 4 Versuchspunkte bei 20, 40, 60 und 80° habe ich durch die Gleichung

$$\frac{t}{A} = 0{,}439 - 0{,}000077\,A \tag{8}$$

mit einer Genauigkeit von $^1/_2$ pro Mille dargestellt, wobei A den bei der Temperatur t am Instrument abgelesenen Wert bedeutet.

Da die einzelnen Thermoelemente etwas voneinander abwichen, das Material der Drähte also offenbar nicht ganz homogen war, wurde außerdem die zwischen den beiden zur Messung von $(t_1 - t_2)$ dienenden Thermoelementen bei gleicher Temperatur vorhandene Differenz besonders bestimmt, indem die bezüglichen Lötstellen *beider* Elemente zusammen in das Loch der oberen Kupferplatte des Versuchsapparates gesteckt und die Angaben A an 7 Punkten zwischen 0 und 83° verglichen wurden. Es ergab sich, daß die zwei Elemente fast völlig unabhängig von der Temperatur sich um 0,06 bis 0,04° im Mittel um 0,05° unterschieden. Die betreffende Korrektur wurde an den Ablesungen angebracht.

3. Die Summe V_1 verschiedener kleiner Wärmeverluste.

Die nach der auf S. 553 gegebenen Definition unter der Bezeichnung V_1 zusammengefaßten Wärmeverluste lassen sich aus den bekannten Werten des Wärmeleitvermögens für Glas, Luft, Konstanten und Eisen und aus dem vertikalen Temperaturgefälle in der Höhe der Lamelle L (in Fig. 2) mit ge-

1) Für die Ausführung dieser Messungen bin ich Herrn Geheimrat Scheel zu besonderem Dank verbunden.

nügender Genauigkeit berechnen. Diese Verlustwerte betragen im einzelnen höchstens einige Promille, zusammen nur 0,8 und 1,0 Proz. der Gesamtheizwärme W.

4. Die Verdampfungswärme V_2.

Heizt man den Apparat, ohne daß das Vakuummantelgefäß M übergestülpt ist, so findet infolge der kräftigen Konvektion am Rand der Flüssigkeitslamelle eine ziemlich schnelle Verdampfung statt. Es wäre dabei unmöglich, die Versuche, besonders die bei höheren Temperaturen, durchzuführen, da es nicht gelingen könnte, schnell genug einen Dauerzustand einzuregulieren. Durch den Mantel M wird die Verdampfung äußerst verringert. Die Luft zwischen den inneren Metallkörpern und dem Mantelgefäß ist schnell mit Wasserdampf gesättigt, und dann verdampft nur noch soviel, wie durch den schmalen Ring zwischen diesen Körpern und dem Mantel nach unten (also ohne Konvektion) diffundieren kann. Da die Luft unterhalb der Lamelle L um mehrere Grad kälter ist als die oberhalb von L, so fällt der diffundierende Wasserdampf unten aus und schlägt sich an den Metallflächen unterhalb L nieder. Würde die ganze dabei freiwerdende Kondensationswärme unmittelbar unterhalb L der Kupferplatte K_2 zugeführt und sich sofort über deren ganze Fläche F_K verteilen, so würde selbst bei der größten beobachteten Verdampfung der Temperaturabfall in K_2 bis zu der Stelle der Thermoelementbohrung noch nicht um $^1/_{1000}{}^0$ vergrößert. Selbst in diesem ungünstigsten Fall würde also das Resultat durch die Kondensationswärme nicht beeinflußt. Dagegen geht die Verdampfungswärme V_2, weil von H_1 geliefert und in der Gesamtwärme W inbegriffen, mit dem vollen Betrag in das Meßergebnis ein. Sie ist aus der bekannten Verdampfungswärme des Wassers und der Verdampfungsmenge ohne weiteres zu berechnen. Wie die letztere bei jedem Versuch festgestellt wurde, ist bereits auf S. 554 auseinandergesetzt. Sie nahm mit zunehmender Temperatur bis auf etwa 0,55 g/h bei $72^1/_2{}^0$ zu, in welchem Fall V_2 etwa 2 Proz. der gesamten zugeführten Wärme ausmacht, gegenüber $^1/_2$ Proz. bei 8^0.

5. Die Wärmeableitung V_1 längs der inneren Glaswand.

In der inneren Glaswand J des Vakuummantelgefäßes M wird die Temperatur von oben nach unten geringer. Es strömt daher in dieser Wand Wärme axial ab. In der Fig. 3 sind die Wand J und die ihr benachbarten Teile des Apparates ober- und unterhalb der Wasserlamelle L im Schnitt

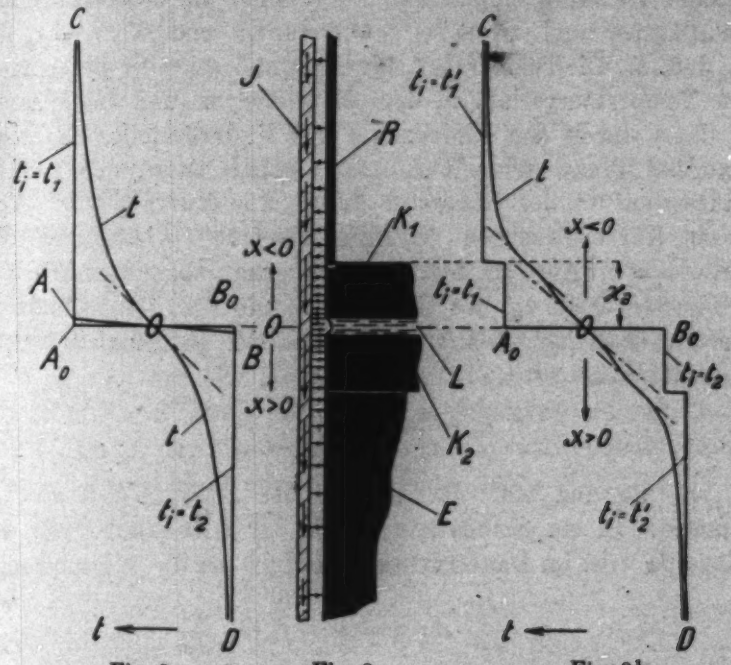


Fig. 3a. Fig. 3. Fig. 3b.

besonders dargestellt. Bei den folgenden Rechnungen wird zunächst von der Strahlung von Wärme durch den Ringraum zwischen R, K_1, L, K_2, E und der Wand J abgesehen, was man bei den niederen Temperaturen ohne weiteres darf.[1]) Dann findet im Dauerzustand eine Wärmeleitung durch den Luftring und die Glaswand etwa im Sinn der in Fig. 3 eingezeichneten Pfeile statt.[2]) Der Temperaturverlauf ist in den

1) Spätere Betrachtungen (vgl. S. 563, Fußnote 1) und Messungen (vgl. Abschnitt 8) zeigen, daß die Rechnungen auch bei den höheren Temperaturen genau genug sind.

2) Die axiale Wärmeableitung im Luftring ist dabei vernachlässigt. Sie ist gering und in V_1 so eingerechnet, als ob sie ohne Rückwirkung auf V_2 wäre.

daneben gezeichneten Diagrammen dargestellt, von welchen wir zunächst Fig. 3a betrachten wollen. In dieser Figur sind mit x bezeichnet die vertikalen Abstände der horizontal gegenüberliegenden Punkte der Fig. 3 von einer durch die Mitte der Wasserlamelle zu legenden Nullinie, oberhalb welcher $x < 0$, unterhalb welcher $x > 0$ sei. Die Temperaturen sind in horizontaler Richtung eingetragen. t_i bedeute die Temperatur der Metallkörper und zwar sei $t_i = t_1$ für R und K_1, $t_i = t_2$ für K_2 und E. Die Temperatur der Glaswand sei mit t bezeichnet. Der Temperaturverlauf in dem Metallkörper (und im Wasser) ist dann durch den Linienzug $CABD$ dargestellt, den man genügend genau durch CA_0B_0D ersetzen kann, der Temperaturverlauf in der Glaswand durch eine Kurve COD. Von dieser Kurve brauchen wir die Tangente $(dt/dx)_0$ an der Stelle $x = 0$. Aus ihr, dem genügend genau bekannten Wärmeleitungsvermögen λ_G der Glassorte, sowie dem Querschnitt f_G der Glaswand (vgl. S. 551) erhält man den gesuchten Wert V_3 nach der Formel[1])

$$V_3 = -\lambda_G \cdot f_G \cdot \left(\frac{dt}{dx}\right)_0. \tag{9}$$

Es ist nun also der Verlauf der Kurve COD zu bestimmen: In ein elementares Stück der Glaswand J von der Länge dx tritt im Dauerzustand stündlich *ein* die Wärmemenge

$$\lambda_L \cdot \frac{f_L}{s_L^2} \cdot dx\,(t_i - t) - f_G \cdot \lambda_G \frac{dt}{dx}.$$

Aus dem gleichen Element tritt stündlich *aus* die Wärmemenge

$$-f_G \lambda_G \left(\frac{dt}{dx} + \frac{d^2t}{dx^2}\,dx\right).$$

Hierin bedeutet f_L den Querschnitt, s_L die Weite des Luftringes, λ_L die Wärmeleitfähigkeit der Luft. Da die beiden Wärmemengen gleich sein müssen, erhalten wir als Differentialgleichung des Temperaturverlaufes längs der Glaswand

1) Es ist hierbei angenommen, daß die Temperatur im Glasquerschnitt überall gleich wäre, was genügend genau zutrifft. Die Wärmeableitung durch den nur 0,15 μ starken Silberbelag (vgl. S. 551) ist vernachlässigbar.

$$\frac{d^2t}{dx^2} = ct + b = c(t - t_i) \tag{10}$$

mit

$$c = \frac{f_L \cdot \lambda_L}{L^2 \cdot f_G \cdot \lambda_G} \quad \text{und} \quad b = -ct_i \tag{10a}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (10)

$$x = \int \frac{dt}{\sqrt{a + 2\int (ct + b)\,dt}} + C$$

mit den Konstanten a und C ergibt, da $c > 0$, durch Integration

$$x = \frac{1}{\pm\sqrt{c}} \ln \pm \left[b + ct \pm \sqrt{c}\sqrt{a + 2bt + ct^2}\right] + C\,. \tag{11}$$

Hieraus folgt durch Differentiation

$$\frac{dt}{dx} = \pm\sqrt{a + 2bt + ct^2} = \pm\sqrt{a + ct(t - 2t_i)}\,. \tag{12}$$

Das Vorzeichen + scheidet aus, wie leicht einzusehen ist.

Es sind nun die Konstanten a und C zu bestimmen.

Für $x < 0$ (Ast I der Kurve) seien sie mit a_I und C_I, für $x > 0$ (Ast II der Kurve) seien sie mit a_II und C_II bezeichnet.[1]) Für $x = \pm\infty$ muß gelten $t = t_i$ und $dt/dx = 0$.

Aus (12) folgt hiernach

$$\left\{ \begin{array}{l} a_\text{I} = ct_i^2 \\ \text{und} \\ a_\text{II} = ct_i^2\,. \end{array} \right. \tag{13}$$

Für $x = 0$ muß gelten

$$t_\text{I} = t_\text{II} = t_0 \text{ und } (dt/dx)_\text{I} = (dt/dx)_\text{II} = (dt/dx)_0\,.$$

Aus (12) folgt somit

$$t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}, \tag{14}$$

was man auch aus Symmetriegründen vermuten konnte. (Vgl. die zu- und abnehmende Größe der Pfeile in der Glaswand J in Fig. 3.)

Aus (11) und (13) erhält man nun

$$x = \frac{1}{\pm\sqrt{c}} \ln \pm 2c(t - t_i) + C, \tag{15}$$

---

1) Analog bedeutet t_I die Temperatur t für den Ast I usf.

aus (14) und (15)

$$(16)\qquad \begin{cases} C_{\mathrm{I}} = \dfrac{1}{\mp\sqrt{c}} \ln \pm c(t_2 - t_1) \\ \text{und} \\ C_{\mathrm{II}} = \dfrac{1}{\mp\sqrt{c}} \ln \pm c(t_1 - t_2), \end{cases}$$

aus (15) und (16)

$$(17)\qquad \begin{cases} x_{\mathrm{I}} = \dfrac{1}{\sqrt{c}} \ln 2\,\dfrac{t - t_1}{t_2 - t_1} \\ \text{und} \\ x_{\mathrm{II}} = \dfrac{1}{-\sqrt{c}} \ln 2\,\dfrac{t - t_2}{t_1 - t_2}. \end{cases}$$

(Da $\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \leqq \frac{1}{2}$ und $\frac{t - t_2}{t_1 - t_2} \leqq \frac{1}{2}$ sind nur die Vorzeichen der Gl. (17) mit der Fig. 3a in Übereinstimmung.) Durch Gl. (17) ist der Verlauf von t dargestellt durch je einen Ast zweier logarithmischer Kurven, die bei $x = 0$ eine gemeinsame Tangente haben. Es folgt nun endlich aus Gl. (17) oder aus (12) und (13)

$$(18)\qquad \begin{cases} (dt/dx)_{\mathrm{I}} = \sqrt{c}(t - t_1) \\ \text{und} \\ (dt/dx)_{\mathrm{II}} = -\sqrt{c}(t - t_2) \end{cases}$$

und mit (14) der gesuchte Wert für $x = 0$ in der einfachen Form

$$(19)\qquad (dt/dx)_0 = \sqrt{c}\,\frac{t_2 - t_1}{2}.$$

Die obige Rechnung setzt voraus, daß der zylindrische Luftringraum zwischen den Metallkörpern und der Glaswand sich nach oben und unten in gleicher Weite s_L ins Unendliche erstreckt. Aus der maßstäblich gezeichneten Fig. 3a ist aber ersichtlich, daß schon eine Erstreckung von je 5 cm nach oben und unten praktisch genügt. Aus diesem Grund wurde der Messingring R etwa 5 cm hoch gewählt und der Eisenklotz E etwa 5 cm tief in das Vakuummantelgefäß eingelassen.

Bei unseren Rechnungen war ferner bisher vorausgesetzt, daß zwischen den Metallkörpern R und K_1 und zwischen K_2 und E ein vollkommener Temperaturausgleich stattfinde. In

Wirklichkeit wurde zwischen R und K_1 und zwischen K_2 und E ein Temperatursprung festgestellt, der je nach dem mehr oder minder gelungenen Zusammenbau verschieden groß war und im allgemeinen weniger als 1°, in manchen Fällen aber auch über 1° betrug.[1]) Da nun die gesamte Temperaturdifferenz $(t_1 - t_2)$ im Durchschnitt weniger als 6° betrug, so war noch zu untersuchen, welchen Einfluß dieser Temperatursprung auf das Ergebnis haben konnte.

Der Temperaturverlauf ist in Fig. 3b dargestellt. Entsprechend den vier Temperaturstufen[2]) t_1', t_1, t_2 und t_2' (Temperaturverlauf $C A_0 O B_0 D$ in den Metallkörpern) hat die Kurve $C O D$ des Temperaturverlaufes t in der Glaswand 4 Äste I', I, II und II', die je in einem Wendepunkt (verursacht durch den Temperatursprung von t_i) ineinander übergehen.

Glücklicherweise ist auch die Berechnung dieser Kurve leicht möglich. Die Differentialgleichung (10), ihre Lösung (11) und somit auch Gl. (12) bleiben unverändert. Nehmen wir Symmetrie gegenüber der Stelle $x = 0$ an, also $t_1' - t_1 = t_2 - t_2'$ (was in Wirklichkeit nicht völlig, aber genügend genau stimmt), so können wir uns auf die Betrachtung der Kurvenäste I' und I beschränken. An deren Übergangsstelle $x = x_a$ herrsche die Temperatur $t = t_a$ in der Glaswand. Da für $x = -\infty$ auch hier $dt/dx = 0$ sein muß, folgt aus Gl. (12)

$$a_1' = c t_1'^2. \tag{20}$$

Aus (11) und (20) erhält man weiter, wenn man C_1' durch Einsetzen von x_a und t_a eliminiert, nach einer Diskussion der Vorzeichen

$$x_1' = x_a + \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \frac{t - t_1'}{t_a - t_1} \tag{21}$$

und hieraus die der Gl. (18) analoge Gleichung

$$(dt/dx)_1' = \sqrt{c}\,(t - t_1') \tag{22}$$

---

1) Der Deckel des Heizkörpers H_1 (vgl. Fig. 2) war, wie besondere Messungen ergaben, um mehrere Grad wärmer als der Ring R. Der Strahlungsschutz, den dieser bietet, ist also durchaus nötig.

2) In R ist ein Temperaturgefälle von oben nach unten gemessen worden. Es geht also ein Teil der Wärmemenge W durch R auf K_1 über. Für die vorliegenden Rechnungen kann die Temperatur von R überall gleich angenommen werden.

und für die Stelle $x = x_a$

$$(dt/dx)_a = \sqrt{c}\,(t_a - t_1'). \tag{23}$$

Da der Kurvenast I an der Stelle $x = x_a$ die gleiche Tangente haben muß, so folgt nun aus (10a), (12) und (23)

$$a_1 = c[t_1'^2 - 2t_a(t_1' - t_1)] \tag{24}$$

und aus (12) und (24) für $x = 0$ mit $t = t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}$

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_0 = -\sqrt{c}\,\sqrt{(t_1' - t_a)^2 - (t_1 - t_a)^2 + (t_1 - t_0)^2}. \tag{25}$$

In dieser Gleichung ist nur t_a noch unbekannt. Nun gewinnt man, indem man aus der Gl. (11) durch Einsetzen von x_a und t_a die Konstante C_1 eliminiert, die Formel

$$x = x_a + \frac{1}{\pm\sqrt{c}} \ln \frac{b_1 + ct \pm \sqrt{c}\,\sqrt{a_1 + 2b_1 t + ct^2}}{b_1 + ct_a \pm \sqrt{c}\,\sqrt{a_1 + 2b_1 t_a + ct_a^2}} \tag{26}$$

und hieraus mit der Benutzung von Gl. (10a) und (24) nach kurzer Umrechnung und Einsetzen des Wertes $t = t_0$ für $x = 0$.

$$x_a = \frac{1}{-\sqrt{c}} \ln \frac{t_0 - t_1 - \sqrt{(t_1' - t_a)^2 - (t_1 - t_a)^2 + (t_1 - t_0)^2}}{(t_a - t_1) - (t_1' - t_a)}. \tag{27}$$

Diese Gleichung muß für $t_1 = t_1'$ nach Gl. (17) den Wert

$$x_a = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln 2\,\frac{t - t_1}{t_2 - t_1}$$

ergeben. Dies ist der Fall, da die Gl. (17) widersprechenden Vorzeichen der Gl. (26) ausgeschlossen wurden. Gl. (27) ist eine quadratische Gleichung, als deren Wurzel man t_a in elementarer Weise berechnen kann. Durch Einsetzen des gefundenen Wertes in Gl. (25) erhält man $(dt/dx)_0$ und damit nach Gl. (9) den gesuchten Wert V_s.

Es soll nun an einem Beispiel dargelegt werden, wie das Ergebnis beeinflußt wird, je nachdem man $(dt/dx)_0$ nach Gl. (19) oder Gl. (25) berechnet. Bei Versuch Nr. 4 der Tabelle 3 (S. 570) war[1]) $t_1' = 17{,}3°$, $t_1 = 16{,}1$, $t_2 = 9{,}3$, $t_2' = 8{,}1$ und

1) Die Temperaturen sind auf Zehntel Grade abgerundet, und t_1' und t_2' sind um ein weiteres Zehntel sinngemäß so korrigiert, daß Symmetrie gegen $x = 0$ besteht.

$c = 5310\,[\mathrm{m}^{-2}]$. Nach Gl. (19) erhielt man

$$(dt/dx)_0 = \sqrt{c}\,\frac{t_2 - t_1}{2} = -248$$

oder

$$(dt/dx)_0 = \sqrt{c}\,\frac{t_2' - t_1'}{2} = -335 \text{ und nach Gl. (17)}$$

$t_a = 14{,}6$ oder $= 15{,}25$, je nachdem man t_1 und t_2 oder t_1' und t_2' als maßgebend für die Berechnung ansehen wollte. Der wirkliche Wert $(dt/dx)_0$ muß zwischen -248 und -335 liegen. Nehmen wir an, er liege genau in der Mitte, es sei also $(dt/dx)_0 = -291{,}5$, so könnte $(dt/dx)_0$ in Wirklichkeit höchstens um 15 Proz. größer oder kleiner sein. Da nun V_3 nur 0,8 bis 1 Proz. der Gesamtheizwärme W ausmacht, so kann der mögliche Fehler nur 2 Promille von W betragen. Da t_a zwischen 14,6 und 15,25 liegen muß, so läßt sich der richtige Wert leicht durch Probieren (statt durch Rechnen) aus Gl. (27) ermitteln. Man findet $t_a = 15{,}07$ und $(dt/dx)_0 = -286$, macht also bei der Annahme des Mittelwertes $-291{,}5$ sogar nur einen Fehler von 0,2 Promille (bezogen auf W). Statt mit der exakten Gl. (27) ist daher bei allen Versuchen mit dem Mittelwert

$$(28) \qquad (dt/dx)_0 = \sqrt{c}\,\frac{(t_2 - t_1) + (t_2' - t_1')}{4}$$

gerechnet worden. Indem man diesen Wert in Gl. (9) einsetzt, erhält man

$$(29) \qquad V_3 = \sqrt{c}\,\frac{(t_1 - t_2) + (t_1' - t_2')}{4}\,\lambda_G\, f_G$$

und mit Benutzung von Gl. (10a)

$$(30) \qquad V_3 = \frac{(t_1 - t_2) + (t_1' - t_2')}{4}\,\frac{1}{s_L}\,\sqrt{f_L \lambda_L f_G \lambda_G}\,.$$ [1])

1) All diese Ableitungen gelten ganz streng nur, wenn nicht gleichzeitig Strahlung durch den ringförmigen Luftraum und den Vakuummantel stattfindet, also bei nicht allzu weit von der Außentemperatur abweichender Temperatur des Wassers. Bei höheren Temperaturen spielt die im folgenden Abschnitt behandelte Strahlung eine Rolle. Ihr Einfluß auf die axiale Temperaturverteilung in der Glaswand J ist im wesentlichen so, als ob die t-Kurve der Fig. 3a und 3b parallel zur t-Richtung nach rechts verschoben wäre, wobei V_3 also unverändert

Nach dieser Gleichung ist der Wärmeverlust V_3 bei den einzelnen Versuchen berechnet und, wie erwähnt, gleich 0,8 bis 1 Proz. der Gesamtheizwärme W gefunden worden.

6. Der Strahlungsverlust V_4.

Trotz der Verwendung eines guten Vakuummantelgefäßes M mit versilberten Wänden war der Wärmeverlust durch Strahlung quer zu den Wänden bei der höchsten Versuchstemperatur von $72^1/_2{}^\circ$ größer als sämtliche anderen Verluste zusammen. Dieser Verlust konnte aber durch besondere Versuche genau bestimmt werden. Dabei befand sich zwischen den Kupferplatten K_1 und K_2 (Fig. 2) kein Wasser, sondern Luft, und es war der in Fig. 2a dargestellte Heizkörper H_3 statt des Eisenklotzes E unter K_2 geschoben, wie auf S. 552 beschrieben ist. Es wurde nun durch gleichzeitige Heizung mit H_1 und H_3 bei verschiedenen Temperaturen t_1 ein Dauerzustand von der Art hergestellt, daß t_2 höchstens um etwa 0,1 oder 0,2° niedriger war als t_1. Dann ging nur ein ganz geringer Anteil U der Wärmemenge W von oben nach unten durch die Luftschicht zwischen den Platten (während U bei den Hauptversuchen 90 bis 98 Proz. von W betrug) und ebenso war V_1 und V_3 ganz gering, weil auch in dem Luftring und in der Glaswand in der Höhe von L fast kein Temperaturabfall in der x-Richtung stattfand. V_2 entfiel überhaupt, da kein Wasser verwendet wurde, und V_5 ließ sich ebenfalls ganz klein halten, weil nicht aus Rücksicht auf die Verdampfung die Einregulierung der Temperaturen sehr schnell erfolgen mußte, sondern ein fast vollkommener Dauerzustand abgewartet werden konnte (vgl. hierüber S. 567). Fast die ganze in H_1 erzeugte Wärmemenge W wurde also durch Strahlung nach außen abgegeben. Dies ist aus den Wärmebilanzen ersichtlich, die durch Versuche bei der Außentemperatur $t_{II} = 14{,}5$ und drei verschiedenen Innentemperaturen t_1 (an K_1 und R gemessen)[1]) erhalten wurden (vgl. Tabelle 1). In U ist ein

---

bliebe. Zur Kontrolle der Richtigkeit der Einzelverlustmessungen ist übrigens bei der höchsten Versuchstemperatur auch eine Gesamtverlustmessung vorgenommen worden (vgl. Abschnitt 8).

1) Deren Temperaturen unterscheiden sich dabei nicht wesentlich.

Betrag von 0,001 kcal/h für die Strahlung durch die Luftschicht zwischen K_1 und K_2 enthalten.

Tabelle 1.

Wärmebilanz bei den Strahlungsmessungen.

t_1	$W - (U + V_1 + V_2 + V_3) = V_4$	V_4 nach Gl. (31)
34,3°	0,235 − (0,019 + 0,002 + 0,003 + 0,000) = 0.211	0,222
55,3°	0,515 − (0,031 + 0,003 + 0,005 + 0,002) = 0,474	0,499
76,2°	0,896 − (0,033 + 0,003 + 0,005 + 0,000) = 0,855	0,832

Die gemessenen Werte des Strahlungsverlustes lassen sich genügend genau ausdrücken durch die empirische Gleichung

$$V_4 = 0{,}0104 \cdot \left[\left(\frac{T_I}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_{II}}{100}\right)^4\right] \tag{31}$$

(vgl. letzte Spalte der Tab. 1). Durch Einsetzen der jeweils gemessenen Innen- und Außentemperaturen T_I und T_{II} in diese Formel ergab sich hiernach bei unseren Hauptversuchen (vgl. Tab. 2, S. 569) ein mit der Temperatur von 0,2 bis 5,3 Proz. der Gesamtwärme W ansteigender Strahlungsverlust V_4.

Aus Gleichung (31) läßt sich nebenbei das Reflexionsvermögen der versilberten Wände des Vakuummantelgefäßes mit guter Annäherung berechnen. Da dies für die Trennung der Wärmeverluste solcher Gefäße von Wichtigkeit ist, soll die Berechnung hier mitgeteilt werden. Die Gleichung (31) hat dieselbe Form wie die von Christiansen[1]) zuerst angegebene Gleichung

$$V_4 = \frac{F_1 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot C}{A_2 + F_1/F_2 \cdot A_1 (1 - A_2)} \left[\left(\frac{T_I}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_{II}}{100}\right)^4\right], \tag{32}$$

statt deren man noch allgemeiner

$$V_4 = \frac{F_1 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot C}{A_2 + F_1/F_2 \cdot A_1 (1 - A_2)} \left[\varphi(T_I) - \varphi(T_{II})\right] \tag{33}$$

schreiben kann. Dabei ist V_4 die Strahlungsenergie, die von einem inneren überall konvexen Körper von der Oberfläche F_1 und Temperatur T_I auf eine überall konkave Hülle von der Fläche F_2 und der Temperatur T_{II} übergeht, wenn A_1 und A_2 das Absorptionsvermögen von Körper und Hülle bedeuten. Christiansen macht darauf aufmerksam, daß Formel (32) streng nur gilt,

1) C. Christiansen, Wied. Ann. 19. S. 267. 1883.

wenn eine der Flächen F_1 und F_2 unregelmäßig geformt oder diffus reflektierend sei. Bei konzentrischen, nicht diffus reflektierenden Kugeln falle in Gleichung (32) der Faktor F_1/F_2 weg. (Das gleiche gilt für konzentrische unendlich lange Zylinder.) Gelten nun ferner für das Emissionsvermögen e des schwarzen Körpers, E_1 der Fläche F_1 und E_2 der Fläche F_2 gleichzeitig die Beziehungen

$$(34) \qquad \begin{cases} e = C \cdot \varphi(T) \\ E_1 = C_1 \cdot \varphi(T) \\ E_2 = C_2 \cdot \varphi(T) \end{cases},$$

so folgt aus Gleichung (33)

$$(35) \qquad V_4 = \frac{F_1}{1/C_1 + F_1/F_2\,(1/C_2 - 1/C)}\,[\varphi(T_I) - \varphi(T_{II})].$$

Hieraus[1]) und aus Gleichung (31) erhält man[2]) nun mit $\frac{F_1}{1/C_1 + F_1/F_2\,(1/C_1 - 1/C)} = 0{,}0104$, $F_1 = 0{,}0764\,\text{qm}$, $F_2 = 0{,}0887\,\text{qm}$, sowie $C = 4{,}9$ die Werte $C_1 = C_2 = 0{,}2476$ und $A_1 = \frac{C_1}{C} = 0{,}0505 = A_2$, bei Weglassung des Faktors F_1/F_2 aber $C_1 = C_2 = 0{,}265$ und $A_1 = A_2 = 0{,}0541$. Da unsere Flächen F_1 und F_2 sich je aus den Zylinderflächen oberhalb L (vgl. Fig. 2) und den angeblasenen Halbkugeln zusammensetzen, dürfte das Absorptionsvermögen der Silberbelege gleich dem Mittel aus beiden Werten, also $A_1 = 0{,}052$ sein, das Reflexionsvermögen somit $R_1 = 0{,}95$. Dieser Wert kann, solange nicht weitere Messungen vorliegen, für die Trennung der Wärmeverluste von Vakuummantelgefäßen benutzt werden.

---

1) Der in V_4 enthaltene Anteil für Wärmeleitung ist bei dem hohen Vakuum guter Vakuummantelgefäße gegenüber dem Strahlungsanteil zu vernachlässigen.

2) Für Metallflächen gilt zwar die Beziehung (34) nicht in aller Strenge; denn wie E. Aschkinass (Ann. d. Phys. 17. S. 960. 1905), gestützt auf die bekannten Messungen von Hagen und Rubens ausführt, verhält sich die Gesamtstrahlung einer Metallfläche zu der einer gleich großen schwarzen Fläche wie $c\sqrt{T}$ (mit $c = 0{,}00037$ für Silber). Die Tatsache aber, daß die empirische Beziehung (31) die gleiche Funktion φ enthält wie das Stefan-Boltzmannsche Gesetz, zeigt, daß soweit im Ultraroten, wie bei uns das Strahlungsmaximum liegt, Gl. (34) jedenfalls genau genug ist.

7. Die Wärmeaufspeicherung V_5.

Während die Wärmeverluste V_1 bis V_4 nur durch die Versuchsanordnung bedingt sind, hängt die Größe von V_5 wesentlich von der Geschicklichkeit des Experimentators ab. Zwar nimmt bei konstant gehaltener Temperatur t_2 infolge der Verdampfung von Wasser aus der Lamelle bei unveränderter Heizung W die Temperatur t_1 kontinuierlich zu, aber diese Änderung würde selbst bei der größten gemessenen Verdampfung nur eine Korrektur[1]) $V_5 = 0{,}07$, d. i. etwa 0,4 Proz. von W ergeben. Ehe aber ein Zustand der Wärmeströmung erreicht wäre, bei dem nur t_1 in der oben erwähnten Weise[1]) anstiege, wäre bereits soviel Wasser aus der Lamelle verdampft, daß andere Grundlagen des Versuchs gestört und seine Ausführung damit gescheitert wäre. Es handelte sich also darum, durch Regulieren von H_1 und H_2 möglichst schnell einen nur annäherungsweise vollkommenen Dauerzustand zu erreichen und die kleinen Temperaturänderungen der einzelnen Teile dann in Rechnung zu setzen. Es gelang schließlich, die gesamte Versuchsdauer vom Einfüllen des Wassers bis zum Nachmessen der verdampften Wassermenge nach Abschluß der Beobachtungen auf $3^1/_2$—10, im Mittel auf 5 Stunden zu verringern. Es wurde dann ein am Ende dieser Zeit liegender Abschnitt (von 30—180, im Mittel 68 Minuten) als Zeit des Dauerzustandes den Berechnungen zugrundegelegt, zu dessen Anfang und Ende die Temperatur der einzelnen Teile H_1, R, K_1, L, K_2 und J (oberhalb L genommen) möglichst genau, die von E völlig genau gleich war. Aus den Temperaturänderungen der eben genannten Teile und ihrer leicht zu berechnenden Wärmekapazität erhält man dann die Wärmeaufspeicherung V_5 (im Fall von Temperaturabnahme einen negativen Betrag, also eine Wärmeabgabe der Apparatur). V_5 schwankte zwischen $-0{,}9$ und $+2{,}3$ Proz. und betrug im Mittel (vom Vorzeichen abgesehen) 0,8 Proz. von W. Der oben erwähnte Idealbetrag von höchstens 0,4 Proz. ist also wesentlich überschritten worden. Bei weiterer Übung im Einregulieren des Dauerzustandes des

1) Es ist dabei angenommen, daß die Temperatur von H_1, R und dem oberhalb L liegenden Teil von J um den gleichen Betrag zunehmen wie t_1.

Apparates dürfte man zu geringeren Korrekturwerten V_5 gelangen.

8. Messung des Gesamtverlustes V.

Da die Summe der Einzelverluste $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 = V$, die bei 8° nur etwa $2^1/_2$ Proz. der Gesamtheizung ausmacht, bei 72° bereits 10 Proz. von W betrug, schien es wünschenswert, wenigstens bei der Höchsttemperatur eine Kontrollmessung der Gesamtverluste vorzunehmen. Dies war mit großer Genauigkeit möglich, wenn in der Anordnung der Fig. 2 Luft statt Wasser sich zwischen den Kupferplatten befand und genau die gleichen Temperaturen t_1 und t_2 einreguliert wurden wie bei dem entsprechenden Versuch mit Wasser. Da auch hierbei keine Wasserverdampfung in Frage kam ($V_3 = 0$ wie bei den Strahlungsmessungen), so ließ sich der Dauerzustand genau einstellen und V_5 gering halten. Es ergab sich folgende Wärmebilanz:

$$W - U = V$$
$$1{,}696 - 0{,}676 = 1{,}020.$$

Dabei ist zur Berechnung von U die Wärmeleitfähigkeit der Luft $\lambda_L = 0{,}0246$ (bei 72,5°) angenommen und in U ein Betrag 0,045 kcal/h für den Strahlungsaustausch zwischen der oberen und unteren Kupferplatte enthalten, berechnet nach den Angaben von Wamsler.[1]) In V ist enthalten ein Betrag $V_4 = 0{,}816$ und $V_5 = -0{,}029$. Es war somit $V_1 + V_2 = V - V_4 - V_5 = 0{,}233$, während bei den Versuchen Nr. 11 und 12 (der Tabelle 2, S. 569) $V_1 + V_2 = 0{,}292$ gefunden wurde. Die Gesamtverlustmessung hat somit einen um 0,06 kcal/h kleineren Wert ergeben als die Einzelverlustmessung bei den Versuchen 11 und 12. Diese Differenz von weniger als 0,4 Proz. der Gesamtheizwärme könnte dadurch beseitigt werden, daß man die Innentemperatur t_1 bei den Hauptversuchen etwas größer annähme als bei den Strahlungs- und Gesamtverlustmessungen, da bei der gleichen Temperatur t_1 der oberen Kupferplatte H_1 und R bei ersteren Versuchen etwas wärmer waren als bei letzteren. Doch soll hiervon (trotz vorhandener Versuchsunterlagen) abgesehen werden, da Fehler von einigen

1) F. Wamsler, Mitt. über Forschungsarb. auf d. Gebiete des Ingenieurwesens Heft 98 u. 99. S. 1..1911.

Promille bei unseren Messungen nicht zu vermeiden waren und durch diese Korrektur der Anschein größerer Genauigkeit mit Unrecht erweckt würde.

IV. Versuchsergebnisse.

Die Durchführung der Hauptversuche bedarf nun keiner Beschreibung mehr, da alle Einzelheiten in den früheren Abschnitten genau geschildert sind.

Die wichtigsten Einzelergebnisse der Versuche sind in der Tabelle 2 zusammengestellt. t bezeichnet darin die mittlere

Tabelle 2.

Einzelergebnisse der Versuche.

Vers.-Nr.	t	W	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	$V=\sum_1^5 V_i$	$U=W-V$	t_1-t_2	$\frac{F(t_1-t_2)}{d}$	λ
1	7,4°	10,19	0,083	0,070	0,096	0,024	0,000	0,27	9,92	4,38°	20,47	0,4846
2	8,3	10,21	0,079	0,035	0,096	0,041	−0,020	0,23	9,98	4,36	20,56	0,4854
3	12,6	15,89	0,136	0,093	0,155	0,104	−0,059	0,43	15,46	6,70	31,04	0,4981
4	12,7	16,07	0,139	0,100	0,155	0,105	−0,055	0,44	15,63	6,82	31,48	0,4965
5	26,5	15,93	0,148	0,137	0,156	0,192	−0,145	0,49	15,44	6,61	30,01	0,5145
6	27,3	15,85	0,133	0,066	0,161	0,191	−0,143	0,41	15,44	6,47	29,90	0,5164
7	38,4	15,92	0,148	0,162	0,149	0,325	−0,109	0,67$_5$	15,24$_5$	6,36	28,69	0,5314
8	44,4	15,87	0,140	0,197	0,143	0,400	−0,056	0,82	15,05	6,04	27,70	0,5433
9	52,1	15,85	0,132	0,173	0,133	0,514	0,279	1,23	14,62	5,80	26,49	0,5519
10	62,9	15,90	0,150	0,261	0,132	0,678	0,365	1,59	14,31	5,73	25,37	0,5641
11	72,2	15,87	0,160	0,323	0,136	0,819	0,046	1,48	14,39	5,76	24,98	0,5761
12	72,6	15.85	0,157	0,297	0,132	0,839	0,147	1,57	14,28	5,60	24,47	0,5836

Temperatur der Wasserlamelle. Die Bedeutung der folgenden Spalten ist auf S. 552 und 553 erklärt; die Werte W bis U_4 sind dabei in kcal/h, F ist in qm, d in m ausgedrückt. Die letzte Spalte enthält die aus den Messungen nach Gl. (6) oder (7) sich ergebenden Werte der Wärmeleitfähigkeit λ des Wassers in kcal. m^{-1} $Stde^{-1}$ $Grad^{-1}$.

D. Schlußfolgerungen.

Unsere Versuchsergebnisse lassen sich darstellen durch die lineare Gleichung:

$$\lambda = 0{,}4769\,(1 + 0{,}002984\,t) \tag{36}$$

oder in *cgs*-Einheiten [cal. cm^{-1} Sek^{-1} $Grad^{-1}$] durch die Gleichung

$$\lambda = 0{,}001325\,(1 + 0{,}002984\,t)\,. \tag{37}$$

Die nach diesen Gleichungen *berechneten* Werte $\lambda_{ber.}$ sind mit den aus Tabelle 2 zu entnehmenden *gemessenen* Werten $\lambda_{gem.}$ in Tabelle 3 zusammengestellt. Die Abweichung Δ der 4. De-

Tabelle 3.

Vergleich der gemessenen und berechneten Werte von λ.

Vers.-Nr.	Temp. t	Werte in technischem Maß			Werte in *cgs*-Einheiten		
		λ gem.	λ ber.	Δ	λ gem.	λ ber.	δ
1	7,4°	0,4846	0,4874	−28	0,001346	0,001354	− 8
2	8,3	0.4854	0,4887	−33	1348	1358	−10
3	12,6	0,4981	0,4948	+33	1384	1374	+10
4	12,7	0,4965	0,4950	+15	1379	1375	+ 4
5	26,5	0,5145	0,5146	− 1	1429	1429	0
6	27,8	0,5164	0,5157	+ 7	1434	1432	+ 2
7	38.4	0,5314	0,5315	− 1	1476	1476	0
8	44,4	0,5433	0,5401	+32	1509	1500	+ 9
9	52,1	0,5519	0,5510	+ 9	1533	1531	+ 2
10	62,9	0,5641	0,5664	−23	1567	1573	− 6
11	72,2	0,5761	0,5796	−35	1600	1610	−10
12	72,6	0,5836	0,5802	+34	1621	1612	+ 9

zimale (in technischem Maß), δ der 6. Dezimale (in *cgs*-Einheiten) zwischen $\lambda_{gem.}$ und $\lambda_{ber.}$ beträgt höchstens $\pm$ 0,7 Proz., im Mittel $\pm$ 0,4 Proz.

Die gemessenen Werte sind als Punkte in die Fig. 1 eingetragen, die der Gl. (36) entsprechende Gerade ist dort ebenfalls eingezeichnet. Die mehr oder minder große Annäherung der Versuchspunkte früherer Beobachter an diese Gerade, auch des H. F. Weberschen Punktes aus dem Jahr 1885, ist ziemlich zufällig. Nur dem Versuchspunkt von Milner und Chattock ist eine etwa gleichgroße absolute Genauigkeit zuzuschreiben wie unseren Versuchswerten; dieser Punkt liegt knapp 2 Proz. über unserer Geraden.

Die Wärmeleitfähigkeit des Wassers ist durch unsere Versuche zwischen 0 und 80° auf etwa 1 Proz. genau bestimmt, ihre Zunahme mit der Temperatur außer Zweifel. Diese Zunahme erfolgt im Versuchsbereich linear; der Temperaturkoeffizient beträgt etwa 3 Promille pro Grad. Versuche an anderen Flüssigkeiten und festen Körpern nach der gleichen Methode sind in Aussicht genommen.

(Eingegangen 22. Mai 1920.)

4. *Über die spektrale Polarisation des diffusen Sonnenlichts in der Erdatmosphäre*[1]*;* *von H. Dember und M. Uibe.*

II. Teil.

Zur Kenntnis der Haidingerschen Polarisationsbüschel im blauen Himmelslicht.

9. Bericht über die Ergebnisse der auf Teneriffa ausgeführten Arbeiten.

1. Die Länge der Haidingerschen Polarisationsbüschel in der Atmosphäre wird von den meisten Beobachtern zwischen 3 und 6° angegeben. Den Grund dieser verschiedenen Meßresultate vermutet Helmholtz in der verschiedenen Deutlichkeit, welche die Büschel in bestimmten Höhen über dem Horizont haben. Wenn deswegen die Büschel nicht alle in gleichen Höhen beobachtet werden, so resultieren verschiedene Winkelgrößen. Aber selbst wenn die Messungen alle in gleicher Höhe über dem Horizont ausgeführt würden, so wäre eine Übereinstimmung der Zahlen schon deshalb nicht zu erwarten, weil die Empfindlichkeit des Auges für die Erscheinung von Beobachter zu Beobachter variiert, wodurch die äußersten Ränder der Büschel für den einen noch weiter vom Kreuzungspunkte weg erkennbar sind als für einen anderen. Wie groß die Empfindlichkeitsunterschiede der Beobachter sind, geht am besten aus der Tatsache hervor, daß viele es niemals lernen, die Büschel in der Atmosphäre mit Sicherheit zu sehen, während sie für andere am klaren Dämmerungshimmel in jeder Sehrichtung störend erscheinen.

Mißt man mit einem geeigneten Instrument die Winkelausdehnung der Büschel in ihrer Längsachse, so findet man im allgemeinen am klaren, subtropischen Himmel in allen Höhen die gleichen Winkel. Nur bei sehr günstigem Wetter, wo die Büschel in der Nähe des Zenits ganz besonders gut

1) Aus den Leipziger Berichten 1920.

zu sehen sind, ergeben die Messungen im Zenit einen etwas höheren Wert als in Horizontnähe. Es ist dies die Folge der größeren Deutlichkeit der Erscheinung, bedingt durch die nach dem Zenit wachsende Polarisationsgröße des Himmelslichts. Außerdem treten in größeren Höhen über dem Horizont zugleich mit der relativen Intensitätszunahme der kurzwelligen Strahlen die blauen Büschel deutlicher hervor, wodurch es durch Kontrastwirkung dem Auge erleichtert wird, die äußeren Ränder der gelbbraunen Büschel in größerer Entfernung vom Büschelmittelpunkt wahrzunehmen, was ebenfalls veranlaßt, daß der Winkel größer gemessen wird.

Die folgende Tab. 1 zeigt eine derartige Messung. Reihe 1 und 3 gibt die Entfernung d zweier Drahtspitzen an in einer Entfernung von 20,8 cm vom optischen Augenmittelpunkt. α_{90} und α_{15} sind die mit den gemessenen d berechneten Winkel, unter denen die Büschel in 90° und ~ 15° Höhe über dem Horizont gesehen wurden.

Tabelle 1.

d	α_{90}	d	α_{15}	$\triangle\,\alpha$	Beobachter
1,85 cm	4° 52′	1,60 cm	4° 12′	40′	*D*
1,80	4° 44′	1,50	3° 56′	48′	*U*
1,80	4° 44′	1,56	4° 6′	38′	*D*
1,84	4° 50′	1,46	3° 50′	1°	*D*
1,70	4° 28′	1,38	3° 38′	50′	*U*

Man muß von dieser, durch ein Winkelmeßinstrument meßbaren, für einen bestimmten Beobachter geringen Größenvariation eine sehr viel stärkere streng unterscheiden, eine Variation, welche in der uns zur Verfügung stehenden Lehrbuchliteratur nicht aufgeführt ist und von der wir aus Mangel an Originalliteratur nicht sagen können, ob sie schon bekannt ist.

Betrachtet man nämlich an vollständig klaren Tagen kurz nach Sonnenuntergang oder vor Sonnenaufgang den Himmel, so erblickt das empfindliche und geübte Auge die Haidingerschen Polarisationsbüschel in jeder Sehrichtung, und zwar sieht man sie in der Nähe des Horizonts auffallig größer als

in der Nähe des Zenits.[1]) Das Größenverhältnis ist $> 2:1$ und die Erscheinung ist, wenn man sie einmal erkannt hat, täglich zu beobachten.

Wir haben versucht, diese subjektive Erscheinung messend zu verfolgen und eine physikalische Erklärung dafür zu geben. Hierüber soll im folgenden berichtet werden.

2. Da winkelmessende Instrumente zum Resultat führen, daß die Büschel im allgemeinen in allen Höhen die gleiche Größe haben oder daß sie im Zenit größer sind als in der Nähe des Horizonts, so bedienten wir uns beim Studium der scheinbaren Größenvariation, die umgekehrt verläuft, des gleichen Verfahrens wie bei der Untersuchung der Größenveränderung von Sonne und Mond in verschiedenen Höhen über dem Horizont.[2])

Wir bildeten die Form eines gelbbraunen Büschels in Papier nach und zwar so, daß die ganze Länge 80 cm, die größte Breite an den Enden 29,5 cm, die Mitte 10 cm betrug. Dieser Vergleichsbüschel war auf Gaze aufgezogen, die in einem Holzrahmen saß. Als Hintergrund diente ein großes schwarzes Tuch.

Mit dieser Büschelform verglichen wir die am Himmel sichtbaren Haidingerschen Büschel in der Weise, daß wir einen Abstand, z. B. 27,5 m, von dem Modell wählten und dann in den verschiedenen Höhen am Himmel so lange suchten, bis wir ein Polarisationsbüschel sahen, das dem Auge gerade so groß erschien, wie die aufgestellte Büschelform. Nachdem die Höhe des betreffenden Haidingerschen Büschels am Himmel mit dem Pendelquadranten gemessen worden war, wurde ein andrer Abstand vom Vergleichsbüschel gewählt und das Verfahren wiederholt.

Früheren Erfahrungen bei Größenschätzungen folgend, sind Entfernungen vom Vergleichsbüschel unter 15 m vermieden worden, außerdem wurde dieser nur kurze Augenblicke, wie sie zur Schätzung gerade hinreichten, betrachtet. Die ganze Versuchsweise ist einfach, doch ist strenge Objektivität des Beobachters und lange Übung im Sehen der Polarisationsbüschel zur Ausführung der Größenschätzungen notwendig.

1) Leipz. Ber. 69. S. 149. 1917, Anm.; Ann. d. Phys. 56. S. 208. 1918.
2) Leipziger Berichte 69. S. 485. 1917; Ann. d. Phys. 61. S. 353. 1920.

Die folgende Tab. 2 gibt die Schätzungen und Messungen wieder, die an zwei vollständig klaren Tagen ausgeführt worden sind.

Tabelle 2.

Zeit	Höhe φ_h	Entfernung L	Halbwert φ	Beobachter
15. Mai 1919	17,0°	15 m		*D*
6 Uhr 20 Min.	16,0	15		*U*
nachm.	90,0	30		*D*
	90,0	30		*U*
	35,5	22,5		*U*
	59,0	22,5		*D*
	63,5	27,5	31,5°	*U*
	65,0	27,5	30,6	*D*
15. Mai 1919	30,0	15		*D*
6 Uhr 35 Min.	29,0	15		*U*
nachm.	62,0	22,5		*U*
	55,0	22,5		*D*
	81,0	27,5	30,6	*D*
	73,0	27,5	34,0	*U*
16. Mai 1919	22,2	15		*D*
6 Uhr 20 Min.	52,0	20		*D*
nachm.	34,0	20		*U*
	61,0	25		*D*
	64,0	25		*U*
	90,0	30	30,0	*D*
	90,0	30	34,0	*U*
16. Mai 1919	67,0	30		*U*
6 Uhr 30 Min.	82,7	30		*D*
nachm.	43,5	20		*D*
	31,0	20		*U*
	55,5	27,5		*U*
	52,0	27,5		*D*
	23.3	15	30,0	*D*
	17,0	15	29,0	*U*
16. Mai 1919	18,5	15		*U*
6 Uhr 40 Min.	20,0	15		*D*
nachm.	90,0	30		*D*
	90,0	30		*U*
	40,0	20		*U*
	44,0	20		*D*
	59,0	25	31,0	*U*
	51,0	25	32,5	*D*

3. Nachdem durch diese Beobachtungen festgestellt war, daß die scheinbare Größenveränderung der Büschel immer zu beobachten ist, wenn die Büschel in allen Höhen am Himmel

deutlich zu sehen sind, haben wir nach einer Erklärung der Erscheinung gesucht, die so beschaffen ist, daß sie sich zahlenmäßig prüfen läßt.

Nach Helmholtz[1]) muß das ins Auge einfallende Licht, bevor die Stäbchen und Zäpfchen des gelben Flecks der Retina erreicht, eine gelbliche, faserige Schicht durchlaufen, die von der Zentralgrube ausstrahlt und deren Dicke nach außen abnimmt. Diese Schicht ist doppelbrechend. Das den Fasern der Schicht parallel polarisierte, blaue Licht (der außerordentliche Strahl) erleidet eine Absorption und zwar wird angenommen, daß die Absorption stärker als beim ordentlichen Strahl ist. Wird weiter berücksichtigt, daß am Rande der Netzhautgrube die Fasern eine schräg gegen den Mittelpunkt verlaufende Richtung haben, so folgt z. B. bei vertikal stehender Polarisationsebene, daß sich über und unter der Netzhautgrube dunklere Stellen bilden, rechts und links hellere, so wie man die Haidingerschen Büschel beobachtet. Man hat es hiernach mit einer rein entoptischen Erscheinung zu tun.

Zum Verständnis der scheinbaren Größenveränderung der Büschel führe man das folgende Gedankenexperiment aus. Man denke sich unmittelbar vor die Stäbchen und Zäpfchen der Retina eine sehr kleine undurchsichtige Scheibe gebracht. Diese bedeckt einen Teil des räumlichen Gesichtsfeldes und zwar schneidet sie, wenn z. B. eine weit entfernte, helle Wand betrachtet wird, einen bestimmten Teil der Wand heraus. Der Teil ist dadurch bestimmt, daß die Größe seines Bildes auf der Netzhaut, wie es von der Optik des Auges entworfen wird, gleich der Größe des gedachten Scheibchens ist. Je weiter unter sonst gleichen Umständen die Wand entfernt ist, desto größer ist der vom Scheibchen herausgeblendete Teil der Wand. Ist nun der Raum zwischen dem Auge und der hellen Wand von einem feinen leuchtenden Nebel (z. B. die Luft am Tage) erfüllt, so trifft von dem Teile des räumlichen Gesichtsfeldes, eines Kegels, dessen Basis der vom Scheibchen herausgeschnittene Teil der Wand ist und dessen Spitze im Auge liegt, kein Licht auf die Retina. Das Auge nimmt das Scheibchen wahr, die Wahrnehmung wird aber hervorgerufen durch das Licht,

1) Physiologische Optik.

welches von der leuchtenden Begrenzung des Kegels ausgeht. Der Winkel, unter dem die Begrenzung der Kegelbasis im Raum erscheint, ist unabhängig von der Entfernung Auge bis Wand. Dagegen ändert sich die vom Auge zur Wahrnehmung gebrachte Größe des Scheibchens mit einer Entfernungsänderung der *weit entfernten* Wand und der damit verbundenen Größenänderung der Kegelbasis.[1])

Beim Betrachten der Haidingerschen Büschel tritt nun an die Stelle des Scheibchens das in der fasrigen Schicht der Netzhaut entstehende Polarisationsbüschel, an die Stelle der weit entfernten Wand tritt die Sichtweitengrenze in der Atmosphäre, d. h. das sichtbare Himmelsgewölbe.[2]) Ist daher die eben skizzierte Anschauung richtig, so steht zu erwarten, daß sich die scheinbare Größe der Haidingerschen Büschel in verschiedenen Höhen über dem Horizont aus der jeweilig in der betrachteten Höhe herrschenden Sichtweite berechnen läßt. Die Sichtweiten bedingen die Form des für uns vorhandenen Himmelsgewölbes, so daß sich die scheinbaren, relativen Größen der Polarisationsbüschel aus der Gestalt des Gewölbes folgern lassen.

4. Der Kalottenbogen $H_1 Z H_2$ der Fig. 1 sei das vom Beobachter in O gesehene Himmelsgewölbe, $N_1 Q_1$ und $N_2 Q_2$ seien die Längen zweier in verschiedenen Höhen über dem Horizont im 90°-Vertikal liegender Büschel.

Im 90°-Vertikal haben die gelbbraunen Büschel eine annähernd horizontale Lage, d. h. die Polarisationsebene liegt horizontal. Wir haben die gelbbraunen Büschel den blauen bei der Beobachtung vorgezogen, weil die gelbbraunen in allen Höhen über dem Horizont deutlich sind, die blauen hingegen nur in Höhen oberhalb etwa 20°. Die folgende Rechnung ist aus diesem Grunde nur für die horizontal liegenden, gelbbraunen Büschel durchgeführt.

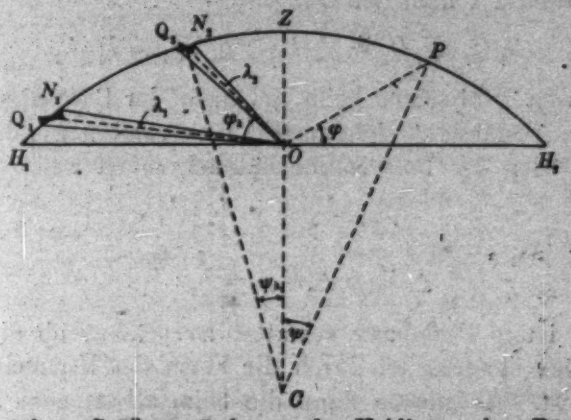
Denken wir uns das Stück des Himmelsgewölbes $H_1 Z$ in n gleiche Teile geteilt, so schneiden gleiche Winkel, die den Standort O des Beobachters zum Scheitel haben, in verschiedenen

1) Die gleichen Betrachtungen lassen sich auch auf die scheinbaren Größenänderungen anderer entoptischer Erscheinungen, z. B. der Nachbilder, anwenden.

2) Leipziger Berichte 69. S. 391. 1917; Ann. d. Phys. 61. S. 313. 1920.

Höhen über H_1 eine verschieden große Anzahl der n Teile ab. Dem Zentriwinkel ψ_k mögen k solcher Teile, von Z aus gezählt, entsprechen. Es sei der Zentriwinkel $H_1 C Z = 2\psi$, dann gilt

$$k : n = \psi_k : 2\psi .$$



Scheinbare Größenveränderung der Haidingerschen Büschel in verschiedenen Höhen über dem Horizont.

Fig. 1.

Wird ψ_k von Z aus gerechnet, so zählen auch die k in diesem Sinne. Rechnet man die Teile von H_1 aus und bezeichnet sie mit k', so wird $n - k = k'$. Zwischen dem Winkel ψ, der als Zentriwinkel zum Winkel φ gehört, wo φ der Winkel ist, unter dem die Höhe des Halbierungspunktes des Gewölbes von O aus geschätzt wird, der gemessenen Höhe φ_k eines Büschels und dem hierzu gehörigen Zentriwinkel ψ_k besteht die Beziehung

$$\cos(\varphi_k + \psi_k) = \cos 2\psi \cos \varphi_k .$$

ψ bestimmt sich hierin durch den geschätzten Halbwert φ, der für das gerade vorhandene Gewölbe gilt, nach der folgenden Drobischschen Gleichung, wobei immer vorausgesetzt wird, daß die Form des Gewölbes eine Kugelkalotte ist, welche Bedingung immer erfüllt ist für die Höhen über dem Horizont, in denen die Beobachtungen ausgeführt wurden.

$$\cos^3\psi - \tfrac{3}{4}(1 - \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^2\varphi)\cos\psi = \tfrac{1}{4}(1 - \operatorname{tg}^2\varphi) .$$

Werden die aus den beiden letzten Gleichungen für φ_k berechneten ψ_k und ψ in die erste Gleichung eingesetzt, so ergeben sich Werte für k und k'.

Eine von O aus als Scheitel gerechnete Anzahl Grade $\varphi_{k(1)} - \varphi_{k(2)}$ schneide von den vorhandenen n Teilen $k'_{(1)} - k'_{(2)} = \triangle k'$ Teile ab. $N_1 Q_1$ und $N_2 Q_2$ seien zwei Polarisationsbüschel in zwei verschiedenen Höhen, ihre Abstände von O seien λ_1 und λ_2, dann ist

$$N_1 Q_1 : N_2 Q_2 = \triangle k'_{(1)} : \triangle k'_{(2)} = \lambda_1 : \lambda_2 .$$

Da die vom Beobachter beim Schätzen der Büschelgrößen gemessenen Abstände L sich umgekehrt verhalten wie die scheinbaren Größen der Polarisationsbüschel, so ist weiter

$$N_1 Q_1 : N_2 Q_2 = L_2 : L_1 ,$$

und es folgt

$$\triangle k'_{(1)} : \triangle k'_{(2)} = L_2 : L_1 .$$

Die letzte Beziehung gestattet zu prüfen, ob die scheinbare Größe der Büschel durch die Form des Himmelsgewölbes bedingt ist. Es müssen dann die beim schätzenden Vergleich gefundenen Abstände L sich wie die entsprechenden $1/\triangle k'$ verhalten, die sich aus der Form des Himmelsgewölbes ergeben, das wir durch einen — mittels Schätzung gewonnenen — Halbwert φ charakterisieren. An Stelle der Schätzung dieses Halbierungswinkels φ ist auch die objektive Methode der Sichtweitenbestimmung aus photometrischen Messungen der Himmelshelligkeit ausführbar und die Feststellung der Sichtweiten auf solche Weite.

In den nachstehenden Kurven (Fig. 2) ist ein Vergleich der L mit den entsprechenden $1/\triangle k'$ durchgeführt. Die $\triangle k'$ sind von 5 zu 5° berechnet worden, wobei die Gesamtzahl der Teile zwischen H_1 und Z zu $n = 1000$ angenommen worden ist. Die ausgezeichneten Kurven sind mit diesen berechneten Werten gezeichnet, die ⊙ gezeichneten Punkte sind beobachtet.[1])

Die Übereinstimmung der bei verschiedenen Gewölben beobachteten Punkte mit denen, welche auf den berechneten Kurven liegen, ist innerhalb der Unsicherheit, mit welcher die Größenschätzungen der Büschel behaftet sind, gut. Es tritt das noch deutlicher hervor, wenn statt der Einzelwerte die

1) Um den direkten Vergleich mit den L zu ermöglichen, sind die $1/k'$ mit einem Zahlenfaktor, z. B. 1080, multipliziert worden.

Mittelwerte aus den Beobachtungen beider Beobachter eingezeichnet werden.

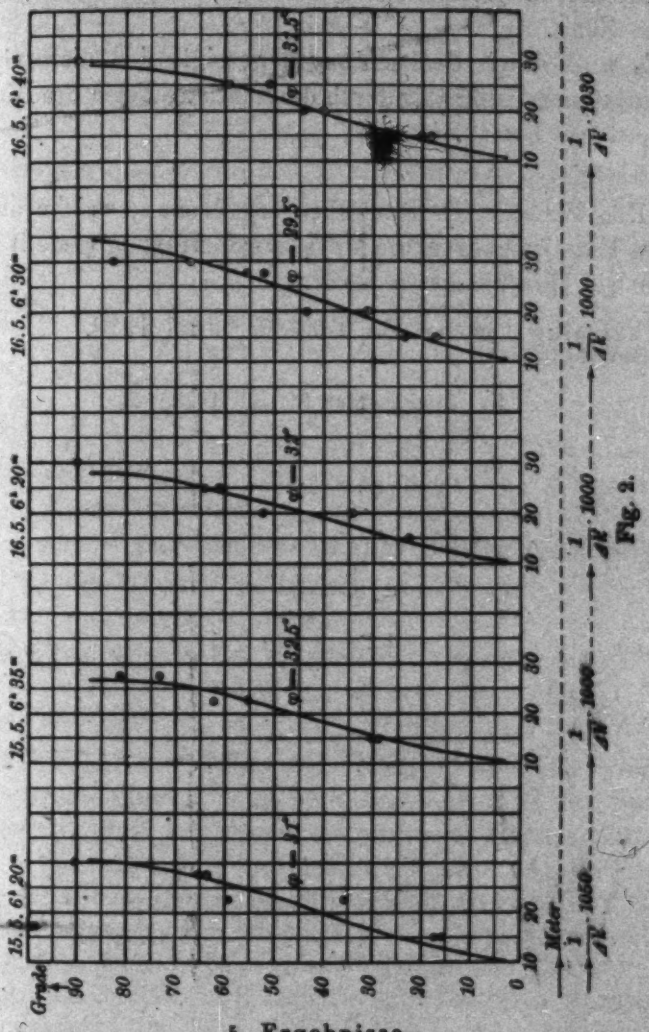


Fig. 2.

5. Ergebnisse.

1. Winkelmessungen an den gelbbraunen Haidingerschen Büscheln im polarisierten Licht des blauen Himmels ergeben bei sehr günstigen Verhältnissen die Büschel im Zenit etwa 45′ größer als in 15° Höhe über dem Horizont. Dieser Unterschied ist eine Folge der verschiedenen Polarisationsgrößen in verschiedenen Höhen, wodurch die Büschel mehr oder weniger deutlich zu sehen sind.

2. Dem Auge erscheinen die gelbbraunen Haidingerschen Büschel in Horizontnähe mehr als doppelt so groß als im Zenit.
3. Es wird durch Beobachtungen gezeigt, daß diese Größenvariation zahlenmäßig durch die sichtbare Form des Himmelsgewölbes bedingt ist.

Den kartellierten Deutschen Akademien, welche auch zu diesen Untersuchungen die Mittel zur Verfügung gestellt haben, sagen wir ehrerbietigsten Dank.

Vilaflor (Chasna) auf Teneriffa, Juni 1919.

(Eingegangen 31. Juli 1920.)

5. *Der Gültigkeitsbereich der Stokes-Oseenschen Widerstandsformel. Erklärung einiger von J. Weyssenhoff gefundener Unstimmigkeiten;*

von Hilding Faxén.

1. Für den Widerstand gegen eine kleine Kugel, die sich in einer reibenden Flüssigkeit bewegt, hat Oseen[1]) die folgende Formel hergeleitet:

$$F = 6\pi\mu a V\left(1 + \tfrac{3}{4}|\sigma|a\right). \tag{1}$$

Hier bedeutet

F den Widerstand,
μ den Koeffizienten der inneren Reibung,
a den Radius der Kugel,
V die Geschwindigkeit,
ϱ die Dichte der Flüssigkeit,
$\sigma = \frac{\varrho V}{2\mu}$.

Oseen hat mir 1915 vorgeschlagen, diese für eine unendlich ausgedehnte Flüssigkeit geltende Formel für den Fall zu erweitern, daß die Flüssigkeit von einer ebenen Wand begrenzt wird. Ich hoffe meine Untersuchungen darüber im Anfang nächsten Jahres als Doktorarbeit (Uppsala) veröffentlichen zu können. Da die Ergebnisse dieser Arbeit zur Erklärung einer von Weyssenhoff[2]) gefundenen Unstimmigkeit beitragen, sollen hiermit einige vorläufige Mitteilungen gemacht werden.

2. Eine Kugel, die sich parallel einer ebenen Wand bewegt, erfährt den Widerstand

$$F = \frac{6\pi\mu a V}{1 - \frac{3}{4}\sigma a - \frac{9}{16}\frac{a}{\zeta}\chi(\sigma\zeta)}. \tag{2}$$

1) C. W. Oseen, Arkiv f. mat., astr. o. fys. 9. Nr. 16. 1913.
2) J. Weyssenhoff, Ann. d. Phys. 62. S. 17. 1920.

Hier ist ζ der Abstand zwischen Wand und Kugelmittelpunkt. Glieder von den Größenordnungen $\sigma^2 a^2$ und a^3/ξ^3 sind gegen 1 vernachlässigt.

$\chi(\sigma\zeta)$ ist eine neue Funktion mit den ersten Gliedern[1])

$$\chi(\sigma\zeta) = 1 - \frac{4}{3}\sigma\zeta + \frac{23}{16}\sigma^2\zeta^2 - \frac{16}{9}\sigma^3\zeta^3 + \frac{317}{864}\sigma^4\zeta^4 + \frac{8}{9}\sigma^5\zeta^5 + \ldots - \left\{\frac{25}{24}\sigma^4\zeta^4 + \ldots\right\}\log\frac{\nu\sigma\zeta}{2},$$

wo

$$\nu = e^C = 1{,}781070\ldots$$

Das zweite Glied von χ hebt Oseens Glied gerade auf!

Die ersten Glieder der asymptotischen Reihe für χ sind

$$\chi = -0{,}2390\ldots\frac{1}{(\sigma\zeta)^{3/2}} - \frac{1}{3(\sigma\zeta)^3} - 0{,}1635\ldots\frac{1}{(\sigma\zeta)^{5/2}} + \frac{15}{(\sigma\zeta)^3} + \ldots$$

Das Restglied dieser Reihe kann mehr als hundertmal so groß sein wie das erste vernachlässigte Glied.

Die folgende Tafel ist lehrreich.

$\sigma\zeta$ =	0	0,1	0,2	0,4	0,6	1	2	5
χ =	1	0,88	0,78	0,626	0,514	0,360	0,170	0,0262
$\chi + \frac{4}{3}\sigma\zeta$ =	1	1,013	1,046	1,160	1,314	1,694	2,836	6,693

3. Lorentz[2]) hat die Widerstandsformel

$$F = \frac{6\pi\mu a V}{1 - \frac{9}{16}\frac{a}{\zeta}}$$

gefunden. Nach 2. ist diese richtig, wenn

$$\chi(\sigma\zeta) + \tfrac{4}{3}\sigma\zeta$$

nicht erheblich von 1 abweicht. Das ist der Fall, wenn $\sigma\zeta$ kleiner als etwa 0,1 ist (vgl. die Tabelle).

Aus der asymptotischen Darstellung ergibt sich die auffallende Tatsache, daß χ für sehr große $\sigma\zeta$ negativ ausfällt. Es muß also ein Gebiet geben, wo die Wand den Widerstand vermindert. Da $\sigma^2 a^2$ klein gegen 1 sein muß, ist diese Wirkung jedoch nicht experimentell nachweisbar. Für $\sigma\zeta$ größer als 5

1) The Svedberg u. H. Andersson, Koll. Zeitschr. 24. S. 157. 1919. Meine Formel ist leider dort etwas falsch zitiert.

2) H. A. Lorentz, Abhandl. über theor. Phys. I. S. 40. Teubner, Leipzig 1911.

ist die Einwirkung der Wand sehr klein und die Oseensche Formel anwendbar. Es ergeben sich also die folgenden Resultate:

A. Wenn die Reynoldsche Zahl $\sigma\zeta$ sehr klein ist, so hebt die Wand das Oseensche Zusatzglied auf und das Lorentzsche Verfahren führt zu richtigen Ergebnissen.

B. Wenn $\sigma\zeta$ von der Größenordnung 1 ist, wird die ausschlaggebende Funktion χ durch sehr verwickelte Reihen gegeben.

C. Wenn $\sigma\zeta$ groß ist, wird die Einwirkung der Wand sehr gering und die Oseensche Widerstandsformel gültig.

4. Nun läßt sich vermuten, daß die Sätze A, B und C auf Fallversuche in Röhren ohne weiteres übertragbar sind. Wenn man die Oseensche Widerstandsformel prüfen will, muß man die Experimente so anordnen, daß σ mal dem Halbmesser der Röhre groß wird, z. B. etwa 20 (vgl. C).

Im Jahre 1915 habe ich Oseens Formel mit einigen experimentellen Ergebnissen verglichen und habe Unstimmigkeit bei Arnolds[1]) und gute Übereinstimmung bei Allens[2]) Versuchen gefunden. Bei Arnolds Versuchen ist aber der Unterschied zwischen Partikel- und Röhrendurchmesser so klein, daß Oseens Formel fast nie verwendbar ist. Bei Allens Versuchen mit Paraffinkugeln stimmt Oseens Formel, wenn

$$2\sigma a = \frac{\varrho a V}{\mu} < 1{,}3$$

ist. Luftblasen erfahren einen etwas kleineren Widerstand als die Formel angibt; sie sind ja auch keine starren Kugeln. Die Tafeln hierzu werden in meiner Doktor-Arbeit veröffentlicht.

Aus Arnolds Versuchen mit Kugeln aus Roseschem Metall kann man schließen, daß Ladenburgs Formel (für in Röhren fallende Kugeln) einen größeren Gültigkeitsbereich hat als die entsprechende von Lorentz (für in der Nähe einer ebenen Wand fallende Kugeln). Aus Arnolds Fig. 8 kann man vielleicht auch den von Weyssenhoff erwähnten interessanten Schluß ziehen, daß die Gefäßwände den Widerstand unter Umständen meßbar vermindern können.[3])

---

1) H. D. Arnold, Phil. Mag. 22. S. 755. 1911.

2) H. S. Allen, Phil. Mag. 50. S. 323. 1900.

3) Man bemerke, daß Arnolds Zeichner „Diameter of tube" statt „Radius of tube" geschrieben hat.

Für die Entscheidung von hierher gehörigen Fragen gibt es zwei Wege. Erstens kann man Oseens Formel für den Fall erweitern, daß die Kugel längs der Achse einer Röhre fällt, d. h. Oseens und Ladenburgs Formeln miteinander verbinden. Diesen Weg werde ich in meiner Doktorarbeit betreten. Zweitens kann man neue Experimente mit weiteren Röhren machen.

Zum Schluß möchte ich bemerken, daß Oseens Formeln[1]) für den Widerstand gegen Ellipsoide (Erweiterungen der Formeln von Oberbeck) weniger bekannt zu sein scheinen.

Göttingen, Juni 1920.

---

1) C. W. Oseen, Arch. d. Math. 24. S. 108. 1916.

(Eingegangen 28. Juni 1920.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1920. № 23.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 63.

1. *Messungen der Deformation des elektrostatischen Erdfeldes durch Luftfahrzeuge*[1]*);*

von Wilhelm Müller.

Inhaltsübersicht: I. Einleitung (Historisches und Ziel der Arbeit). — II. Apparatanordnung für Modellversuche und Methodik der Messungen. — III. Fehlerquellen der Apparatur und Methode. — IV. Ergebnisse. — V. Nachprüfung der Ergebnisse bei einer Freiballonfahrt. — VI. Bestimmung des Everlingschen Reduktionsfaktors. — VII. Kritik des Einkollektormeßverfahrens nach Everling. — VIII. Zusammenfassung.

I. Einleitung.

Historisches.

Die Ergebnisse der im vorigen Jahrhundert in Freiballonen oder mittels emporgelassener Drachen angestellten Messungen des luftelektrischen Potentialgefälles waren einer exakten Auswertung nicht zugänglich, da einmal die Deformation des Erdfeldes durch den leitenden Ballon nicht berücksichtigt wurde und dann der Einfluß der Eigenladung des Ballons, die dieser bei der Abfahrt vom Erdboden oder durch Ballastabgabe erhielt, die Messungen in quantitativ nicht zu kontrollierender Weise fälschte.

Letzterem Übelstande half F. Linke[2]) dadurch ab, daß er an einer Stelle ständig einen schnellwirkenden Ausgleichskollektor arbeiten ließ, der nach einer Vertikalbewegung des Ballons sofort die möglicherweise mitgebrachte Eigenladung zerstreute und diesen selbst in elektrisches Gleichgewicht brachte mit einer zum Ballon relativ stets festliegenden Niveaufläche. Linkes Verdienst ist es also, daß er der Feld-

1) Auszug der Dissertation des Verfassers, Halle 1920.

2) F. Linke, Luftelektrische Messungen bei zwölf Ballonfahrten, Abhandl. d. Gött. Ges. d. Wiss., math.-phys. Kl. Neue Folge VII. 5. S. 22. 1904.

gestaltung um das Luftfahrzeug eine nur von der Anordnung des Ausgleichskollektors abhängige Deformation aufzwang. In dieser Weise hat Linke zuerst Absolutmessungen im Ballon mit zwei tief hinabgelassenen Meßkollektoren angestellt.

In welcher Weise stört nun eigentlich ein leitender Ballon von gegebener Gestalt und gegebenem Potential das Erdfeld? Da die rein mathematische Behandlung dieses Problems auf Grund der Potentialtheorie nur rohe Näherungswerte ergab, verwandten Ebert[1]), Lutz[1]) und Hoffmann[2]) folgende Methode. Sie stellten ein getreues Modell des Luftfahrzeugs in einem künstlichen, elektrischen Felde isoliert auf und bestimmten den Niveauflächenverlauf um das Modell mittels Meßkollektors (Sonde).

Die theoretische Berechtigung dieser Reproduktion des Erdfeldes durch ein künstliches Feld gründet sich auf das von Maxwell[3]) aufgestellte, bekannte Prinzip der elektrischen Ähnlichkeit. Dieses ermöglicht es uns, in rechnerisch einfacher Weise von den im künstlichen, elektrischen Felde gemessenen Größen auf die Verhältnisse in einem geometrisch ähnlichen System z. B. in dem Erdfeld zu schließen.

Nachdem in der geschilderten Weise die Unsicherheit der Messungen infolge Deformation des Erdfeldes und Eigenladung des Ballons behoben war, konnte das Potentialgefälle in seiner Abhängigkeit von der Höhe exakt bestimmt werden. Nach den bisher vorliegenden Messungen scheint es eine Exponentialfunktion der Höhe zu sein. Die meisten Beobachtungen des letzten Jahrzehnts erstreckten sich bis 3—5 km Höhe, selten bis 6 km (Gerdien). Um die Verhältnisse auch in den oberen Schichten der Troposphäre zu klären, die bekanntlich bis etwa 10 km hinaufreicht, unternahm im Herbst 1913 Everling[4]) mit Wigand und Lutze zwei Hochfahrten, die in 8,5 bzw.

1) H. Ebert und W. Lutz, Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre. Bd. II. Heft 5. 1908.

2) K. Hoffmann, Experimentelle Prüfung der durch verschiedene Messungsanordnungen in einem elektrischen homogenen Felde hervorgerufenen Störungen der Niveauflächen. Dissertation. München 1911.

3) Cl. Maxwell, Treatise. Vol. I. § 94. 1873.

4) E. Everling, Messungen des elektrischen Spannungsgefälles in der freien Atmosphäre bis 9000 m Höhe. Verhandl. d. deutsch. Phys. Gesellsch. 16. S. 240. 1914.

9 km Höhe, also bis in die aerophysikalisch so interessante Substratosphäre führten und auch mit Leitfähigkeitsmessungen[1]) verbunden wurden. Im Gegensatz zu Linke, der zur Absolutmessung zwei tief herabgelassene Sonden benutzte, führte Everling[2]) eine Relativmethode ein, bei der die Potentialdifferenz nur einer Sonde gegen den ausgeglichenen Ballon gemessen wird.

Ziel der Arbeit.

In erster Linie bestand nun der Zweck meiner Arbeit darin, die bei diesen Hochfahrten erhaltenen Ergebnisse auszuwerten, d. h. die beobachteten Meßwerte, die natürlich infolge der Deformation des Erdfeldes nur relativ sein können, im künstlichen Felde ihrem absoluten Betrage nach zu bestimmen. Dabei ergab sich eine entscheidende Kritik des Einkollektormeßverfahrens nach Everling.

Weiterhin wurde das künstliche Feld von mir zur Bestimmung der Störung des Erdfeldes durch eine Reihe anderer Luftfahrzeuge benutzt.

Diesen Deformationsmessungen an Luftfahrzeugen voraus ging eine Kontrolle der Apparatur und der Meßmethoden sowie eine Untersuchung der Fehlerquellen, wie sie für solche elektrostatischen Versuche charakteristisch sind.

II. Apparatanordnung für Modellversuche und Methodik der Messungen.

Im wesentlichen wurde für die Herstellung des künstlichen Feldes und den Aufbau der Abtastevorrichtung die von Hoffmann[3]) benutzte, bewährte Apparatur als Vorbild genommen.

Das Feld wurde erzeugt zwischen 2 horizontalen Platten (3 m längs, 1,50 m quer) mit 2 m Vertikalabstand. Die untere, eine Zinkplatte, war durch starke Porzellanisolatoren mit darauf gelegten Paraffinplatten gegen Erde isoliert. Die obere Platte, ein Zinkdrahtnetz von 1 qcm Maschenweite, war mit

1) A. Wigand, Verhandl. d. Deutsch. Phys. Gesellsch. 16. S. 232. 1914.

2) E. Everling, a. a. O.

3) K. Hoffmann, a. a. O.

kräftigen Schnüren an der Zimmerdecke aufgehängt und gegen diese durch paraffinierte Ebonitstäbe isoliert. Durch diese Aufhängung wurde die von Hoffmann[1]) Seite 17 seiner Arbeit erwähnte Zusammendrängung der Niveauflächen in den Isolatoren vermieden, die bei isolierter Aufstellung der oberen Platte auf der unteren mittels Eckpfeilern nicht zu umgehen ist. Die Spannung zur Erzeugung des Feldes wurde von einer 100—160 zelligen Akkumulatorenbatterie geliefert.

Die Abtastevorrichtung bestand aus einem mit 105 cm langer, bis 175 cm ausziehbarer Sonde versehenen Tropfkollektor, dessen Aufladezeit etwa 30 Sekunden betrug, und einem Wulfschen 2 Fadenelektrometer der Firma Günther und Tegetmeyer. Ein solcher Kollektor hat nach Linke[2]) als Referenzpunkt die Auflösungsstelle des Wasserstrahls, d. h. er zeigt das Potential dieser Stelle an. Kollektor und Elektrometer waren, durch Ebonit gegen ihre Unterlage isoliert, auf einem Schlitten angebracht, der eine Horizontal- und eine Vertikalbewegung über den gesamten Feldbereich ermöglichte. Die Fäden des Elektrometers wurden mit dem Kollektor, das Gehäuse mit der unteren Platte leitend verbunden.

Die Modelle wurden in das Feld meist in der von Hoffmann angegebenen Weise seitlich an einem horizontalen Halter eingeführt, der außerhalb des Feldes zwischen Paraffinplatten eingegossen war. Seltener wurden die Modelle mit paraffinierten Seidenfäden unter Zwischenschaltung von Bernsteinstücken an der oberen Platte aufgehängt.

Für die Aufladung der Modelle kommen 3 Methoden in Frage, die bei meinen Untersuchungen angewandt worden sind.

1. *Natürliche Ausgleichung.* Bringen wir ein leitendes Modell, z. B. das eines Ballons, isoliert in ein homogenes Feld, so wird es, wenn es eine Eigenladung mitbringt, zunächst eine Potentialdifferenz gegen seine Umgebung haben. Infolge der Leitfähigkeit der Luft wird sich diese Differenz nach einiger Zeit ausgleichen und das Modell ein mittleres Potential seiner nächsten Umgebung annehmen, das von der Gestalt und damit von der Kapazitätsverteilung des Ballons abhängt.

1) K. Hoffmann, a. a. O.

2) F. Linke, Über Messungen von Potentialdifferenzen mittels Kollektoren. Phys. Zeitschr. 4. S. 661. 1903.

Ein ungeladenes Modell nimmt dieses Potential sofort an.

2. *Aufladung von außen her.* Das Modell wird durch einen leitenden Halter mit dem Pol einer konstanten Spannungsquelle verbunden und so auf ein bestimmtes Potential gebracht. Da dieses auch einer gewissen Horizontalebene des ungestörten Feldes zukommt, so kann man die Fiktion machen, das Modell sei isoliert aufgehängt und durch irgendwie am Modell angebrachte Ausgleicher auf das Potential der angeführten Horizontalebene aufgeladen.

3. *Aufladung mittels Linkeschen Ausgleichskollektors.* Den Zweck und die Wirkungsweise des Linkeschen Ausgleichers haben wir bereits in der Einleitung behandelt. Wir wollen hier untersuchen, welche Kollektoren als Modellausgleicher im künstlichen Felde in Frage kommen. Von vornherein scheidet der Flammenkollektor aus, da die aufsteigenden Flammengase das Feld stark stören würden. Ebenso sehen wir von der Verwendung von Radiumkollektoren wegen der Ionisation[1]) ihrer Umgebung ab. Diese macht einmal eine genaue Bestimmung der Lage des Referenzpunktes infolge des Einflusses der Luftbewegung[2]) sehr schwierig; andererseits stören die sich ausbildenden Raumladungen[3]) sekundär das Feld in der Nähe des Ausgleichers. Für die Benutzung im künstlichen Felde bleibt uns daher als guter Ausgleicher im Linkeschen Sinne nur der Thomsonsche Tropfkollektor.

Zur Methodik der Messungen.

Bei der Abtastung des Feldes beschränkte ich mich stets auf die vertikale Längsmittelebene und zwar nur auf das mittlere Rechteck (150 × 120 cm). Die Modelle des Zeppelinschiffes und des Flugzeugs wurden in entsprechender Lage aufgehängt. Bei den Rotationskörpern genügte es, nur eine Feldhälfte auszumessen, da sich das Feld der anderen durch Spiegelung gegen die senkrechte Rotationsachse ergibt. Zur möglichst getreuen Wiedergabe der Deformationen auch in der

---

1) Vgl. F. Linke, Phys. Zeitschr. 4. S. 661. 1903.

2) Vgl. M. Moulin, Sur les égaliseurs de potentiel, Annales de Chimie et de Physique. VIII. p. 40. 1907.

3) F. Henning, Ann. d. Phys. 8. S. 893. 1902; K. Hoffmann, a. a. O. S. 48–50.

Feinstruktur wurde in jedem Falle das Potential von 400 bis 1200 Feldpunkten bestimmt, die ich naturgemäß am dichtesten in der Nähe des Modells wählte.

Um während der langen Dauer einer Versuchsreihe von 5—8 Stunden keine Abnahme des normalen Gefälles zu erhalten, mußte auf Konstanz der an die Platten gelegten Potentialdifferenz Wert gelegt werden. Aus diesem Grunde lud ich die spannungliefernde Akkumulatorenbatterie am Vortage jeder größeren Untersuchung neu auf und brachte sie kurz vor dem Versuch nochmals zur Gasbildung. Die inkonstante Überspannung nahm ich durch mehrfaches, momentanes Kurzschließen der Batterie fort und legte die Spannung erst nach Aufhören des „Kochens" der Akkumulatoren an die Platten an. Da ferner die Isolation des Feldes infolge häufiger Auffrischung stets einwandfrei war, blieb das normale Gefälle während einer Versuchsreihe praktisch konstant. Falls eine größere Zahl von Akkumulatorenbatterien zur Verfügung steht, empfiehlt es sich, deren Kapazität durch Parallelschaltung mehrerer Serien zu erhöhen und damit die an die Platten gelegte Spannung von kleinen Isolationsfehlern möglichst unabhängig zu machen.

III. Fehlerquellen der Apparatur und Methode.

Als solche kommen in Betracht:

1. Eich- und Ablesungsfehler des Elektrometers.

2. Randwirkung des durch die feldbegrenzenden Platten gebildeten Kondensators und Inhomogenität des Feldes durch Raumladungen infolge Ionenwanderung.

3. Störungen des Verlaufs der Niveauflächen durch Kollektorsonde und Modellhalter.

4. Einfluß der Starrheit der Platten auf die Feldgestaltung.

5. Einfluß der Erdung der unteren Platte oder in der Nähe des Feldes stehender, geerdeter Leiter auf den Verlauf der Potentialflächen.

6. Störung des Feldes durch Luftströmungen, die geladenen Staub ins Feld bringen.

1. Eich- und Ablesungsfehler des Elektrometers.

Um die Empfindlichkeit des Wulfschen Elektrometers für den erforderlichen großen Meßbereich nicht herabsetzen zu

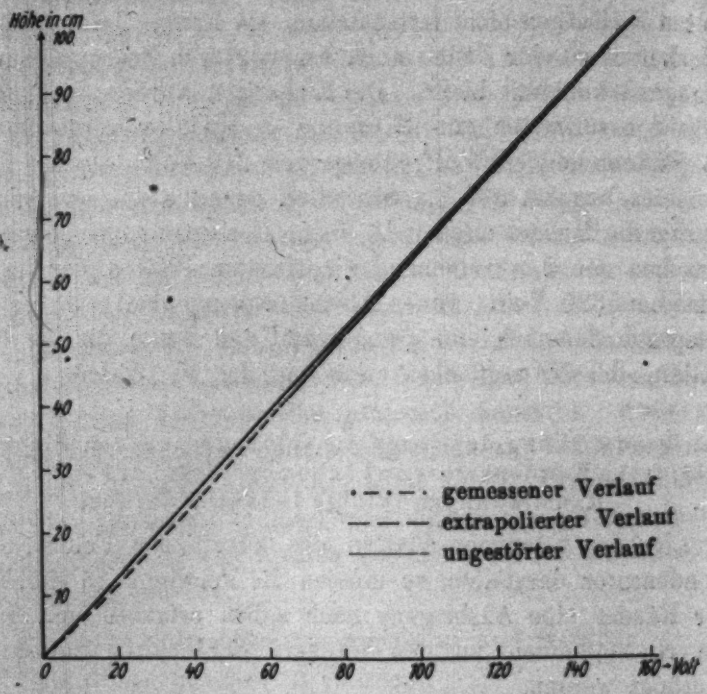
müssen und um die Verwendung einer Hilfsladung für den Innenkonduktor zu vermeiden, wurde nur die Stellung des linken Fadens abgelesen. Wesentliche Abweichungen der Eichkurven voneinander waren bei den etwa alle 14 Tage wiederholten Eichungen nicht festzustellen, ein Beweis dafür, daß die Beschaffenheit der Fäden auch bei stärkeren Beanspruchungen genügend konstant bleibt. Die Eichungen wurden nach einem Präzisionsvoltmeter von Siemens & Halske vorgenommen. 65 Skalenteile des Wulf entsprachen 210 Volt. Da das Elektrometer bequem auf $^1/_{10}$ Skalenteil genau abzulesen war, so betrug die Meßgenauigkeit $^1/_3$ Volt. Der Spannungsunterschied zwischen den 2 m voneinander entfernten Platten war im allgemeinen 320 Volt. Einer Ablesungsgenauigkeit von $^1/_3$ Volt entsprach demnach eine Genauigkeit von 2 mm für die Feststellung des Niveauflächenverlaufs in der Vertikalen.

2. Randwirkung des durch die feldbegrenzenden Platten gebildeten Kondensators und Inhomogenität des Feldes durch Raumladungen infolge Ionenwanderung.

Da die geladenen Platten des künstlichen Feldes einen Kondensator darstellen, so müssen die Feldlinien in der Nähe der Ränder eine Ausbiegung nach außen erfahren und damit die Niveauflächen an den Rändern der Platten zusammengedrängt werden.

Eine in der Wirkung gleichartige Zusammendrängung in der Nähe der Platten muß jedoch auch im Mittelteil des Feldes stattfinden, da bekanntlich jeder von Ionen erfüllte, geladene Kondensator infolge Ionenwanderung vor den Platten Raumladungsschichten mit entgegengesetztem Vorzeichen und damit einen Potentialgefälleanstieg an den Platten aufweist. In der Luft sind aber stets Ionen vorhanden. Bei den Dimensionen meines Versuchsfeldes war die Störung des gleichmäßigen Potentialabfalls durch Randwirkung und Raumladung an den Platten zwar klein, aber immerhin doch so erheblich, daß sie auch für die Feldmitte berücksichtigt werden mußte. Die Prüfung des Feldes auf diese Störung ergab, daß für unter Feldmitte gelegene Punkte die gemessenen Potentialwerte etwas verringert werden müssen. Bis 20 cm unter Feldmitte ist die Korrektion unmerklich, bis 35 cm beträgt sie 0,3 Volt, bis

50 cm 0,6 Volt, bis 60 cm 1 Volt. Entsprechend wurden für über Feldmitte gelegene Punkte die gemessenen Potentialwerte erhöht.



Spannungsabfall längs einer Mittelvertikalen.

Fig. 1.

Fig. 1 zeigt den gemessenen Spannungsabfall in einer Mittelvertikalen. Für den nicht zugänglichen oberen und unteren Teil des Feldes wurde die Abfallkurve durch Extrapolation ergänzt. Die Vergleichsgrade zeigt den hypothetischen Abfall im ungestörten Felde.

3. Störungen des Verlaufs der Niveauflächen durch Kollektorsonde und Modellhalter.

Wie Hoffmann in der angeführten Arbeit S. 18—22 nachgewiesen hat, ist die Feldstörung durch eine geladene Kollektorsonde oder einen Modellhalter in der vertikalen Längsmittelebene zu klein, „um merklich meßbare Modifikationen des Verlaufs selbst stark gekrümmter Niveaulinien hervor-

zurufen", wenn nur dafür Sorge getragen wird, daß Sonde und Halter horizontal in das Feld eingeführt werden.

4. Einfluß der Starrheit der Platten auf die Feldgestaltung.

Befindet sich das Luftfahrzeug in der freien Atmosphäre in einer Höhe über dem Erdboden, die das mehr als 30-fache seiner Vertikalabmessung beträgt, so darf man annehmen, daß sich das Störungsfeld der Niveauflächen um das Fahrzeug praktisch unbeeinflußt von der starren Erdoberfläche ausbilden kann. In unserem künstlichen Felde ist dieser Ausbildung eine Grenze gesetzt durch die relative Nähe der starren Platten. Wir müssen uns nun darüber Rechenschaft ablegen, inwieweit wir trotzdem berechtigt sind, den Niveauflächenverlauf im künstlichen Felde als ähnlich dem in der freien Atmosphäre anzusehen. Zu diesem Zwecke betrachten wir zunächst die Störung eines homogenen Feldes durch eine leitende Kugel und untersuchen dann den Einfluß der starren Platten auf die Feldgestaltung.

Denken wir uns durch die Kugel mit dem Radius R ein rechtwinkliges Koordinatensystem xyz mit dem Mittelpunkte als Nullpunkt gelegt in der Weise, daß die xy-Ebene in die zum Kugelpotential gehörige Niveaufläche fällt, während die z-Achse die Richtung der Feldlinien des ungestörten Feldes hat, so nimmt nach Drude-König[1]) ein beliebiger Punkt des deformierten Feldes das Potential an:

$$\varphi_a = E_a \cdot z \left(1 - \frac{R^3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3}\right).$$

E_a ist die Feldstärke des homogenen Feldes senkrecht zu den Niveauflächen.

In welcher Weise macht sich nun der Einfluß der Grenzplatten auf die Feldgestaltung geltend?

Die Wirkung einer unendlich großen, leitenden Platte von bestimmtem Potential auf eine Kugel und deren Feld läßt sich bekanntlich in einfacher Weise nach der Thomsonschen[2]) Methode der „elektrischen Bilder" ersetzen durch den Einfluß

1) Drude-König, Physik des Äthers S. 58. 1912.

2) W. Thomson, Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism. p. 144. 1872.

einer gleichgroßen Kugel, die bezüglich der Platte das gleiche, aber entgegengesetzte Potential besitzt wie die gegebene Kugel und dieser auf der anderen Seite der Platte spiegelbildlich symmetrisch gegenübergestellt ist. Unter dem Einfluß beider Kugeln würde ein Feldpunkt das Potential:

$$\varphi_1 = E_a \cdot z \left(1 - \frac{R^3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} + \frac{R^3}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2h)^2}^3}\right)$$

annehmen, wobei h der Abstand des Kugelmittelpunktes von der Platte ist.

Bei 2 Platten, wie sie unser künstliches Feld begrenzen, liegen die Verhältnisse etwas schwieriger. Es sei die obere Platte A (Fig. 2) auf ein gewisses, positives Potential $+V$, die untere Platte B auf $-V$ geladen; die isolierte Kugel K in der Mitte AB nimmt dann das Potential Null an. Gegen A hat die wirkliche Kugel negative Spannung, also liegt die fingierte Kugel K_A über A an $+2V$, entsprechend die Spiegelkugel K_B unter B an $-2V$. Streng genommen dürfen wir 2 Platten nicht durch 2 Spiegelbilder ersetzen, da ja z. B. A, als elastische Ätherfläche gedacht, unter der Einwirkung der 3 Kugeln K_A, K, K_B deformiert werden würde. Um A als Ebene zu erhalten, müßten wir vielmehr alles unter A Liegende gegen A spiegeln; das Gleiche müßten wir gegen B tun. Dann aber würde wieder dieselbe Überlegung anzustellen sein; ich müßte wieder gegen A und B spiegeln u. s. f. Kurz, der Einfluß zweier starren Platten auf ein zwischen ihnen befindliches Feld läßt sich nur durch unendlichfache Spiegelung des Feldes gegen beide Platten ersetzen. Die mathematische Verfolgung dieser „Thomsonschen mehrfachen Spiegelung" zur Berechnung des Potentialwertes irgendeines Punktes im Felde einer Kugel führt auf eine stark konvergierende, unendliche Reihe, die je nach der Zahl der berücksichtigten Glieder das gesuchte

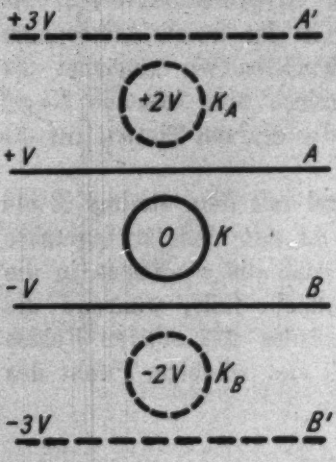


Fig. 2.

Potential mit beliebiger Annäherung ergibt. Für unseren Fall, Kugel in Feldmitte, lautet sie mit Beschränkung auf 2 Spiegelbilder (Fig. 2):

$$\varphi = E_a \cdot z \left[1 - \frac{R^3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} + \frac{R^3}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h_1)^2}^3} + \frac{R^3}{\sqrt{x^2+y^2+(z+h_1)^2}^3} \right],$$

worin h_1 diesmal den Plattenabstand bedeutet. Der deformierende Einfluß der beiden Platten wird durch die beiden letzten Klammergrößen dargestellt.

Die Vertikalabmessungen meiner Modelle wurden durchweg unter 28 cm gehalten; mit $R = 14$ cm als Kugelradius nehmen wir also den ungünstigsten Fall an. Um die Störungen durch Randwirkung und Raumladungen in der Nähe der Platten nicht über den Betrag einer kleinen Korrektion anwachsen zu lassen, habe ich ausnahmslos in dem Raume gemessen, der von Ebenen mit 60 cm Vertikalabstand und von solchen mit 75 cm Horizontalabstand vom Feldmittelpunkte (0,0) begrenzt war. Da die Störung durch die Platten in ihrer Nähe naturgemäß am größten ist, so genügt es, den Einfluß der Spiegelbilder auf den Punkt (0,60) zu untersuchen, um den extremen Korrektionswert für unsere Messungen zu finden.

Unter Annahme von 320 Volt Potentialdifferenz zwischen den Platten mit 2 m Abstand ergibt sich für den Punkt (0,60 die Deformation zu:

$$\varphi_D = \frac{320}{200} \cdot 60 \left(\frac{14^3}{140^3} + \frac{14^3}{260^3} \right) = 96 \cdot 0{,}001156 = 0{,}11 \text{ Volt}.$$

Dieser Wert liegt innerhalb der Meßgenauigkeit von $^1/_3$ Volt. Wir dürfen daher den Einfluß der Starrheit der Platten auf die Feldgestaltung vernachlässigen und die Verhältnisse in unserem künstlichen Felde bei der angegebenen Höchstabmessung der Modelle als praktisch ähnlich denen in der freien Atmosphäre ansehen.

5. Einfluß der Erdung der unteren Platte oder in der Nähe des Feldes stehender, geerdeter Leiter auf den Verlauf der Niveauflächen.

Es liegt nahe, bei Anlegen der das Feld erzeugenden Spannung mit Vorliebe die untere Platte zu erden in der Meinung, damit den in der Natur gegebenen Verhältnissen am

nächsten zu kommen. In Wirklichkeit tritt dadurch eine Fehlerquelle in die Erscheinung, die einmal für Vernachlässigung zu groß und andererseits ihrer Größe nach zu unbeständig ist, um rechnerisch berücksichtigt zu werden. Wie nebenstehende, schematische Fig. 3 zeigt, verlaufen in diesem Falle die Feldlinien von der oberen Platte nicht nur nach der unteren, sondern auch seitlich nach dem geerdeten Fußboden, so daß eine Streuung der Feldlinien, damit eine Zusammendrängung der Niveauflächen an der oberen Platte die Folge ist. Aus diesem Grunde habe ich stets von einer Erdung der unteren Platte abgesehen und dafür das Nullpotential der Mitte des Feldes aufgezwungen. Dies erreichte ich in einfacher Weise durch Erdung der Mitte meiner Spannungsbatterie, deren Enden an die Platten gelegt wurden. Der Verlauf der Niveauflächen war dann zur Horizontalmittelebene spiegelbildlich symmetrisch. Die Potentialwerte wurden jedoch von der unteren, mit Null benannten Platte an positiv gezählt, um Wechsel des Vorzeichens zu vermeiden.

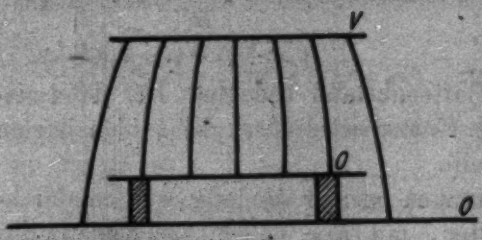


Fig. 3.

Ebenso müssen große, geerdete Leiter in der Nähe des Feldes, in erster Linie die Zimmerwände, eine Streuung der Feldlinien nach dieser Richtung zur Folge haben. Das Feld wurde daher so aufgestellt, daß es überall einen Mindestabstand von 2 m von den Wänden hatte. Unvermeidlich war der störende Einfluß des geerdeten, dünnen Eisenrahmens, der den Schlitten für die Abtastevorrichtung trug. Sein Abstand vom Felde wurde so gewählt, daß sich zwar in der ihm zugekehrten Feldseite noch eine geringe Störung nachweisen ließ, daß aber der Fehler in der Vertikallängsmittelebene, in der ausschließlich gemessen wurde, praktisch gleich Null war.

6. Störung des Feldes durch Luftströmungen, die geladenen Staub in das Feld bringen.

Zu längeren, eingehenden Untersuchungen gaben Störungen den Anlaß, deren Ursache zunächst nicht festzustellen

war. Sie bestanden in einer mehr oder weniger langsamen Veränderlichkeit der Potentialwerte eines und desselben Feldpunktes, so daß eine exakte Bestimmung des Niveauflächenverlaufs unmöglich war. Die Vermutung, Isolationsfehler oder Schwankungen der Batteriespannung könnten an diesem Umstande schuld sein, erwies sich als hinfällig.

Ebenso mußte die Annahme fallen gelassen werden, daß die Entstehung der sogenannten Wasserfallelektrizität infolge des „*Lenard*-Effektes" die Unbeständigkeit der Potentialwerte hervorriefe. Dieser Wasserzerpratzeffekt besteht in einer Auslösung von Elektronen aus der unteren Platte durch das zerspritzende Wasser des Kollektors. Es wäre sehr wohl möglich gewesen, daß zur oberen, positiven Platte aufsteigende Elektronenschwärme als negative Raumladungen das natürliche Feld deformiert hätten. Da aber das Bedecken der unteren Platte mit einem Tuch, das nach Ebert und Lutz[1]) den Zerpratzeffekt so gut wie vollkommen dämpft, die zeitlichen Schwankungen des Potentials in keiner Weise verringerte, mußte auch von dieser Deutung Abstand genommen werden.

Ihre endliche Aufklärung schienen die Schwankungen durch Annahme lichtelektrischer Effekte zu finden. Die Störungen zeigten eine deutliche Zunahme mit der Intensität des in das Feld fallenden Sonnenlichtes; auch vergrößerte das Einschalten einer hochkerzigen, elektrischen Glühlampe die Amplitude der Schwankungen nicht unwesentlich. Unter den verschiedenen lichtelektrischen Wirkungen schied nun der bekannte *Hallwachs*effekt von vornherein aus, da es für die Schwankungen gleichgültig blieb, ob die Begrenzungsplatten belichtet wurden oder nicht. Ebenso kam die normale Gasionisation durch sehr kurzwelliges Licht nicht in Frage, da dieses weder in der durchs Fenster gegangenen Sonnenstrahlung, noch in der durch das Glas der Glühlampe gedrungenen Strahlung enthalten ist. Alle in dieser Richtung angestellten Versuche zeigten dementsprechend auch die Unabhängigkeit der Potentialschwankungen von lichtelektrischen Effekten. Jene waren also auf andere Ursachen zurückzuführen.

Als diese ergaben sich schließlich die geringen Luft-

1) H. Ebert u. W. Lutz, a. a. O.

strömungen, die stets in geschlossenen Räumen vorhanden sind und einmal durch Undichtigkeiten der Fenster- und Türfüllungen, andererseits durch Wärmequellen im Zimmer hervorgerufen werden. Diese Strömungen führen Teilchen mit sich, die durch reibungselektrische oder andere Vorgänge positiv oder negativ aufgeladen sind und von verschiedener Herkunft sein können. Es mag zum Teil mikroskopischer „Staub" organischer und mineralischer Natur sein; doch glaube ich, daß in der Hauptsache solche Partikelchen beteiligt sind, die auch bei der Kondensation als Kerne eine Rolle spielen und in der Hauptsache von chemischem Herkommen[1]) sind. Wir haben es also hier mit Konvektionsströmen zu tun, bei denen fast stets die positiven Ladungen überwiegen, wie einmal meine Untersuchungen zeigten, wie es sich aber auch aus der bekannten Erscheinung ergibt, daß an elektrischen Schalttafeln und im Zimmer geführten Leitungen vor allem die negativen Pole bzw. Drähte von einer dicken Staubschicht umgeben sind. Der Einfluß des Sonnenlichtes ist daher nur als mittelbar so zu erklären, daß durch die damit verbundene Wärmestrahlung Luftströmungen hervorgerufen werden, die nun ihrerseits Raumladungen in das Feld bringen. Daher läßt sich eine hochkerzige Glühlampe in dieser Beziehung vollkommen ersetzen durch einen Bunsenbrenner. Beide haben infolge ihrer Wärmeabgabe, wie sie namentlich bei gasgefüllten Lampen ganz beträchtlich ist, starke Luftströmungen zur Folge.

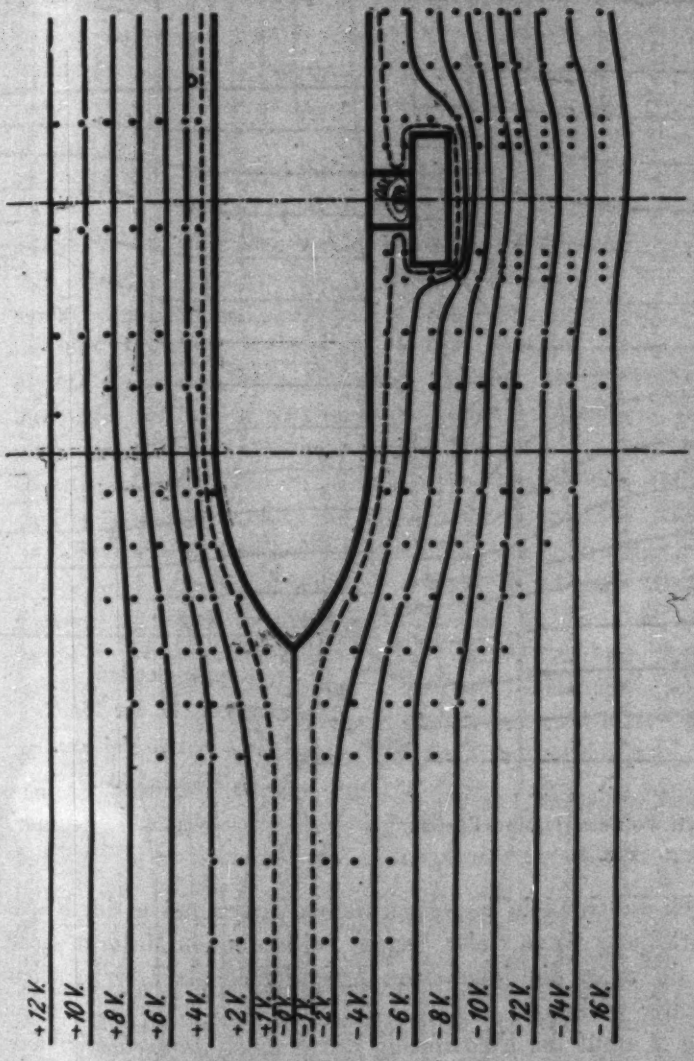
Zur Vermeidung der Potentialschwankungen trug ich dafür Sorge, diese Konvektionsströme auf ein Mindestmaß zu beschränken. Aus diesem Grunde sah ich grundsätzlich von der Benutzung künstlicher Lichtquellen ab, brachte an Türen und Fenstern dichte Vorhänge an und ließ ein Fenster nur soweit frei, daß ich die Stellung der Elektrometerfäden gut ablesen konnte. Zur Vermeidung von Staub empfiehlt es sich, den Fußboden zu ölen oder ihn doch wenigstens, wie es in meinem Versuchszimmer geschah, öfter mit ölgetränktem Holzmehl aufwischen zu lassen. Durch diese Maßnahmen gelang es mir, die sonst unvermeidlichen Potentialschwankungen unter die Größe des Beobachtungsfehlers herabzudrücken.

---

1) Vgl. z. B. A. Wigand, Meterolog. Zeitschr. S. 10. 1913.

IV. Ergebnisse.

Die Figg. 4—6 geben die Feldgestaltung in der Nähe eines *Zeppelinkreuzers* wieder. Das Modell (48 cm lang, 6 cm

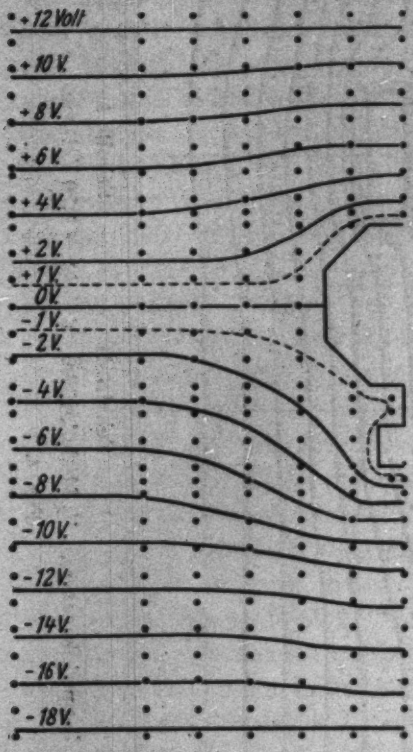


Modell eines Zeppelinkreuzers. 1/2 Modellgröße. $dV/dh = 1{,}30$ Volt/cm.
Fig. 4.

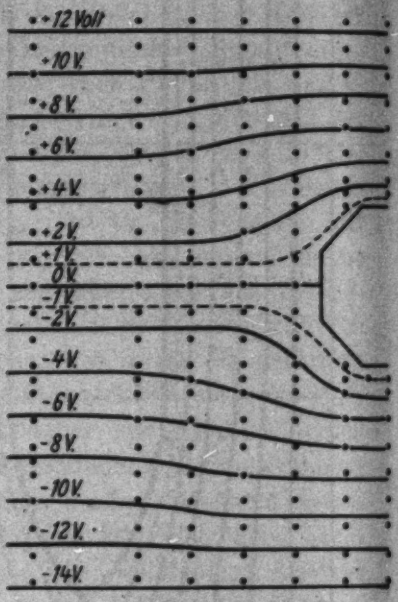
breit und hoch) wurde aus Draht hergestellt und mit metallisiertem Ballonstoff überzogen. Die Aufladung geschah von außen her auf das Potential der im ungestörten Felde durch die Modellängsachse gehenden Ebene. Von deren mit

Null bezeichnetem Potentialwert wurde der Spannungsabfall nach oben positiv, nach unten negativ gezählt.

Beim ausgeglichenen Luftkreuzer mit abgestellten Motoren wird diese dem Modellpotential entsprechende Fläche infolge



Zeppelinmodell Querschnitt I der Fig. 7.
dV/dh = 1,15 Volt/cm. $^1/_3$ Modellgröße.
Fig. 5.

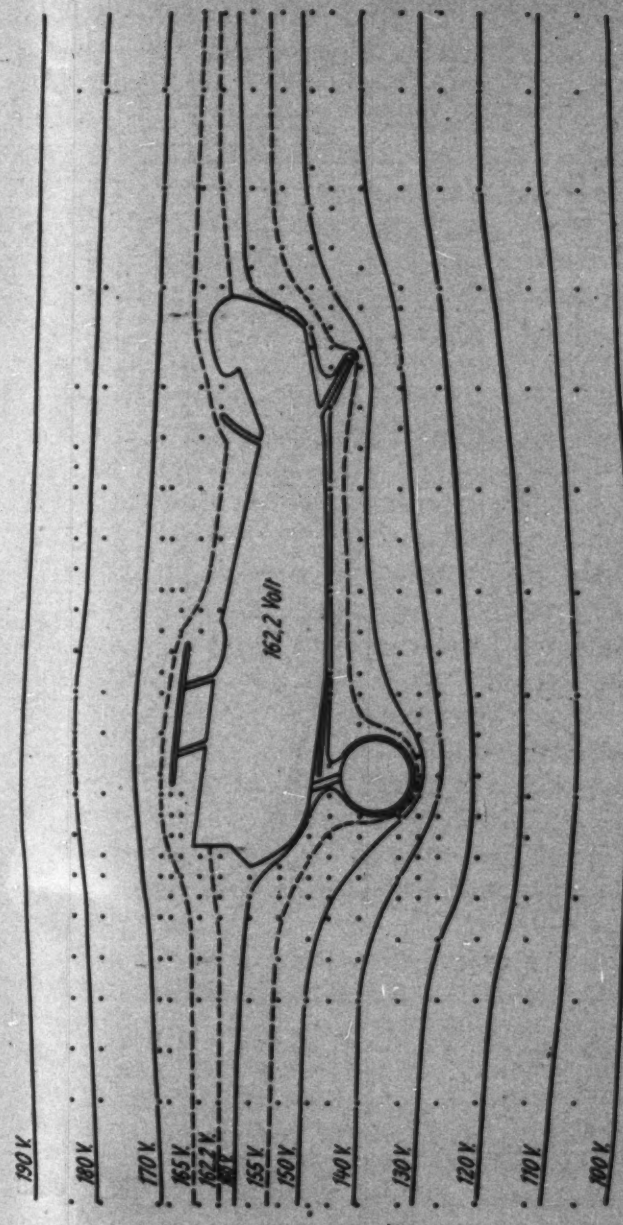


Zeppelinmodell
Querschnitt II der Fig. 7.
dV/dh = 1,15 Volt/cm.
$^1/_3$ Modellgröße.
Fig. 6.

der durch die Gondeln hervorgerufenen Unsymmetrie der Kapazitätsverteilung etwas tiefer liegen, bei laufenden Motoren noch tiefer, da dann die ionisierten Auspuffgase als Linkescher Ausgleicher wirken.

Fig. 7 stellt die Feldstörung durch einen *Doppeldecker* dar. (Gesamtlänge des Modells 56 cm, Gesamthöhe 24 cm.) Die Trag- und Steuerflächen des Modells bestanden aus Metallblech; der hölzerne Rumpf sowie das Fahrgestell wurden durch Bekleben mit Stanniolpapier leitend gemacht. Da die Ausgleichung

des Flugzeugs beim Flug durch die Kollektorwirkung der Auspuffgase [1]) geschieht, so wurde das Modell entsprechend auf

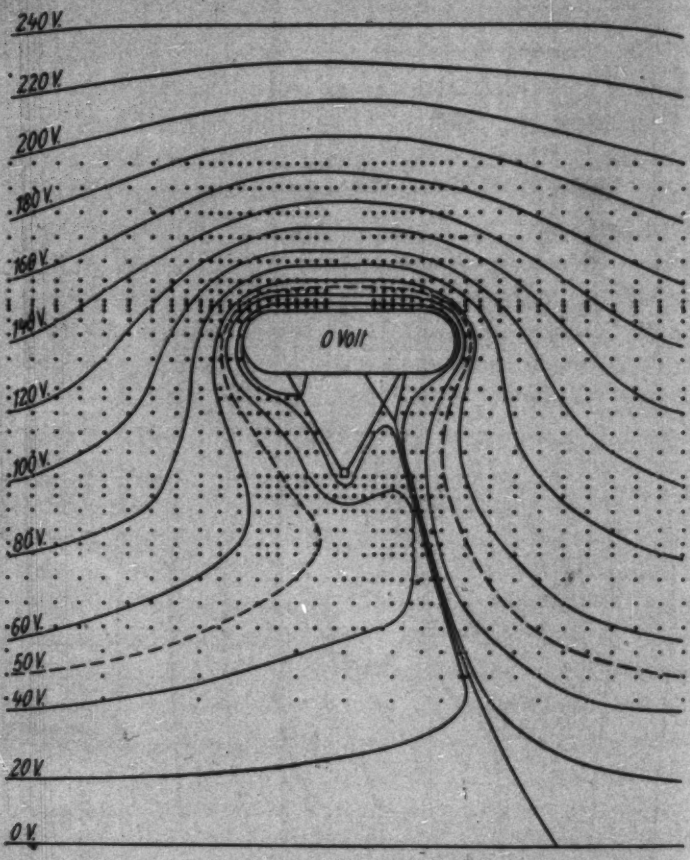


Doppeldecker, von außen her auf das Potential 162,2 Volt aufgeladen. $dV/dh = 1{,}55$ Volt/cm.
Maßstab $^1/_4$ der Größe des Modells.
In einer Tiefe unter dem Fahrgestell gleich dem $1^1/_2$fachen der Gesamthöhe des Flugzeugs ist das Feld wieder normal.

Fig. 7.

1) A. Wigand, Die Naturwissenschaften. 7. S. 487. 1919.

das Potential derjenigen Niveaufläche von außen her aufgeladen, die im ungestörten Felde unmittelbar über dem Mittelteil des Rumpfes verlaufen würde. Für Messungen des Potentialgefälles im Flugzeuge ist zu beachten, daß das Deformationsbild der Niveauflächen mit der Lage des Flugzeugs im Raume (Anstellwinkel und Schräglage) variieren wird.



Fesselballon an geerdetem Kabel in etwa 75 m Höhe.
dV/dh = 1,46 Volt/cm. (Maßstab $^1/_4$ der Modellgröße.)
Fig. 8.

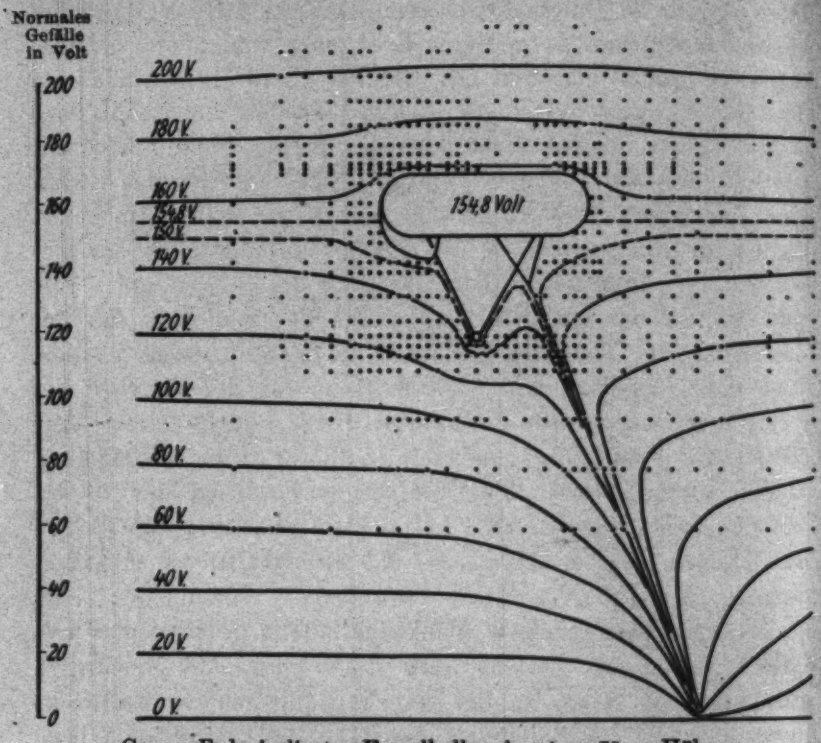
Fig. 8 zeigt die Feldstörung durch einen geerdeten *Fesselballon.* Da dieser ebenso wie das mit dem geerdeten Metallkabel verbundene Leinensystem bei der in unseren Breiten vorhandenen Luftfeuchtigkeit der unteren Schichten als Leiter

zu betrachten ist, so wird der Ballon dauernd nahezu auf dem Erdpotential gehalten. Der infolge der natürlichen Ausgleichung der Ballonoberfläche zur Erde gehende Strom läßt sich leicht mittels in das Kabel eingeschalteten Galvanometers nachweisen. Das Modell wurde, stark idealisiert, aus Metall hergestellt und durch einen Kabeldraht mit der unteren Platte verbunden. Der eigentliche Ballonkörper war 44,5 cm lang und 13 cm hoch, der Abstand der unteren Korbkante vom oberen Ballonrande betrug 34 cm, von der unteren Platte 16 cm. Infolge der Beschränkung durch die Felddimensionen konnte die Deformation nur für eine verhältnismäßig geringe Höhe dargestellt werden. Die während des Feldzuges benutzten Ballone hatten eine Länge von etwa 25 cm. Unsere Figur stellt also einen Ballon in nur etwa 75 m Höhe vor. Trotzdem ist der Potentialabfall unmittelbar über der Mitte des Ballons, gerechnet auf eine Strecke gleich 0,1 der Höhe des Ballonkörpers das Zehnfache des normalen Gefälles, am Ventil (rechts seitlich) etwa das Doppelte. Für 1000 m Höhe, in der während des Krieges im allgemeinen beobachtet wurde, dürfte dieses Verhältnis auf etwa 100:1 steigen. In dieser Höhe ist der Gradient[1]) normalerweise 25 Volt/m, bei Gewitterlage das 20- bis 50fache dieses Wertes. Wir hätten demnach über dem Ballon bei schönem Wetter mindestens 2,5 Kilovolt/m, bei Gewitterneigung 50—125 Kilovolt/m. Wenn diese Spannungen auch noch nicht das zu einer Funkenentladung erforderliche Gefälle erreichen, so besteht doch die Gefahr, daß eine Blitzentladung aus einer in der Nähe befindlichen Gewitterwolke ihren Weg auf den Ballon als der Bahn des geringsten Widerstandes nimmt.

Wie sich demgegenüber die Feldverteilung um einen gegen Erde isolierten Fesselballon ausbildet, zeigt Fig. 9. Die Isolation bestand in einem auf die untere Platte gelegten Stück gut abgeflammten Paraffins, auf dem das freie Ende des Kabeldrahtes befestigt war. Das Modell lud sich in diesem Falle durch natürliche Ausgleichung auf. Die dem Ballonpotential (154,8 Volt) entsprechende, indifferente Niveaufläche verläuft in etwa $^1/_4$ Höhe des eigentlichen Ballonkörpers. Auch hier zeigt sich ein höheres

1) Nach K. Kähler, Luftelektrizität (Göschen), S. 47. 1913.

Gefälle über dem Modell, jedoch beträgt es für die gleiche Strecke, die beim geerdeten Ballon angenommen wurde, nur das Doppelte des normalen Gefälles, am Ventil bedeutend weniger. In 1000 m Höhe würde die indifferente Niveaufläche infolge der größeren Kapazität des Kabels zwar noch etwas tiefer liegen und damit das Gefälle über dem Ballon relativ zum normalen



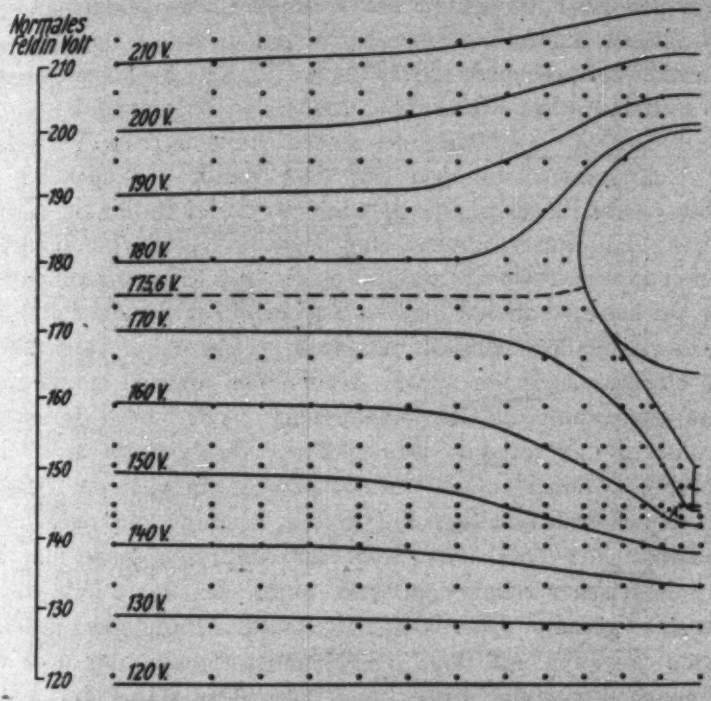
Gegen Erde isolierter Fesselballon in etwa 75 m Höhe. dV/dh = 1,54 Volt/cm. (Maßstab $^1/_4$ der Modellgröße).

Fig. 9.

noch etwas zunehmen, jedoch dürfte es das 4fache des normalen Gradienten nicht übersteigen. Bei Schönwetterlage hätten wir also 0,1 Kilovolt/m, bei Gewitterneigung 2—5 Kilovolt/m. Das sind Spannungen, die nicht entfernt die Größenordnung des Funkenpotentials erreichen.

Dagegen treten in diesem Falle an der Isolationsstelle gewaltige Potentialdifferenzen auf, da sich sämtliche Niveauflächen, die unter dem Ballonkörper liegen, durch die Isolation

hindurchdrängen. Der Gradient fällt bei normalem Wetter von etwa 100 Volt/m am Boden bis auf 25 Volt/m in 1000 m Höhe. Da der Abfall nach einer Exponentialfunktion vor sich geht, so beträgt der Mittelwert etwa 50 Volt/m. Nehmen wir eine 20 cm starke Isolierschicht an, so ist an dieser Stelle das Gefälle bei 1000 m Ballonhöhe bei normalem Wetter etwa



Modell des „Düsseldorf II" natürlich ausgeglichen.
(Maßstab $^1/_8$ der Modellgröße.)

Fig. 10.

$\frac{50}{0{,}2}$ = 250 Kilovolt/m, bei Gewitterneigung 5000—12500 Kilovolt/m. Letztere Spannungen liegen weit über dem Funkenpotential und würden unbedingt starke Entladungen zur Folge haben, damit aber eine Gefahr für die Bedienungsleute der Ballonwinde bedeuten.

Praktisch dürfte sich eine gute Isolierung von Fesselballonen mit beweglicher Winde kaum durchführen lassen.

Fig. 10 zeigt die Feldgestaltung um einen *natürlich ausgeglichenen Freiballon.* Das Modell (Durchmesser der Ballonkugel 25 cm,

Gesamthöhe 38,5 cm) wurde dem Ballon „Düsseldorf II“ (Kugeldurchmesser 16,3 m, Inhalt 2200 cbm), mit dem Wigand und Everling die zweite der in der Einleitung erwähnten Hochfahrten unternahmen, getreu im Maßstabe 1 : 65,2 nachgebildet und mit paraffinierten Seidenfäden unter Zwischenschaltung von Bernsteinstücken an der oberen Platte aufgehängt. Ballonkugel und Korb bestanden aus Weißblech, das „Leinensystem“ aus dünnen Kupferdrähten. Auch hier liegt die dem Modellpotential entsprechende Niveaufläche infolge der Unsymmetrie des Systems unter der Äquatorebene der Ballonkugel.

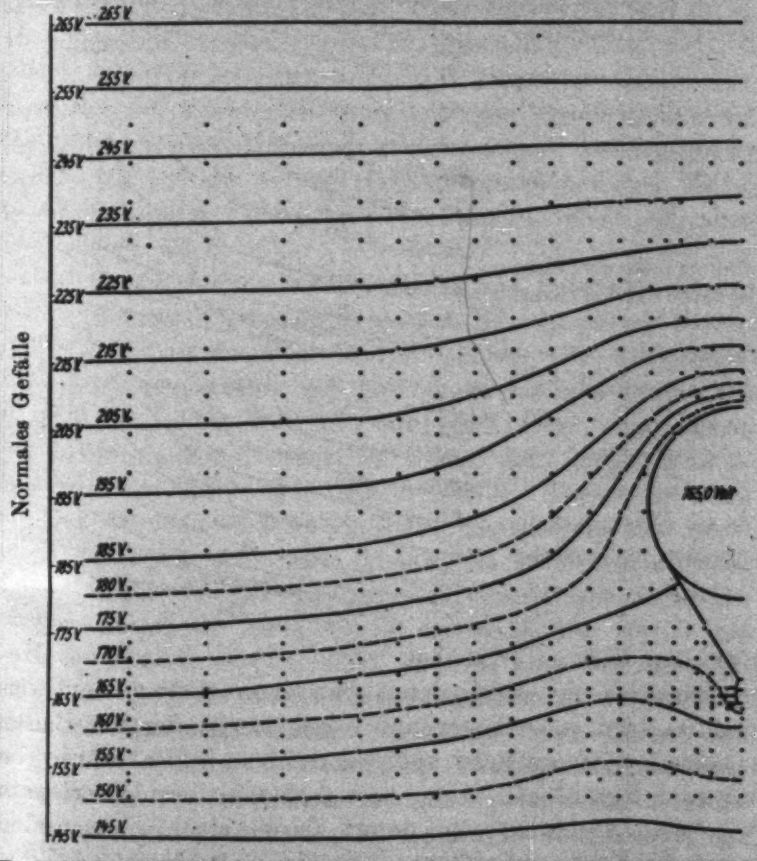
Es sei mir gestattet, an dieser Stelle auf die Verteilung der elektrischen Ladungen auf dem Ballon einzugehen. Im Felde (obere Platte positiv geladen) wird der Ballon in seinem oberen Teile durch Influenz eine negative Oberflächendichte, in seinem unteren Teile eine positive elektrische Erregung annehmen. Nur auf der unendlich schmalen Kugelzone, an der die Potentialfläche des Ballons ansetzt und zwar rechtwinklig[1]) ansetzt, ist die Oberflächendichte gleich Null. Von dieser indifferenten Zone aus nimmt die Oberflächendichte nach beiden Seiten hin absolut zu und erreicht ihre größten Absolutwerte an Stellen höchsten Potentialabfalls der Umgebung, in unserem Beispiel also am Ventil und am Korbboden. Infolge der natürlichen Ionisation der Luft tritt über der neutralen Zone dauernd ein elektrischer Strom ein und unter ihr aus. Wir dürfen also die gesamte Oberfläche als einen Ausgleicher ansehen, dessen Wirkung an den verschiedenen Stellen der dort vorhandenen Erregung proportional ist. Der dabei im Ballon fließende Strom läßt sich leicht mittels Galvanometers nachweisen, wie das Wigand im Frühjahr 1916 an isolierten Feldfesselballonen getan hat.

Steigern wir auf irgendeine Weise durch einen Ausgleichskollektor die Ausgleichswirkung eines bestimmten Oberflächenelementes z. B. am Korbboden, so tritt eine kurze Zeit lang ein stärkerer Strom aus. Dies hat notwendig eine Erniedrigung des Modellpotentials, damit ein Tieferansetzen der Ballonäquipotentialfläche am Ballon und eine Verlagerung eines Teils der bisher unter dem Ballon durchgehenden Niveauflächen über

1) Vgl. Cl. Maxwell, Vol. I. § 115.

ihn zur Folge. Steigern wir die Wirkung des Zusatzausgleichers derart, daß die natürliche Ausgleichung (Zerstreuung) durch die Ballonoberfläche nicht mehr dagegen in Frage kommt, so läßt der Ausgleicher keine Potentialdifferenz zwischen sich und der unmittelbaren Umgebung bestehen, seine Oberflächendichte wird Null, d. h. die Niveaufläche des Ballons tritt dann in den Ausgleicher ein.

Es sei jedoch nochmals betont, daß dieser Fall nur dann eintritt, wenn die natürliche Zerstreuung im Vergleich zur Wirkung des Ausgleichers verschwindend klein ist.



Freiballonmodell aufgeladen auf das Potential der im ungestörten Felde 0,4 cm unter Korbbodenhöhe gelegenen Niveaufläche.
$dV/dh = 1{,}14$ Volt/cm. (Maßstab $^1/_{10}$ der Modellgröße.)

Fig. 11.

Beispiele für die Feldgestaltung bei Aufladung von außen her sind die Figg. 11—14. Sie haben das Gemeinsame, daß die Potentialfläche des Modells im ungestörten Felde frei

Feldstörung durch das Modell des „Düsseldorf II“ ($^1/_{12}$ Modellgröße), aufgeladen auf das Potential der im ungestörten Felde:

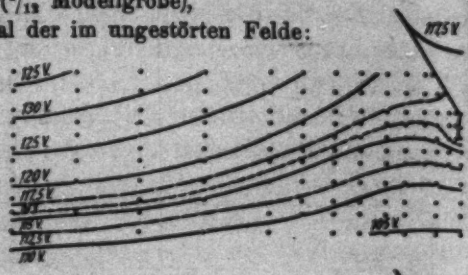


Fig. 12.

a) 12 cm unter dem Ballon liegenden Niveaufläche.

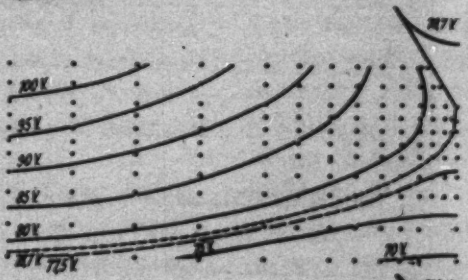


Fig. 13.

b) 20,5 cm unter dem Ballon liegenden Niveaufläche.

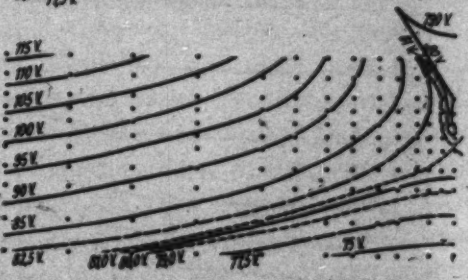


Fig. 14.

c) 30 cm unter dem Ballon liegenden Niveaufläche.

unter dem Ballon durchgehen würde. Dabei wurde das Modell künstlich mit Hilfe der Akkumulatorenbatterie auf das Potential solch einer ursprünglich ungestört unter dem Ballon verlaufenden Niveaufläche aufgeladen. Der Ballon wurde im Falle der Fig. 13 mit Hilfe einer Akkumulatorenbatterie auf 78,7 Volt aufgeladen und derart durch einen horizontalen Halter im Felde aufgehängt, daß die ungestörte 78,7 Volt-ebene 20,5 cm unter dem Modell durchgegangen wäre. Besonders von Interesse ist der Fall, in dem die Niveaufläche des Modells aus 20 cm Entfernung unter dem Ballon heraufgezogen

wird und dabei in den Korbboden eintritt (Fig. 13). Vorausnehmend sei bemerkt, daß diese Feldgestaltung identisch ist mit der durch die Wirkung eines starken Ausgleichers am Korbboden gegebenen (Fig. 15), wobei die natürliche Zerstreuung durch den Ballon relativ verschwindend ist. Infolgedessen kann man zur Vereinfachung der Meßmethode eine beabsichtigte Feldgestaltung anstatt durch Wirkung von Kollektoren durch Aufladung von außen her erreichen.

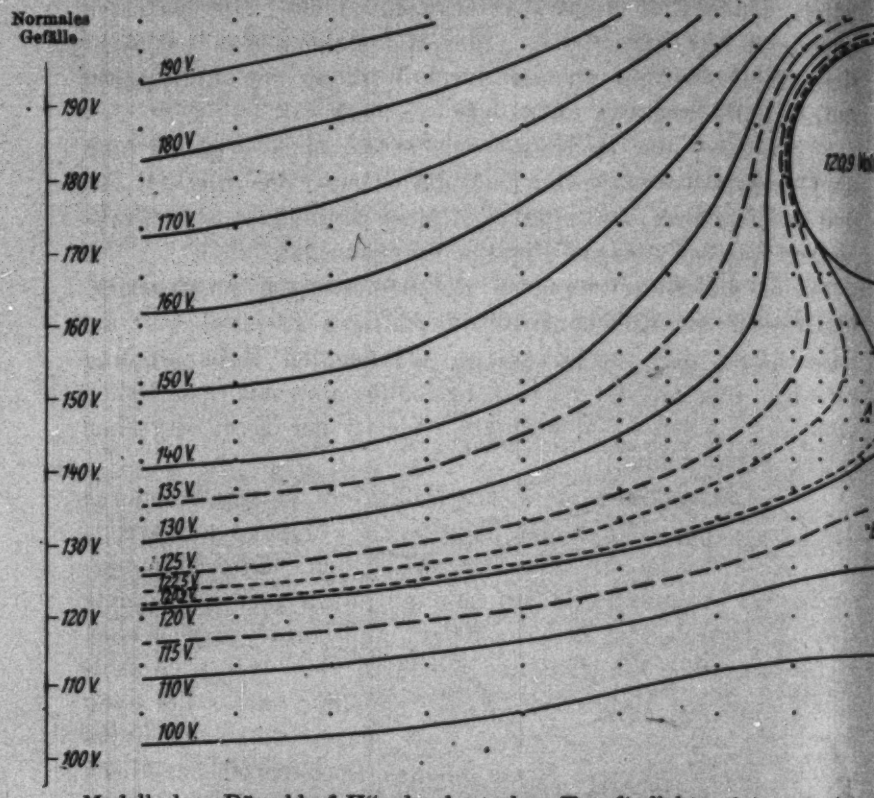
Bezüglich der Modelldimensionen sei noch erwähnt, daß die Gesamthöhen sowie der Kugeldurchmesser der Figg. 11—15 und 17 dieselben sind, daß sich aber Fig. 11 in den Korbmaßen von den übrigen Figuren unterscheidet.

Um die Everlingschen Relativmessungen auszuwerten, brachte ich am Korbboden einen kräftigen Tropfkollektor an. Hinsichtlich der von Everling gebrauchten Meßanordnung verweise ich auf die bei der Freiballonfahrt mit dem Ballon „Barbara" (Kapitel VI) benützte. Sie ist der Everlingschen getreu nachgebildet.

Die Verwendung eines Tropfkollektors entspricht einmal der Ausgleichung durch den Tropfsack Everlings am besten, und ferner ist es vor allen Dingen möglich, die Auflösungsstelle des Wasserstrahls auf mm genau in jede gewünschte Höhe zu legen. Nach der von Ebert und Lutz[1]) angegebenen Methode wurde die Ballonkugel durch den hohlen Modellhalter etwa zur Hälfte mit Wasser gefüllt. Dieses lief dann durch ein dünnes, senkrechtes Rohr, das in Höhe des Korbbodens durch ein mit einem kleinen Loch versehenes Blech geschlossen war. In dieses Loch war ein feiner Draht eingeführt, von dessen unterem Ende etwa 4 mm unter dem Korbe das Wasser in kleinen Tropfen abfiel. Da die Lage des Referenzpunktes infolge der vorstehend geschilderten Abtropfvorrichtung vom Druck des Wassers unabhängig war, konnte ich von der Verwendung eines ständig Wasser nachliefernden, außerhalb des Feldes stehenden Gefäßes (vgl. Ebert und Lutz)[1]) absehen, so daß nur die Kapazität des Ballons und des Halters durch den Ausgleicher aufzuladen war; die praktische Ladungsdauer betrug 1,5—2 Minuten.

1) H. Ebert u. W. Lutz a. a. O. S. 195.

Fig. 15 zeigt den Feldverlauf des durch den Tropfkollektor am Korbboden ausgeglichenen Ballons. Ein Vergleich mit Fig. 13 ergibt die völlige Identität beider Feldbilder und damit die Tatsache, daß die Feldstörung eines Modells ausschließlich von



Modell des „Düsseldorf II", durch starken Tropfkollektor 0,4 cm unter Korbboden vollkommen ausgeglichen.
dV/dh = 1,33 Volt/cm. (Maßstab $^1/_8$ Modellgröße.)

Fig. 15.

seinem Potential abhängig ist gleichgültig, in welcher Weise die Aufladung auf dieses Potential erfolgt. Vorausgesetzt ist hierbei, daß nicht ionisierende Ausgleicher, z. B. Radiumkollektoren, zur Aufladung verwandt werden, da die Ionen dann noch sekundär die Feldverteilung beeinflussen. Wie zu erwarten war, zeigt Fig. 15 in der Nähe des Ausgleichers ein sehr schwaches Feld und eine starke Auflockerung der Niveauflächen unter dem Korbe. Für Gefällemessungen in unmittel-

barer Nähe des Korbes ist daher die Methode der Ausgleichung am Korbe oder dicht darunter ungünstig. Um so vorteilhafter ist sie für Messungen der Leitfähigkeit, Beweglichkeit und Ionendichte der Luft, da hier ein starkes Feld auf Ionen verschiedenen Vorzeichens ungleich wirken und damit besondere Reduktionen bedingen würde. Da das Gefälle etwa 30 m unter dem Ballon wieder normal ist, genügt es zu Absolutmessungen mit 2 Meßkollektoren, diese in gewissem Abstande voneinander etwa 30 m aus dem Korbe herabzulassen. Ebenso ist für Ausgleichung am Korbe die Everlingsche Relativmethode mit nur einem Meßkollektor anwendbar (vgl. Einleitung); nur muß die Meßsonde genügend tief unter dem Ballon angebracht werden, damit der Potentialunterschied zwischen ausgeglichenem Ballon und Meßsonde meßbare Werte erreicht.

V. Nachprüfung der Ergebnisse bei einer Freiballonfahrt.

Durch Unterstützung aus der „Aerophysikalischen Stiftung Halle" wurde mir die Nachprüfung meiner Ergebnisse gelegentlich der Fahrt mit dem von der Luftfahrzeug G. m. b. H. überlassenen Ballon „Barbara" (Inhalt 900 m³) am 18. Dezember 1919 ermöglicht, bei der die Herren Prof. Dr. Wigand und cand. phys. Koppe neben der Führung und eingehenden, meteorologischen Beobachtungen Leitfähigkeitsbestimmungen und Messungen mit 2 Ebertschen Ionenzählern anstellten, während ich selbst Potentialgefällemessungen vornahm.

Hinsichtlich der *Versuchsanordnung* hielt ich mich streng an die von Everling[1]) gemachten Angaben. Der gesamte Ballon, einschließlich Leinensystem und Korb, wurde durch Umspannen mit dünnem Eisendraht zu einem eindeutigen Leiter gemacht. Mit diesem Draht verbunden wurde der Ausgleicher des Ballons, nämlich das metallische Ausflußrohr *a* (Fig. 16) des schon von Everling benutzten Tropfsacks, der zur Vermeidung des Gefrierens der Füllung eine gesättigte

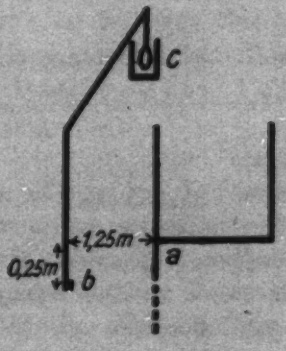


Fig. 16.

1) E. Everling, a. a. O.

Chlorkalziumlösung enthielt. Der Sack wurde so angebracht, daß der Referenzpunkt 25 cm unter einer Korbecke lag. In der Mitte einer Längsebene des Korbes hing isoliert das spannungmessende Instrument *c*, ein Wulfsches 2-Fadenelektrometer geringer Empfindlichkeit. Die Fäden waren dauernd durch einen isoliert geführten Draht, der das Ballonfeld nicht in meßbarer Weise stört, mit einem Meßkollektor *b* verbunden, der in 1,25 m Entfernung von der erwähnten Korbecke in gleicher Höhe mit dem Referenzpunkt des Tropfsacks lag. Als Meßsonde diente zunächst ein Spritzkollektor[1]) Lutzescher Konstruktion mit kombinierter Druck- und Saugwirkung (Zerstäuber), dessen Aufladezeit 3 Sekunden beträgt. Es wurde nach einigen Messungen durch eine starke Poloniumsonde ersetzt, um deren Wirkung in der freien Atmosphäre vergleichend festzustellen. Vorausnehmend bemerke ich, daß sie im Mittel die gleiche Potentialdifferenz anzeigte wie der Spritzkollektor.

Während der Versuchsreihe fuhr der Ballon dauernd, von geringen Schwankungen abgesehen, in derselben Höhe von rund 3 km etwa 100—200 m über einer dichten, zusammenhängenden Wolkendecke. Wir werden deshalb auch ziemlich übereinstimmende Werte erwarten dürfen. Nachstehend gebe ich das Protokoll meiner Messungen.

I. Das Elektrometergehäuse wurde mit dem Korbe leitend verbunden.

a) Als Meßsonde diente der Spritzkollektor.

Zeit h m	Relativer Abfall auf 1,25 m: Einzelwerte in Skalenteilen	Einzelwerte in Volt	Mittelwert	Höhe, km: Einzelwerte	Mittelwert
1 42	15,8	44,5	45,1	2,84	2,84
1 43	16,0	45,7		2,84	
1 52	15,8	44,5	44,8	3,04	3,02
1 56	15,7	44,0		3,00	

1) Näheres vgl. G. Lutze, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Ges. 15. S. 1101. 1913.

b) Der Spritzkollektor wurde durch ein Poloniumpräparat ersetzt.

Zeit h m	Relativer Abfall auf 1,25 m: Einzelwerte in Skalenteilen	Volt	Mittelwert	Höhe, km: Einzelwerte	Mittelwert
2 04	16,0	45,7		2,98	
2 06	15,3	41,6	44,4	2,98	2,98
2 07	15,8	44,5		2,98	
2 10	16,0	45,7		2,96	

Das Gesamtmittel der Versuchsreihe I ergab sich zu 44,5 Volt in 2,95 km Höhe.

II. Als Meßkollektor diente weiter die Poloniumsonde. Die Verbindung zwischen Elektrometergehäuse und Korb wurde aufgehoben, dafür das Gehäuse durch einen isoliert geführten Draht mit einem zweiten, ebenfalls als Meßkollektor dienenden Poloniumpräparat verbunden, das 5,45 m unter dem Korbboden hing. Es erfolgte nur eine Ablesung etwa um $2^h\ 20^m$, die 17,0 Skalenteile = 51,4 Volt ergab. Die gleichzeitige Ballonhöhe war 2,85 km.

Die verhältnismäßig geringe Zahl der Einzelbeobachtungen erklärt sich aus der kurzen Zeit, die für Messungen in ein und derselben Höhe zur Verfügung stand.

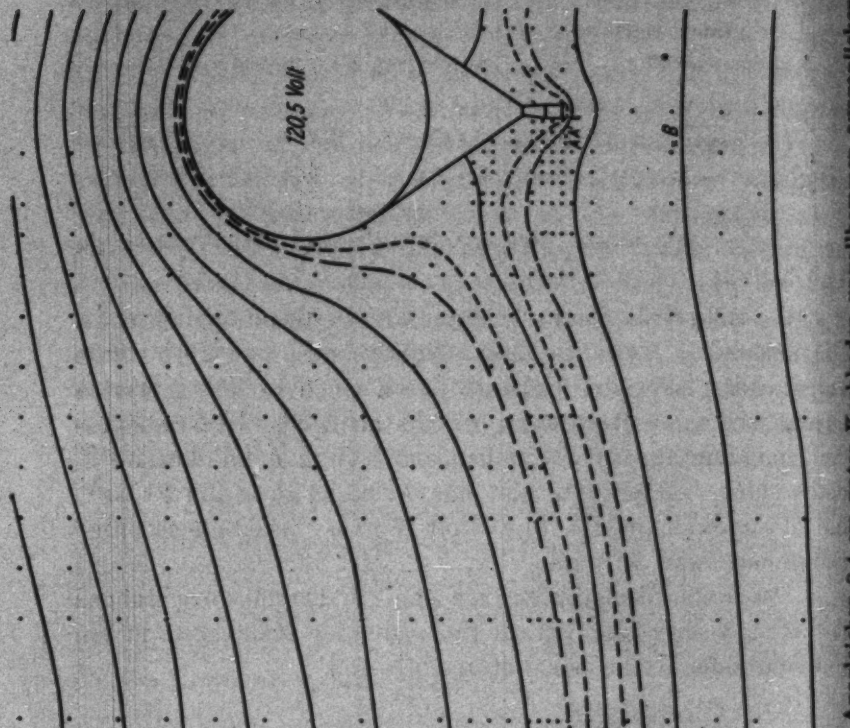
Diskussion der Beobachtungen.

Der Vergleich der beiden Mittelwerte der Tab. Ia zeigt das Schwanken der relativen Gefällewerte im richtigen Sinne, d. h. größeren Höhen entsprechen kleinere Gradienten. Das Gleiche gilt für die Gesamtmittel der Tabellen Ia (44,7 Volt in 2,93 km) und Ib (44,4 Volt in 2,98 km).

Vergleichen wir weiter die im Ballon gefundenen Werte mit den entsprechenden, am Modell des „Düsseldorf II“ nach Fig. 15 im künstlichen Felde beobachteten, so verhalten sich am Modell die zur Versuchsreihe I und II gehörigen Potentialdifferenzen zueinander wie: Punkt *A* gegen Ballon : Punkt *B* gegen *A* = 0,3 : 7,7 = 1 : 26, während die im Freiballon gemessenen Potentialdifferenzen I und II im Verhältnis: 44,5:51,4 = 1:1,15 stehen.

Dieser Unterschied zwischen der Messung im Freiballon

und der im künstlichen Felde kann seine Ursache nur darin haben, daß die Feldgestaltung bei der Freiballonfahrt grundverschieden von der der Fig. 15 war. Da nun an der Gültig-



keit des Prinzips der elektrischen Ähnlichkeit nicht zu zweifeln ist, kann die Unstimmigkeit nur durch ungenügende Ausgleichswirkung des Tropfsacks erklärt werden. Wir hatten

früher betont, daß die Feldverteilung der Fig. 15, insbesondere das Eintreten der Ballonniveaufläche in den Ausgleicher nur dann zustande kommt, wenn die natürliche Zerstreuung der Ballonoberfläche gegen die Wirkung des Zusatzausgleichers verschwindet. Bei unserer Fahrt mit „Barbara“ traf das nun zweifellos nicht zu. Infolgedessen muß die Niveaufläche in diesem Fall höher am Ballon ansetzen.

Ein ungefähres Bild davon, wie die Feldverteilung um die „Barbara“ tatsächlich war, gibt Fig. 17. Bei der Aufnahme dieses Diagramms tropfte der Ausgleicher weniger kräftig als bei Fig. 15; durch Steigerung der Tropfstärke konnte das Feldbild von Fig. 17 in das der Fig. 15 übergeführt werden. Bei Fig. 17 entspricht Punkt *A* dem Ort der Meßsonde bei der Versuchsreihe I im Abstande 1,25 m vom Ballon mit dem Durchmesser 12 m, Punkt *B* dem Ort des 5,45 m herabgelassenen Radiumpräparats der Versuchsreihe II. Es ergibt sich das Verhältnis von *A* gegen den Ballon zu *B* gegen *A* wie: $(120{,}5-112{,}0) : (112{,}0-102{,}5) = 8{,}5 : 9{,}5 = 1 : 1{,}12$, also fast das gleiche wie I : II (im Freiballon) = 1 : 1,15 (siehe oben); der Unterschied liegt innerhalb der Meßgenauigkeit. Fig. 17 stellt also die Verhältnisse bei der Ballonfahrt befriedigend dar und kann daher zur Absolutreduktion der gemessenen Potentialdifferenzen verwandt werden.

Der Absolutwert des Gefälles. Nach der Definition von Ebert und Lutz[1]) ist „der Reduktionsfaktor *R* die Zahl, mit der man das scheinbare, direkt in der Nähe des Ballons gemessene, aber eben darum nicht richtige Gefälle zu multiplizieren hat, um das wahre Gefälle zu erhalten“.

Für den durch ein Kreuz gekennzeichneten Punkt *A* der Fig. 17 ergibt sich gegen den Ballon die Potentialdifferenz: 120,5—112,0 = 8,5 Volt. Der Abstand des Punktes *A* vom Referenzpunkt des Modellausgleichers ist 2,6 cm. Da der normale Spannungsabfall für die gleiche Strecke 3,72 Volt beträgt, bestimmt sich der Reduktionsfaktor zu $\frac{3{,}72}{8{,}5} = 0{,}44$. — Danach ergibt sich das absolute Gefälle, gemessen in 2950 m

1) H. Ebert u. W. Lutz a. a. O. S. 184.

Höhe in „Barbara“, zu:

$$\frac{dV}{dh} = 44{,}5 \cdot 0{,}44 \text{ Volt}/1{,}25 \text{ m} = 15{,}7 \text{ Volt/m}.$$

Dieser Wert wird etwas von dem wirklichen abweichen, da die Maße der „Barbara“ (Kugeldurchmesser: Gesamthöhe = 12,4 : 20,3) etwas von denen der Fig. 17 zugrunde liegenden des „Düsseldorf II“ (12,4 : 19,2) verschieden sind. Die gleichzeitigen Potsdamer Bodenmessungen des Meteorologischen Observatoriums gaben folgende Gradienten:

Zeit	11—12^h	12—1^h	1—2^h	2—3^h
Volt/m	46	60	167	111

Der Ballon befand sich während dieser Zeit zwischen Bitterfeld und Görlitz. Der gefundene Wert stimmt gut mit dem bei früheren Messungen ermittelten überein.

Wetterlage während der Fahrt: Vorderseite eines schnell von NW heranziehenden Tiefs.

VI. Bestimmung des Everlingschen Reduktionsfaktors.

Nach den vorstehenden Überlegungen fiel ebenso wie bei der Fahrt mit der „Barbara“ auch bei der Everlingschen Hochfahrt die natürliche Zerstreuung durch die Ballonoberfläche noch stark gegenüber der Wirkung des Korbausgleichers ins Gewicht. Die Fig. 15 kann daher für die Bestimmung des Everlingschen Reduktionsfaktors nicht in Frage kommen. Ebenso dürfen wir Fig. 17 nicht zugrunde legen, da diese nur für eine ganz bestimmte Zerstreuung der Ballonoberfläche gilt, diese aber von der Leitfähigkeit der Luft abhängt. Da nun nach Messungen von Wigand[1]) die Leitfähigkeit mit der Höhe stark zunimmt, so daß sie in 9 km das mindestens 40fache derjenigen am Erdboden beträgt, so wird die Wirkung des Ausgleichers mit zunehmender Höhe immer mehr gegen die natürliche Zerstreuung zurücktreten und in großen Höhen vielleicht sogar gegen diese verschwinden. Gleichbedeutend damit ist ein Höheransetzen der Niveaufläche des Ballons und eine Abnahme des Reduktionsfaktors mit zunehmender Höhe. Wir können daher nur die beiderseitigen Grenzen angeben, innerhalb deren der Everlingsche Reduktionsfaktor liegen wird.

1) A. Wigand, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Ges. 16. S. 232. 1914.

Die untere Grenze für R' ist uns gegeben für große Zerstreuung, der gegenüber die Ausgleicherwirkung Null ist, d. h. die rein natürliche Ausgleichung des Ballons nach Fig. 10. Der Punkt A' entspricht dem Ort des Everlingschen Meßkollektors in 1,25 m Abstand vom Ballon mit dem Durchmesser 16,3 m. Der Potentialunterschied von A' gegen den Ballon ist: (175,6 — 163,2) = 12,4 V.; der normale Abfall für die gleiche Strecke von 1,9 cm ist 2,7 V., daraus ergibt sich $R_1' = \frac{2,7}{12,4} = 0,22$.

Die obere Grenze gibt uns einen Vergleich mit der Feldgestaltung um die „Barbara" nach Fig. 17. Für den größeren Durchmesser des „Düsseldorf II" (16,3 m) entspricht dem Ort des Meßkollektors im Abstand 1,25 m vom Ballon jetzt der Punkt A' mit dem Abstand 1,9 cm (bei „Barbara" 2,6 cm). Der Potentialunterschied von A' gegen das Modell ist nach Fig. 17: 120,5 — 112,4 = 8,1 Volt., der normale Abfall für 1,9 cm beträgt 2,7 Volt. Daraus ergibt sich der Reduktionsfaktor zu $R_2' = \frac{2,7}{8,1} = 0,33$. Daß R_2' wirklich die äußerste obere Grenze des Everlingschen Reduktionsfaktors darstellt, zeigen folgende Überlegungen.

Da die Kugeloberfläche des „Düsseldorf II" fast doppelt (1,8 : 1) so groß ist wie die der „Barbara" und damit die natürliche Zerstreuung im Verhältnis zur Ausgleicherwirkung wesentlich größer wird, so wird die Ausgleichsfläche des Ballons am „Düsseldorf II" höher ansetzen und der Reduktionsfaktor kleiner werden als bei der „Barbara".

Ferner war nach einer persönlichen Mitteilung von Hrn. Dr. Everling die Tropfenzahl des Ausgleichers pro Minute bei seiner Hochfahrt erheblich geringer als bei meiner Fahrt mit der „Barbara", was ebenfalls in der Richtung einer Verkleinerung des Reduktionsfaktors wirkte.

Aus diesen Gründen liegt das für Everlings Hochfahrt maßgebliche Feldbild zwischen der Fig. 10 und der Fig. 17, entsprechend der Everlingsche Reduktionsfaktor zwischen 0,33 und 0,22 (siehe oben). Letzterer Wert wird dem für große Höhen (über 6 km) gültigen sehr nahe kommen.

Die von Everling[1]) angegebenen Potentialdifferenzen sind

1) E. Everling, a. a. O.

die Originalablesungen selbst, beziehen sich mithin auf 1,25 m Entfernung vom Korbe. Der von Everling mit R bezeichnete Reduktionsfaktor ist demnach $R = \frac{1}{4} R'$. Seine Angaben sind also mit $0{,}26 > R > 0{,}18$ zu multiplizieren, um das absolute Gefälle in Volt/m zu erhalten. Dann ergeben sich für den für große Höhen wahrscheinlichen Faktor $R = 0{,}18$ folgende Gradienten:

Seehöhe (Mittel) km	Relativer Abfall V/1,25 m (Mittel) V/1,25 m	Absolutwert des Gradienten für $R = 0{,}18$ V/m
3,54	94	17,0
6,30	37	6,7
8,61	36	6,5
8,80	32	5,8
8,93	30	5,4
8,97	22	4,0
8,87	30	5,4

Da für große Höhen die Ausgleicherwirkung kaum gegen die natürliche Zerstreuung in Frage kommt, darf man 4 V/m wohl als guten Näherungswert des Gradienten in 9 km Höhe annehmen.

VII. Kritik des Einkollektormeßverfahrens nach Everling.

Die Unsicherheit der bei Everlings Hochfahrt gefundenen Gradienten könnte sein Einkollektormeßverfahren für exakte Messungen als unbrauchbar erscheinen lassen. Tatsächlich ist die erhaltene Ungenauigkeit nur auf unzureichende Versuchsbedingungen zurückzuführen. Die Hauptursache des teilweisen Mißerfolges der Hochfahrt ist die starke Zerstreuung durch die Ballonoberfläche, die damals in ihrer Bedeutung unbekannt war oder doch unterschätzt wurde. Auf Grund des vorliegenden Versuchsmaterials läßt sich diese Fehlerquelle beheben durch Verwendung eines sehr starken Ausgleichers und — nach einem neuerlichen Vorschlage von Everling, der sich übrigens mit dem Linkeschen[1]) bei der Zweikollektormethode deckt — durch Anbringung des Ausgleichers an der Stelle, an der die

1) F. Linke, Luftelektr. Messungen bei 12 Ballonfahrten. Abhdl. d. Gött. Ges. d. Wiss. Math.-phys. Kl. III. 5. S. 22. 1904.

neutrale Niveaufläche bei natürlicher Ausgleichung ansetzt (Fig. 10). Damit wird der Zustand, der sich ohnehin durch die Eigenzerstreuung des Ballons herausbildet, eindeutig festgelegt.

Nachdem so die Brauchbarkeit des Everlingschen Verfahrens erwiesen ist, liegen die Vorteile für die praktische Verwendung im Luftfahrzeug auf der Hand. Was Vereinfachung der Apparatur im engen Korbe bedeutet, weiß jeder Freiballonfahrer zu würdigen, umsomehr, wenn er sich bei Hochfahrten des Atmungsgeräts bedient hat.

VIII. Zusammenfassung.

1. Die Feldgestaltung in der Umgebung eines Zeppelinluftschiffes, eines Flugzeuges, eines Fessel- und Freiballons wurde experimentell an Modellen im künstlichen, elektrostatischen Felde bestimmt. Die Modellmessungen wurden bei einer Freiballonfahrt nachgeprüft.

2. Der störende Einfluß geringer Luftströmungen auf die Feldgestaltung wurde auf geladene, in der Luft suspendierte Teilchen zurückgeführt.

3. Die natürliche Zerstreuung der Ballonoberfläche hat bei nicht sehr starken Ausgleichern großen Einfluß auf die Feldgestaltung. Dieses Ergebnis der Feldmessungen wurde im Freiballon bestätigt.

4. Die Feldverteilung um ein Modell hängt außer von seiner Gestalt nur von seinem Potential ab, gleichgültig auf welche Weise die Aufladung erfolgt ist. Vorausgesetzt ist hierbei, daß keine ionisierenden Ausgleicher verwandt werden.

5. Durch Ermittlung des Reduktionsfaktors für die Everlingschen Relativwerte des Spannungsabfalls ergaben sich angenähert die Absolutwerte des Gradienten für verschiedene Höhen bis 9 km. Das Gefälle beträgt in 9 km Höhe etwa 4 V/m.

6. Das Einkollektormeßverfahren nach Everling ist bei geeigneter Stärke und Anordnung des Ausgleichers für Messungen oder Registrierungen im Luftfahrzeug durchaus geeignet.

Die vorliegende Arbeit wurde von Mitte Sommersemester 1914 bis Ende Juli 1914 und von Mitte Januar 1919 bis Ende

die Originalablesungen selbst, beziehen sich mithin auf 1,25 m Entfernung vom Korbe. Der von Everling mit R bezeichnete Reduktionsfaktor ist demnach $R = \frac{1}{8} R'$. Seine Angaben sind also mit $0{,}26 > R > 0{,}18$ zu multiplizieren, um das absolute Gefälle in Volt/m zu erhalten. Dann ergeben sich für den für große Höhen wahrscheinlichen Faktor $R = 0{,}18$ folgende Gradienten:

Seehöhe (Mittel) km	Relativer Abfall V/1,25 m (Mittel) V/1,25 m	Absolutwert des Gradienten für $R = 0{,}18$ V/m
3,54	94	17,0
6,30	37	6,7
8,61	36	6,5
8,80	32	5,8
8,93	30	5,4
8,97	22	4,0
8,87	30	5,4

Da für große Höhen die Ausgleicherwirkung kaum gegen die natürliche Zerstreuung in Frage kommt, darf man 4 V/m wohl als guten Näherungswert des Gradienten in 9 km Höhe annehmen.

VII. Kritik des Einkollektormeßverfahrens nach Everling.

Die Unsicherheit der bei Everlings Hochfahrt gefundenen Gradienten könnte sein Einkollektormeßverfahren für exakte Messungen als unbrauchbar erscheinen lassen. Tatsächlich ist die erhaltene Ungenauigkeit nur auf unzureichende Versuchsbedingungen zurückzuführen. Die Hauptursache des teilweisen Mißerfolges der Hochfahrt ist die starke Zerstreuung durch die Ballonoberfläche, die damals in ihrer Bedeutung unbekannt war oder doch unterschätzt wurde. Auf Grund des vorliegenden Versuchsmaterials läßt sich diese Fehlerquelle beheben durch Verwendung eines sehr starken Ausgleichers und — nach einem neuerlichen Vorschlage von Everling, der sich übrigens mit dem Linkeschen[1]) bei der Zweikollektormethode deckt — durch Anbringung des Ausgleichers an der Stelle, an der die

1) F. Linke, Luftelektr. Messungen bei 12 Ballonfahrten. Abhdl. d. Gött. Ges. d. Wiss. Math.-phys. Kl. III. 5. S. 22. 1904.

neutrale Niveaufläche bei natürlicher Ausgleichung ansetzt (Fig. 10). Damit wird der Zustand, der sich ohnehin durch die Eigenzerstreuung des Ballons herausbildet, eindeutig festgelegt.

Nachdem so die Brauchbarkeit des Everlingschen Verfahrens erwiesen ist, liegen die Vorteile für die praktische Verwendung im Luftfahrzeug auf der Hand. Was Vereinfachung der Apparatur im engen Korbe bedeutet, weiß jeder Freiballonfahrer zu würdigen, umsomehr, wenn er sich bei Hochfahrten des Atmungsgeräts bedient hat.

VIII. Zusammenfassung.

1. Die Feldgestaltung in der Umgebung eines Zeppelinluftschiffes, eines Flugzeuges, eines Fessel- und Freiballons wurde experimentell an Modellen im künstlichen, elektrostatischen Felde bestimmt. Die Modellmessungen wurden bei einer Freiballonfahrt nachgeprüft.

2. Der störende Einfluß geringer Luftströmungen auf die Feldgestaltung wurde auf geladene, in der Luft suspendierte Teilchen zurückgeführt.

3. Die natürliche Zerstreuung der Ballonoberfläche hat bei nicht sehr starken Ausgleichern großen Einfluß auf die Feldgestaltung. Dieses Ergebnis der Feldmessungen wurde im Freiballon bestätigt.

4. Die Feldverteilung um ein Modell hängt außer von seiner Gestalt nur von seinem Potential ab, gleichgültig auf welche Weise die Aufladung erfolgt ist. Vorausgesetzt ist hierbei, daß keine ionisierenden Ausgleicher verwandt werden.

5. Durch Ermittlung des Reduktionsfaktors für die Everlingschen Relativwerte des Spannungsabfalls ergaben sich angenähert die Absolutwerte des Gradienten für verschiedene Höhen bis 9 km. Das Gefälle beträgt in 9 km Höhe etwa 4 V/m.

6. Das Einkollektormeßverfahren nach Everling ist bei geeigneter Stärke und Anordnung des Ausgleichers für Messungen oder Registrierungen im Luftfahrzeug durchaus geeignet.

Die vorliegende Arbeit wurde von Mitte Sommersemester 1914 bis Ende Juli 1914 und von Mitte Januar 1919 bis Ende

April 1920 im Physikalischen Institut der Universität Halle angefertigt.

Den Herren Geh. Regierungsrat Prof. Dr. Mie und Prof. Dr. Schmidt bin ich für die freundliche Überlassung der Apparatur und der benötigten Hilfsmittel sowie für mannigfache Anregungen zu großem Danke verpflichtet. Ebenso bin ich den Herren Dr. Everling (Privatdozent an der Technischen Hochschule Berlin) und Prof. Dr. Herweg für wertvolle Ratschläge und Fingerzeige sehr verbunden.

Zum Schluß ist es mir ein besonderes Bedürfnis, Hrn. Prof. Dr. Wigand, der mir das Thema der Arbeit stellte und ihre Durchführung leitete, sowie mir die Teilnahme an der Freiballonfahrt „Barbara“ ermöglichte, auch an dieser Stelle für die vielseitigen Anregungen und für die freundliche Unterstützung bei meiner Arbeit meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

(Eingegangen 8. Juli 1920.)

2. *Über eine durch ein isotropes System von spiralförmigen Resonatoren erzeugte Rotationspolarisation der elektromagnetischen Wellen; von Karl F. Lindman.*

Einleitung.

Auf der Grundlage der Maxwell-Lorentzschen Elektrodynamik ist es bekanntlich Drude[1]) gelungen, eine mathematische Theorie für das optische Drehungsvermögen der natürlich-aktiven Substanzen zu entwickeln, deren Folgerungen mit der Erfahrung übereinstimmen. Aus den von ihm aufgestellten Differentialgleichungen folgt, daß eine in eine planparallele aktive Schicht senkrecht einfallende Welle sich in zwei zirkulär polarisierte Wellen von verschiedener Fortpflanzungsgeschwindigkeit teilt, durch deren Superposition eine geradlinig polarisierte Welle wieder entsteht (vorausgesetzt, daß die Absorption vernachlässigt werden kann), deren Polarisationsebene sich innerhalb der aktiven Schicht um einen Winkel dreht, welcher der Schichtdicke proportional ist und für eine Schicht von der Dicke 1 angegeben wird durch den Ausdruck

$$(1) \qquad q = \sum \frac{k_h}{\lambda^2 - \lambda_h^2} .$$

Es bezeichnen hier λ die Wellenlänge des Lichtes im Vakuum, λ_h die den Eigenschwingungen einer gewissen Elektronengruppe entsprechende Wellenlänge und k_h eine von dieser Elektronengruppe und der betreffenden aktiven Substanz abhängige Konstante.[2]) Obwohl die Gültigkeit dieser Formel voraussetzt,

1) P. Drude, Physik des Äthers, S. 535. 1894; Lehrbuch der Optik, S. 368. 1900; Winkelmanns Handbuch d. Physik, VI. S. 1334. 1906.

2) Der Ausdruck (1) folgt aus zwei von Drude aufgestellten Formeln (den Formeln (6) und (19) in Drudes Lehrb. d. Optik, S. 371 und 374. 1900), wenn die in ihnen vorkommenden Schwingungszeiten t und t_h durch die entsprechenden Wellenlängen λ und λ_h ersetzt werden.

daß λ nicht allzunahe mit λ_h übereinstimmt, ist es ersichtlich, daß die Perioden derjenigen Lichtsorten, für welche φ seine größten Werte hat, in der Nähe der Eigenschwingungsperioden der erwähnten Elektronengruppen liegen müssen, daß also die größten Drehungen in dem Absorptionsstreifen des Spektrums liegen müssen und daß φ sein Vorzeichen im allgemeinen wechseln muß, wenn man die Mitte eines Absorptionsstreifens passiert (alle Elektronengruppen, welche Absorption verursachen, brauchen jedoch nicht zu der Rotation beizutragen). In solchen Gebieten, wo eine merkliche Absorption vorkommt, kann aber das aus der aktiven Schicht heraustretende Licht nur dann geradlinig polarisiert sein, wenn die beiden entgegengesetzt zirkularpolarisierten Wellenbewegungen, in welche die einfallende geradlinig polarisierte Welle zerfällt, gleich stark absorbiert werden; sonst muß die resultierende Welle elliptisch polarisiert sein, wobei, falls die Absorption nicht allzu groß ist, die größere Achse der Schwingungsellipse dieselbe Stellung hat wie die lineare Schwingungsbahn beim Nichtvorhandensein der Absorption.[1]) Je nach den Werten der Größen k_h, die von einem in den Grundgleichungen vorkommenden Faktor abhängig sind, kann die Drehung bei unveränderten Werten von λ und λ_h entweder in der einen oder der anderen Richtung erfolgen (rechts- bzw. linksdrehende Substanzen). Die Drehung wird dabei als *positiv* betrachtet, falls sie für ein gegen die Fortpflanzungsrichtung der Strahlen blickendes Auge in der der Uhrzeigerdrehung entgegengesetzten Richtung geschieht. Wenn die Wellenlängen λ_h klein gegen λ sind („ultraviolette Elektronen"), können sie vernachlässigt werden und man hat dann approximativ $\varphi = k'/\lambda^2$, welche Formel mit dem empirischen Biotschen Gesetz identisch ist (die beobachteten Ab-

1) Eine Umwandlung geradlinig polarisierten Lichtes in elliptisch polarisiertes hat Cotton (Compt. rend. 120. S. 989 und 1044. 1895), beobachtet bei Lösungen von Kupfer- und Chromtartrat in Kalilauge. Die Elliptizität (das Verhältnis der kleineren Ellipsenachse zu der größeren) war am größten in dem Teil des Spektrums, wo die Absorption am größten war. In der Umgebung eines solchen Absorptionsstreifens war die Rotationsdispersion anomal, indem die Drehung entweder entgegengesetzte Vorzeichen an den beiden Seiten des Absorptionsstreifens oder einen hohen positiven Wert an der einen Seite und einen kleinen Wert mit demselben Vorzeichen an der anderen hatte.

weichungen von diesem Gesetz hat man in exakte Übereinstimmung mit dem vollständigen Ausdruck für φ bringen können). Für Wellen von der Größenordnung der Hertzschen Wellen kann nach demselben Gesetz keine merkbare (von optisch aktiven Substanzen erzeugte) Drehung der Polarisationsebene erwartet werden, welche Schlußfolgerung die Erfahrung auch bestätigt hat.[1])

Die Drudesche Theorie der Rotationspolarisation geht von der Voraussetzung aus, daß die aktiven Substanzen eine dissymmetrische Konstitution und demnach keine optische Symmetrieebene haben (wenn sie eine Symmetrieebene hätten, würde nämlich, falls die Polarisationsebene des Lichtes damit zusammenfiele, keine Drehung der Polarisationsebene vorkommen können). Es ist für die Theorie gleichgültig, durch welche spezielle Anordnung der Moleküle (der Atome oder der Elektronen) oder durch welche Gesetze für die Molekularkräfte die Dissymmetrie erzeugt wird. Durch die Annahme, daß die speziellen optischen Eigenschaften der aktiven Substanzen ausschließlich durch eine Modifikation der Bewegungsgesetze der Elektronen bedingt sind, gewinnt Drude dann ein System von Differentialgleichungen, welche seine Theorie enthalten, und welche sich von den gewöhnlichen Bewegungsgleichungen der Elektronen nur dadurch unterscheiden, daß sie, außer der elektrischen Kraft selbst, die Differentialquotienten erster Ordnung von dieser Kraft nach den Raumkoordinaten enthalten. Obwohl die Theorie also im wesentlichen einen phänomenologischen Charakter hat, indem sie sich auf keine spezielle Vorstellung von der Ursache zu dem Auftreten der erwähnten Differentialquotien in den Lichtbewegungsgleichungen stützt, erlaubt sie indessen, wenigstens in einem gewissen Grade, eine physikalische Interpretierung, wie auch schon Drude hervorgehoben hat. Die in den Differentialgleichungen vorkommenden Ausdrücke für die Kraftkomponenten stellen nämlich wirbelförmig verteilte Kräfte dar, und die Wirkung der resultierenden Kraft kann in der Tat, wie Drude gezeigt hat, durch die Annahme versinnlicht werden, daß die Bahnen, in welchen die Elektronen sich unter Ein-

1) A. Righi, Die Optik d. elektr. Schwingungen, S. 197. 1898.

wirkung der asymmetrischen Molekularstruktur bewegen, nicht kurze gerade Linien sind, sondern kurze, gleichsinnig gewundene Schraubenlinien oder Spiralen, deren Achsen in einem isotropen Medium regellos verschieden gerichtet sind. Falls nur Elektronen von einer einzigen Schwingungsperiode vorkommen, so nimmt der oben angegebene Ausdruck (1) folgende Form an:

$$\varphi = \frac{k_0}{\lambda^2 - \lambda_0^2} \cdot \tag{1a}$$

Da nun k_0 für ein Medium, in dem die Elektronen sich in rechtsgewundenen Spiralen bewegen, negativ ist, so folgt hieraus, daß ein solches Medium die Polarisationsebene in negativer oder positiver Richtung (für ein gegen die Fortpflanzungsrichtung blickendes Auge) dreht, je nachdem λ größer oder kleiner als λ_0 ist. Falls die Elektronen sich in linksgewundenen Spiralen bewegen, ist die Wirkung in den beiden Fällen die entgegengesetzte. Die Größe des von jedem Elektron herrührenden Beitrages zu der Drehung hängt von dem Diameter und der Steighöhe seiner spiralförmigen Bahn ab (mit wachsender Steighöhe nähern sich die Schraubenlinien der geradlinigen Form und die Drehung dem Werte Null).

Obwohl die Drudesche Theorie demnach eine recht anschauliche Vorstellung von der Ursache zu der betreffenden optischen Erscheinung erlaubt, besitzt man kein Mittel zum Prüfen, inwieweit diese Vorstellung der Wirklichkeit entspricht (falls sie es überhaupt tut). Die Frage, auf welche Weise die Bahnen der Elektronen durch die Einwirkung der Molekularstruktur die Form von Schraubenlinien eventuell annehmen können, ist auch bis jetzt unbeantwortet geblieben und dürfte nicht leicht zu beantworten sein.[1]) Die Möglichkeit der betreffenden Hypothese von der Ursache zu der Rotationspolarisation bei natürlich-aktiven isotropen Medien kann indessen mit Hilfe der Hertzschen Wellen experimentell ge-

1) Das atomistische Bild, das Drude zur Versinnlichung seiner Theorie erdacht hat, finden einige Forscher so wenig annehmbar — speziell weil es keine Antwort auf die Frage gibt, warum die Drehung an das asymmetrische Kohlenatom geknüpft ist — daß sie später andere Theorien aufzustellen versucht haben (vgl. C. W. Oseen, Ann. d. Phys. 48. S. 1. 1915).

prüft werden. Aus einer großen Anzahl im Raume regellos verschieden gerichteter schraubenförmiger Resonatoren kann man nämlich ein künstliches dissymmetrisch-isotropes System herstellen, bei dem die durch elektromagnetische Wellen erzeugte elektrische Schwingungsbewegung der Resonatoren in spiralförmigen Bahnen erfolgt. *Daß in der Tat ein derartiges isotropes System von spiralförmigen Resonatoren die Polarisationsebene der einfallenden elektromagnetischen Wellen auf eine Weise dreht, die nicht nur qualitativ, sondern* (wenigstens in gewissem Grade) *auch quantitativ mit den Forderungen der Drudeschen Theorie übereinstimmt*, wird hervorgehen aus den im folgenden beschriebenen Versuchen. Indem diese Versuche somit der genannten Theorie eine experimentelle Stütze geben, bilden sie zugleich *ein direktes elektromagnetisches Analogon zu der Photogyration bei natürlich-aktiven isotropen Medien.*

Die Versuche wurden im physikalischen Institut der Universität Helsingfors im Sommer 1914 ausgeführt. Obwohl ein Bericht über sie schon früher in schwedischer Sprache erschienen ist[1]), habe ich geglaubt, daß sie auch einem größeren Publikum etwas von Interesse darbieten könnten.

Versuche.

1. Kupferdrähte von 9 cm Länge und 1,2 mm Dicke wurden so gebogen, daß sie die Form von Spiralen von 10 mm Durchmesser und etwa 7 mm Steighöhe erhielten (jede Spirale umfaßte demnach $2^1/_2$ Windungen). Die so erhaltenen spiralförmigen Resonatoren wurden in Baumwolle derart eingebettet, daß jeder Resonator sich im Zentrum eines Baumwollballes befand. Diese Bälle wurden dann ganz ohne Ordnung in zylindrische Pappschachteln verschiedener Höhe und mit einem Bodendurchmesser von 26 cm gelegt. Auf diese Weise wurden verschiedene dreidimensionale Systeme von spiralförmigen Resonatoren erhalten, deren Achsen ganz regellos im Raume verschieden gerichtet waren, und zwar ein System M_1 von 300 linksgewundenen Spiralen, ein zweites M_2 von 200 ähnlichen Spiralen und ein drittes M_3 von 200 rechtsgewundenen Spiralen.

1) Karl F. Lindman, Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar LVII. A. Nr. 8. 1914.

Die Verteilungsdichte der Resonatoren betrug etwa 21 Resonatoren pro cdm.

2. Nachdem ich verschiedene andere Versuchsanordnungen geprüft hatte, welche sich in der einen oder der anderen Beziehung als unbefriedigend erwiesen hatten, wurden die Messungen schließlich nach der in Fig. 1 schematisch dargestellten Anordnung ausgeführt. Das vom Oszillator O und seinem zylindrisch-parabolischen Reflektor ausgehende Strahlenbündel, das an der einen Seite von dem zylindrisch-parabolischen Strahlensammler des Standardindikators J und an der anderen Seite von dem Metallschirme S begrenzt wurde, ging durch das in dem festmontierten Metallrohr U befindliche Resonatorensystem M und trat dann durch die 20 cm weite kreisrunde Öffnung A in das 1 m lange, um seine geometrische

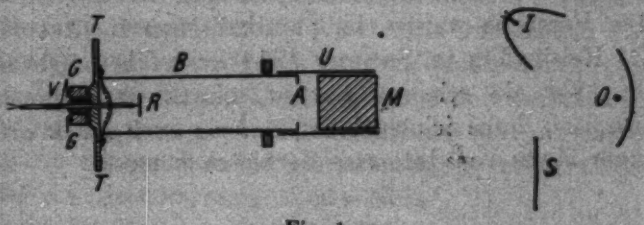


Fig. 1.

Achse drehbare zylindrische Metallrohr B ein, in dessen hinterem Teil der geradlinige mit einem Thermoelement versehene Meßresonator R angebracht war. Weil die Wirkung auf den Meßresonator R — wegen der zwischen den direkten und den an den Wänden des Rohres reflektierten Strahlen stattfindenden Interferenz — merkbar verändert wurde, falls R seine Stellung im Verhältnis zu den Wänden des Rohres B auch nur wenig veränderte, war es nötig R mit diesem Rohr fest zu verbinden, welches dadurch erreicht wurde, daß das Rohr auf die in der Figur angegebenen Weise an dem zu dem Stativ des Meßresonators gehörigen drehbaren Holzstab T befestigt wurde. Der Winkel zwischen dem Meßresonator R und dem stets vertikal gestellten stabförmigen Oszillator O wurde an der Gradscheibe G mit Hilfe des Zeigers V abgelesen. In Betreff der Konstruktion des Oszillators und der des Meßresonators und des Standardindikators, sowie der Messungs-

methode (gleichzeitige Ablesung zweier mit R bzw. J verbundener Galvanometer) mag auf eine frühere Arbeit[1]) verwiesen werden. Um negative Grade — wenigstens in den meisten Fällen — zu vermeiden, war die Gradscheibe G so gestellt, daß bei Parallelstellung von O und R der in diesem Falle aufwärts gerichtete Zeiger V die Gradzahl 90° anzeigte, wobei der Nullstrich sich an der linken Seite von dem Mittelpunkte der Scheibe befand. Bei jeder Stellung von R wurde die Intensität mehrmals gemessen, wobei das Mittel der erhaltenen (miteinander stets sehr nahe übereinstimmenden) Werte berechnet wurde. Der Oszillator O und der Meßresonator R waren in allen Fällen, wenn anders nicht gesagt wird, isochron.[2])

---

1) Karl F. Lindman, Ann. d. Phys. 38. S. 523. 1912.

2) Beinahe alle die im folgenden beschriebenen Versuche hatte ich vorher mit Benutzung einer etwas abweichenden Versuchsanordnung ausgeführt, wobei ich für die Drehung der Polarisationsebene Werte erhielt, die mit den mittels der soeben beschriebenen Anordnung erhaltenen recht gut übereinstimmten, welche (zuerst erwähnte) Anordnung aber nicht erlaubte, die von dem Resonatorensystem (M) ausgeübte Absorption und ihre Abhängigkeit von der Wellenlänge exakt zu bestimmen. Anstatt des Metallrohres U benutzte ich dabei einen großen (1 m hohen und 2 m breiten) mit einer kreisförmigen Öffnung (Durchmesser = 23 cm) versehenen Metallschirm, wobei das Resonatorensystem möglichst symmetrisch zwischen der Öffnung dieses Schirmes und der des Rohres B aufgestellt wurde. Der Meßresonator R war in diesem Falle mit einem an dem Stabe T befestigten parabolischen Strahlensammler versehen, mit dem das benachbarte Ende des Rohres B in jedem Punkte in gutem Kontakte stand (daher rührte die in Fig. 1 angedeutete Form dieses Rohrendes). Es zeigte sich, daß diese Versuchsanordnung einen zu großen Wert für das Verhältnis der Intensität der durch das Resonatorensystem M gegangenen Strahlenbündels zu der in Abwesenheit von M gemessenen Intensität ergab, indem die erstere bei den benutzten größeren Wellenlängen sogar größer als die letztere war. Diese scheinbare Verstärkung der durchgegangenen Indensität erklärt sich dadurch, daß in Abwesenheit von M die durch die Schirmöffnung gegangenen Strahlen zum Teil in verschiedenen Richtungen zerstreut wurden, wogegen das Resonatorensystem M sie durch eine der Totalreflexion etwas analogen Wirkung zusammenhielt. Die zwischen dem mittleren Teil des Empfängerspiegels und M stattfindenden mehrfachen Reflexionen hatten auch (wie eine Verschiebung von M zeigte) einen, obwohl unwesentlichen Einfluß auf die gemessene Intensität. Die betreffende Versuchsanordnung hatte schließlich auch den Übelstand, daß (wie sich durch Wellen-

3. Die Kurve I in Fig. 2 repräsentiert die in Abwesenheit eines absorbierenden Resonatorensystems (M) gemessene direkte Strahlungsintensität als Funktion des an der Gradscheibe abgelesenen Winkels (α) in dem Falle, daß die halbe Wellenlänge $\lambda/2$ (für O sowohl als R), = 13 cm war. Es geht aus der Gestalt dieser Kurve hervor, daß die vom Oszillator aus-

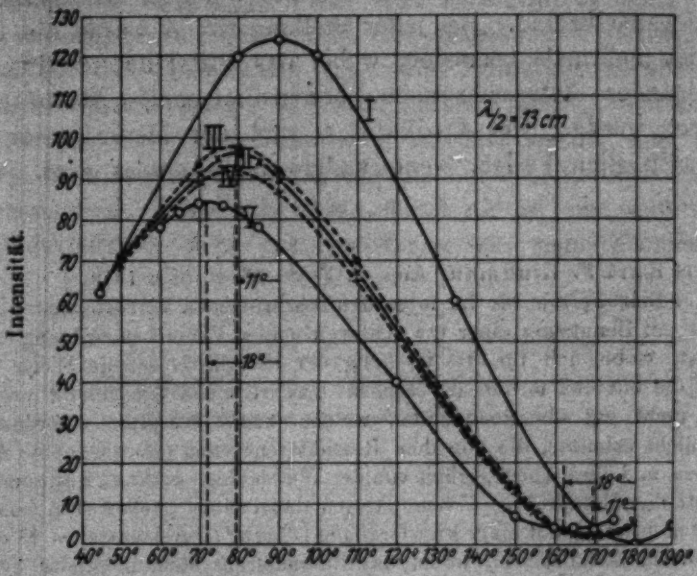


Fig. 2.

gehenden Wellen *vollständig geradlinig polarisiert waren*[1]) (dasselbe gilt für die übrigen angewandten Wellenlängen) *und daß*

längenmessungen feststellen ließ) die Eigenperiode des Meßresonators B etwas größer war, wenn R sich in dem *geschlossenen* Ende des Rohres B befand, als wenn er freistehend war. Wenn dagegen das Rohrende, wo R sich befand, offen war (wie in Fig. 1), so war eine derartige Wirkung des metallischen Rohres nicht merkbar. Bei Benutzung der in Fig. 1 angegebenen Versuchsanordnung veränderte sich auch nicht die Wirkung auf R merkbar, wenn M innerhalb des Rohres U verschoben wurde.

1) Eine solche „reine" Wirkung, die sich darin zeigte, daß die gemessene Intensität exakt = 0 war, wenn O und R senkrecht zueinander standen, konnte ohne Polorisationsgitter dadurch erreicht werden, daß bei der Konstruktion des Oszillators oder des Meßresonators verschiedene Umstände beachtet wurden, deren Erörterung hier zu weit führen würde.

die mit dem geradlinigen Thermoresonator gemessene Strahlungsintensität dem Quadrate des Cosinus des Neigungswinkels zwischen O und R und also auch dem Quadrate der Amplitude der Wellenbewegung direkt proportional war (für $\alpha = 90°$ ist mit großer Genauigkeit die Intensität zweimal so groß wie für $\alpha = 45°$ und $\alpha = 135°$).

Nach Einführung des von 300 linksgewundenen Spiralen bestehenden Resonatorensystem M_1 in das Rohr U wurde zuerst bei Variation von α die Kurve II erhalten. Nachdem M_1 um seine eigene geometrische Achse 180° gedreht worden war, wurde die Kurve III erhalten und nach einer weiteren ebenso großen Drehung von M_1 um eine gegen die vorige senkrechte Achse (das Strahlenbündel ging jetzt durch M_1 in entgegengesetzter Richtung gegen vorher) die Kurve IV. Alle diese Kurven zeigen übereinstimmend eine Drehung der Polarisationsebene von 11° an.[1]) Gleich wie die natürlich-aktiven Substanzen in ihrem Verhalten gegen die Lichtwellen (aber im Gegensatz zu den magnetisch-aktiven), hatte also das Resonatorensystem die Eigenschaft, *die Polarisationsebene der elektromagnetischen Wellen in derselben Richtung* (im Verhältnis zu der Fortpflanzungsrichtung der Wellen) *wie vorher zu drehen, wenn die Fortpflanzungsrichtung der Wellen zu der entgegengesetzten vertauscht wurde.* Daß die Ordinaten der erwähnten Kurven für $\alpha = 169°$ einen von Null etwas, obwohl sehr wenig, abweichenden Wert haben, deutet darauf hin, daß die durch M_1 gegangenen Wellen nicht vollständig geradlinig, sondern in geringem Grade *elliptisch polarisiert* waren. Da die maximalen Ordinaten dieser Kurven II—IV (für $\alpha = 79°$) allerdings sehr nahe aber doch nicht vollständig miteinander übereinstimmten, schien es zweckmäßig, das Resonatorensystem bei den folgenden Versuchen mit verschieden großen Wellenlängen stets auf dieselbe Weise orientiert zu haben, weshalb es dann immer so angeordnet wurde, wie bei der Aufnahme der Kurve II in

1) In der Umgebung des Minimums ($\alpha = 169°$) decken sich die Kurven II—IV vollständig, so daß es nicht möglich gewesen ist, die fixen Punkte der einzelnen Kurven an dieser Stelle in Fig. 2 auszusetzen. Um die Lage des Minimums festzustellen, war es nötig die betreffenden Teile dieser Kurven nach einer erheblich größeren Höhenskala wie der in Fig. 2 benutzten aufzuzeichnen.

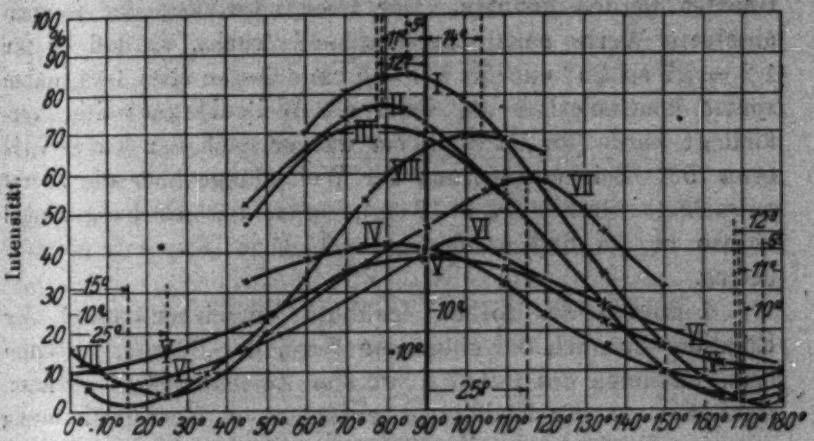
Fig. 2. Im Zusammenhang hiermit mag erwähnt werden, daß ein aus nur 100 Resonatoren bestehendes Resonatorensystem bei verschiedenen Orientierungen die Polarisationsebene etwas verschieden drehte (jedoch stets in derselben Richtung), welches offenbar darauf beruhte, daß die Anzahl der Resonatoren dann nicht groß genug waren (Resonatoren von einer gewissen Richtung waren in einer überwiegenden Mehrzahl vorhanden). Auch die früher erwähnten aus 200 Elementen bestehenden Resonatorensysteme M_2 und M_3 erhielten erst nach wiederholtem Mischen der Resonatoren einen ganz isotropen Charakter.

Daß die von den linksgewundenen schraubenförmigen Resonatoren erzeugte Drehung in positiver Richtung erfolgte, steht in Übereinstimmung mit der in der Einleitung erwähnten Drudeschen Theorie, vorausgesetzt, daß — wie auch bestätigt werden konnte — die Länge der einfallenden Wellen ($\lambda = 26$ cm) größer als die Einwellenlänge (λ_0) der Resonatoren war.

4. Die Kurve V in Fig. 1 wurde mit einem System von im ganzen 500 linksgewundenen Resonatoren erhalten (das von 200 linksgewundenen Spiralen bestehende System M_2 war dabei unmittelbar hinter dem vorher benutzten System M_1 angebracht). Der Drehungswinkel war in diesem Falle, wie aus der Kurve V hervorgeht, $= + 18°$. Als die Dicke der „aktiven Schicht" im Verhältnis $3 : 5 = 1 : 1{,}67$ vermehrt wurde, vergrößerte sich demnach der Drehungswinkel im Verhältnis $11 : 18° = 1 : 64$, d. h. (innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler) in demselben Verhältnis wie die Schichtdicke. *Die von dem Resonatorensystem erzeugte Drehung der Polarisationsebene war also mit der Dicke der von den Wellen durchstrahlten Schicht oder mit der Anzahl der im Wege der Wellen befindlichen Resonatoren direkt proportional.* Es stimmt diese Folgerung mit dem entsprechenden von Biot aufgestellten optischen Gesetze vollständig überein.

5. Die in Fig. 3 gezeichneten Kurven wurden durch Versuche mit *verschieden großen Wellenlängen* und dem Resonatorsystem M_1 erhalten. Zum besseren Vergleich sind alle Ordinaten auf Prozente der direkten (in Abwesenheit von M_1 gemessenen) Strahlungsintensität reduziert worden. Die Kurve II ist mit der gleich benannten Kurve in Fig. 2 identisch. Wenn man diese Kurve mit der Kurve III (in Fig. 3) vergleicht, so

findet man, daß die Drehung der Polarisationsebene sich nur sehr wenig vergrößerte, als die halbe Wellenlänge ($\lambda/2$) von 13 cm zu 11,4 cm abnahm. Die Ellipizität (das Verhältnis der kleinsten Ordinate zu der größten oder eigentlich die Quadratwurzel daraus) vergrößerte sich dagegen dabei merkbar. Noch bedeutend größer war die Abweichung von dem linearen Polarisationszustand bei einer halben Wellenlänge $\lambda/2 = 10$ cm (die Kurve IV). In diesem Falle hatte sich indessen der Winkel zwischen der größeren Achse der Ellipse (der Richtung der maximalen Intensität) und dem elektrischen Vektor der



Der an der Gradscheibe abgelesene Winkel (α).

Kurve	I: $\lambda/2 = 17{,}1$ cm	Kurve	V: $\lambda/2 = 9{,}6$ cm
„	II: $\lambda/2 = 13{,}0$ „	„	VI: $\lambda/2 = 9{,}0$ „
„	III: $\lambda/2 = 11{,}4$ „	„	VII: $\lambda/2 = 7{,}7$ „
„	IV: $\lambda/2 = 10{,}0$ „	„	VIII: $\lambda/2 = 6{,}1$ „

Fig. 3.

einfallenden linear polarisierten Wellen zu etwa 10° verkleinert. Daß man in diesen und den übrigen hier betrachteten Fällen, in welchen eine Abweichung von der geradlinigen Polarisation vorkam, wirklich mit elliptisch polarisierten Wellen zu tun hatte, wird durch später beschriebene Versuche bestätigt. Die Kurve V zeigt, daß bei einer halben Wellenlänge $\lambda/2 = 9{,}6$ cm die Bahn der Schwingungsbewegung der aus M_1 heraustretenden Wellen die Form einer *aufrechtstehenden Ellipse hatte, deren größere Achse zu dem elektrischen Vektor der einfallen-*

den Wellen parallel war und bei der das Verhältnis zwischen der kleineren und der größeren Achse (die Quadratwurzel aus dem Verhältnis zwischen der kleinsten und der größten Ordinate) noch größer als bei der zuletzt erwähnten Ellipse war.

Bei weiterer Verkleinerung der Wellenlänge hatte, wie aus den folgenden Kurven VI—VIII hervorgeht, der Drehungswinkel wieder einen von Null abweichenden Wert aber *entgegengesetztes Vorzeichen gegen vorher.* Zugleich nahm die Elliptizität der Schwingungsbahn ab, so daß die resultierenden Schwingungen schon bei $\lambda/2 = 7{,}7$ cm als fast geradlinig betrachtet werden konnten. Der Drehungswinkel, der (seinem absoluten Werte nach) zuerst schnell wuchs, so daß er für $\lambda/2 = 7{,}7$ cm 25° war (für $\lambda/2 = 9$ cm dagegen etwa 10°), nahm später kontinuierlich ab, wenn die Wellenlänge weiter verkleinert wurde (für $\lambda/2 = 6{,}1$ cm war er nach der Kurve VIII etwa 15°). Bei Vergrößerung der Wellenlänge über die zuerst betrachtete Größe ($\lambda/2 = 13$ cm), nahm der Drehungswinkel ebenso ab, so daß er für $\lambda/2 = 17{,}1$ cm (Kurve I) etwa 5° betrug.

6. Sowohl der soeben erwähnte Vorzeichenwechsel der Rotation wie auch die elliptische Form der Schwingungsbahn beim Passieren des Punktes, wo der Zeichenwechsel vorkam, steht, wie aus der Einleitung hervorgeht, in Übereinstimmung mit den Forderungen der Theorie und den entsprechenden optischen Versuchen, vorausgesetzt, daß die Wellenlänge, bei der die Drehung ihr Vorzeichen wechselte, mit der Wellenlänge der Eigenschwingungen des Resonatorensystems M_1 übereinstimmte. Die halbe Wellenlänge der Eigenschwingungen eines etwa 10 cm langen geradlinigen wie auch ringförmigen dünnen Metalldrahtes ist bekanntlich nur wenig (höchstens einige Millimeter) größer als die geometrische Länge des Leiters. Bei den 9 cm langen schraubenförmigen Resonatoren, mit denen diese Versuche ausgeführt wurden und bei welchen die Steighöhe der Schraubenlinie (= 7 mm) verhältnismäßig groß war, kann (wegen der größeren Selbstinduktion) die Eigenwellenlänge ein wenig, aber auch nicht viel größer sein, als wenn diese Resonatoren geradlinig wären. Die Kurven in Fig. 3 zeigen auch, daß die von den Resonatoren ausgeübte Absorption (es soll diese später näher untersucht werden) ihr Maximum in der

Nähe von $\lambda/2 = 9{,}6$ cm hat. Es scheint demnach plausibel, daß die Wellenlänge $2 \times 9{,}6$ cm, bei der die Drehung ihr Vorzeichen wechselte, mit der Eigenwellenlänge (λ_0) der spiralförmigen Resonatoren übereinstimmte.

Um diese Folgerung weiter zu prüfen, versuchte ich experimentell zu ermitteln, in welchem Grade sich die Eigenperiode eines Resonators vergrößerte, wenn einem ursprünglich geradlinigen Resonator die Form einer Spirale gegeben wurde. In die eine der beiden zylindrischen Hülsen, zwischen denen das Thermoelement des Meßresonators eingeschaltet war,

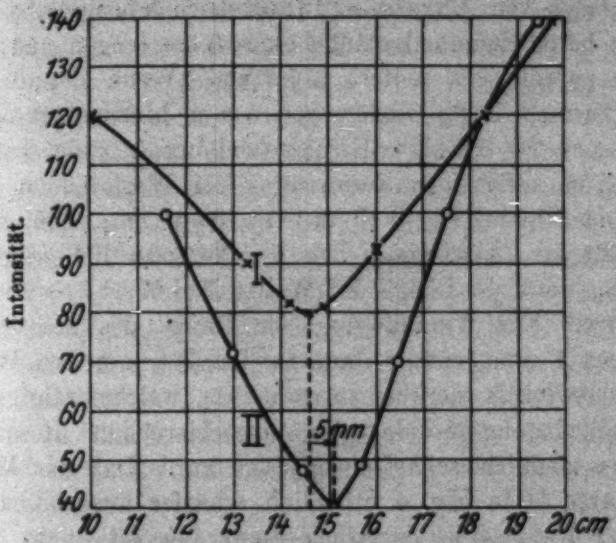


Fig. 4.

wurde ein 1,2 mm dicker Kupferdraht eingeführt, dessen außerhalb der Hülse befindlicher Teil 9,5 cm lang war (in die andere Hülse wurde kein Zusatz eingeführt). Nachdem der Oszillator (O) zu angenäherter Resonanz mit dem so erhaltenen 13,5 cm langen geradlinigen Resonator abgestimmt worden war, konnte die Eigenwellenlänge dieses Resonators ohne Schwierigkeit bestimmt werden. Wenn die von O ausgehenden Wellen auf einen großen ebenen Kupferspiegel senkrecht fielen, wurde durch Variieren des Abstandes zwischen dem Spiegel und dem zu ihm parallelen Resonator die Kurve I in Fig. 4 erhalten, deren tiefster Punkt zeigt, daß die halbe Eigen-

wellenlänge des geradlinigen Resonators = 14,6 cm war. Der ebenerwähnte 9,5 cm lange Kupferdraht wurde dann — mit Ausnahme des etwa 0,5 cm langen Teiles von ihm, der sich in unmittelbarer Nähe von der Hülse befand — zu einer ähnlichen Spirale gebogen (mit demselben Durchmesser und derselben Steighöhe) wie die früher benutzten. Mit dem so veränderten Meßresonator erhielt ich auf die obenerwähnte Weise die Kurve II in Fig. 4. Man findet, daß der Einfluß der Schraubenform auf die Wellenlänge in einer Vergrößerung der halben Eigenwellenlänge des Resonators um 5 mm bestand. Nach einer von Abraham[1]) theoretisch abgeleiteten Formel ist die halbe Eigenwellenlänge eines 9 cm langen und 1,2 mm dicken geradlinigen Leiters = 9,1 cm. Wenn der durch die Spiralform bedingte Zusatz von 5 mm hinzugefügt wird, so ergibt sich für die halbe Eigenwellenlänge $\lambda_0/2$ der früher benutzten spiralförmigen Resonatoren der Wert 9,6 cm.

Die Kurven IV—VII in Fig. 3 zeigen, daß sich die Drehung der Polarisationsebene[2]) außerordentlich schnell veränderte, wenn die Länge der Wellen den Wert $\lambda_0 = 2 \times 9{,}6$ cm passierte. Eine Veränderung der Länge des Meßresonators um etwa 1 mm genügte dann in der Tat, um den Wert des Rotationswinkels merkbar zu verändern, welches zeigt, daß die Eigenschwingungsperiode des absorbierenden Resonatorensystems ziemlich scharf ausgeprägt war. Daß das Minimum der Kurve II in Fig. 4 erheblich schärfer ausgebildet ist als das der Kurve I in derselben Figur beweist auch, daß die Eigenschwingungen eines spiralförmigen Resonators bedeutend weniger gedämpft sind als die eines geradlinigen Resonators, welches offenbar auf der größeren Selbstinduktion jenes Resonators beruht.

7. Da die Eigenwellenlänge des Resonatorensystems ($\lambda_0 = 2 \times 9{,}6$ cm) jetzt bekannt ist, können wir untersuchen, inwieweit die für verschiedene Wellenlängen experimentell gefundenen Werte des Rotationswinkels mit der theoretisch

1) M. Abraham, Wied. Ann. 66. S. 435. 1898.

2) Auch wenn die Wellen elliptisch polarisiert sind, kann man von einer Drehung der *Polarisationsebene* reden, falls man darunter die Polarisationsebene der zur großen Achse der Schwingungsellipse parallelen Komponente versteht.

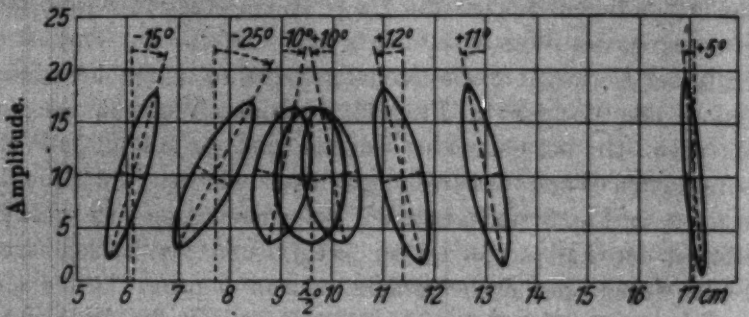
aufgestellten Formel (1a) in der Einleitung übereinstimmt, wobei jedoch zu beachten ist, daß, wie schon früher erwähnt wurde, diese Formel unter der Voraussetzung abgeleitet worden ist, daß die Periode der einfallenden Wellen mit der Eigenperiode der Resonatoren (der Elektronen) nicht allzunahe übereinstimmt, in welchem Falle von der durch die Absorption erzeugten Elliptizität der Schwingungsbahn abgesehen werden kann, indem — falls eine Elliptizität überhaupt merkbar ist — die größere Achse der Ellipse dann dieselbe Stellung hat wie die lineare Schwingungsbahn in Abwesenheit von Absorption. Zum Ausgangspunkt für die Berechnungen können wir am besten den mit großer Genauigkeit bestimmten Drehungswinkel von 11° wählen, welcher für $\lambda/2 = 13$ cm erhalten wurde. Mit Benutzung des Wertes $\lambda_0 = 2 \times 13{,}6$ lassen sich dann mit Hilfe der Formel (1a) die Drehungswinkel (φ) leicht berechnen, welche den übrigen in Frage kommenden Wellenlängen entsprechen. In der folgenden Tabelle sind die auf diese Weise berechneten Werte des Drehungswinkels mit den (mit Hilfe der Kurven in Fig. 3) experimentell gefundenen zusammengestellt. Obwohl der Fall $\lambda/2 = 9{,}6$ cm $= \lambda_0/2$ und die benachbarten Fälle wegen des eben Gesagten schon à priori hätten ausgeschlossen werden können, sind sie jedoch des Vergleiches halber in die Tabelle auch eingetragen worden. Die Bedeutung des Vorzeichens der Rotation ist schon in der Einleitung festgestellt worden.

Halbe Wellenlänge $\lambda/2$	Die von M_1 erzeugte Drehung.	
	Beob. Wert	Ber. Wert
17,1 cm	+ 5°	+ 4,2°
13,0 „	+ 11°	—
11,4 „	+ 12°	(+ 22,3°)
10,0 „	+ 10°	(+ 108°)
9,6 „ $= \lambda_0/2$	0°	($\pm \infty$)
9,0 „	− 10°	(− 75°)
7,7 „	− 25°	− 25,7°
6,1 „	− 14° à − 15°	− 15,4°

Es geht aus dieser Tabelle hervor, *daß für $\lambda/2 \geqq 13$ cm und für $\lambda/2 \leqq 7{,}7$ cm die beobachteten Werte des Drehungswinkels sogar genauer als erwartet werden konnte mit den nach der Formel (1a) berechneten Werten übereinstimmt.* Durch diese

Übereinstimmung wird diese Formel zugleich direkt bestätigt. Daß eine so gute Übereinstimmung zwischen den berechneten und den beobachteten Werten überhaupt erreicht werden konnte beruht wesentlich darauf, daß die schraubenförmigen Elemente der aktiven Schicht, wie oben nachgewiesen wurde, eine scharf ausgeprägte Eigenperiode hatten, infolge dessen die entsprechende Wellenlänge λ_0 durch Untersuchung der Stellung der Schwingungsellipse mit großer Genauigkeit bestimmt werden konnte.

Man erhält ein anschauliches Bild von der Veränderung der Schwingungsbahn und der Rotation, die beim Passieren der Eigenwellenlänge des Resonatorensystems M_1 stattfand,



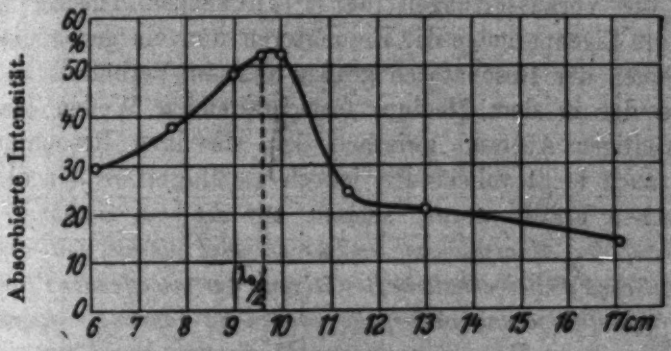
Halbe Wellenlänge ($\lambda/2$).

Fig. 5.

wenn man, wie in Fig. 5 gezeigt wird, die resultierenden Schwingungsbahnen um diejenigen Punkte einer wagerechten Achse zeichnet, welche die entsprechenden halben Wellenlängen repräsentieren. Die Amplituden der Schwingungsbewegung in den Richtungen der Hauptachsen der Ellipsen sind in dieser Figur in jedem Falle durch Ausziehen der Quadratwurzel aus den entsprechenden in Fig. 3 graphisch dargestellten größten und kleinsten Werten der Intensität erhalten worden. Weil die Werte, welche für das Verhältnis zwischen der kleinen und großen Achse der Ellipsen, wie später erklärt werden soll, eher zu groß als zu klein sind, können wir in den äußersten in Fig. 5 angegeben Fällen die Polarisation als fast geradlinig ansehen.

8. Bei Untersuchung der von dem Resonatorensystem M_1 ausgeübten *Absorption* und ihre Abhängigkeit von der Wellen-

länge ist zu beachten, daß, wenn die Wellen elliptisch polarisiert sind, ihre Intensität gleich der Summe der in den Richtungen der beiden Hauptachsen gemessenen Intensitäten ist, d. h. in jedem Falle gleich der Summe der größten und kleinsten Ordinate der entsprechenden Kurve in Fig. 3. Weil die Ordinaten in dieser Figur die Intensität des durch M_1 gegangenen Strahlenbündels in Prozenten der Intensität des direkten, ungeschwächten Strahlungsbündels angeben, erhält man die einem gewissen Werte von $\lambda/2$ entsprechende Absorption, wenn man die erwähnte Ordinatensumme von der Zahl 100 subtrahiert. Man erhält dann die in Fig. 6 dargestellte Absorptionskurve.



Halbe Wellenlänge $\lambda/2$.
Fig. 6.

Das ziemlich scharf ausgebildete Maximum dieser Kurve zeigt eine sehr deutliche, durch eine ausgeprägte Eigenperiode des absorbierenden Systems bedingte selektive Absorption an. Das die Lage des Maximums der Absorption der Eigenwellenlänge den absorbierenden Resonatoren ($\lambda_0/2 = 9{,}6$ cm) nicht vollständig entspricht, indem dieses Maximum etwas *nach der Seite der größeren Wellenlängen hin verschoben* ist, scheint als eine Wirkung der Anhäufung der Resonatoren gedeutet werden zu können. Nach der Planckschen elektromagnetischen Dispersionstheorie[1]) muß nämlich eine solche Verschiebung des Absorptionsmaximums in stark absorbierenden Substanzen stattfinden, welche aus einer großen Anzahl regellos verschieden

1) M. Planck, Berl. Ber. S. 474. 1892 und S. 480. 1903.

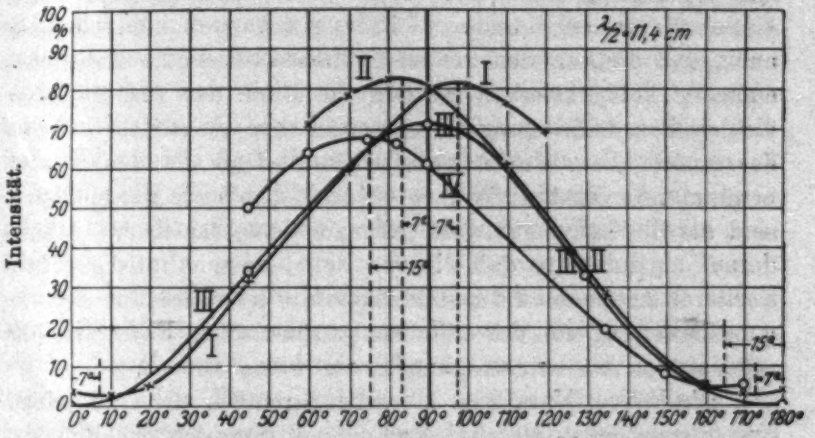
gerichteter elektromagnetischer Resonatoren mit einer einzigen ausgeprägten Eigenperiode zusammengesetzt gedacht werden können. Die Extinktionskurven für Medien von diesem Typus charakterisiert Planck folgendermaßen: „sie enthalten einen breiten Streifen metallischer Absorption, dessen Maximum aber nicht mit der Wellenlänge der Eigenperiode eines einzelnen Resonators zusammenfällt, sondern gegen diese mehr oder weniger beträchtlich nach den längeren Wellen hin verschoben erscheint. Der Abfall der Extinktionskurve vom Maximum nach der Seite der längeren Wellen hin ist immer steiler als nach der entgegengesetzten Seite.“ Es stimmt dies mit der Gestalt der Absorptionskurve in Fig. 6 vollständig überein. Da auch die Voraussetzungen der Planckschen Theorie (ausgeprägte Eigenperioden der Resonatoren und ein gegen die Dimensionen der Resonatoren großer aber im Verhältnis zu der Länge der in dem Medium fortschreitenden Wellen kleiner gegenseitiger Abstand zwischen den einzelnen Resonatoren), wenn auch nicht vollständig, jedoch annähernd bei den obigen Versuchen erfüllt waren, scheint mir *die eben erwähnte Verschiebung des Absorptionsmaximums als eine direkte, mit elektromagnetischen Wellen erhaltene Bestätigung der betreffenden Planckschen Schlußfolgerung aufgefaßt werden zu können.*

Von dieser Verschiebung des Maximums der Absorptionskurve abgesehen, befindet sich der Punkt $\lambda_0/2 = 9{,}6$ cm in Fig. 6 annähernd im Zentrum des für das Resonatorensystem M_1 charakterischen „Absorptionsstreifens“, der durch die Erhebung der Absorptionskurve in der Umgebung dieses Punktes dargestellt wird. Anstatt, wie bisher, zu sagen, daß die Rotation ihr Vorzeichen für $\lambda = \lambda_0$ wechselt, können wir demnach auch sagen, daß *dieser Zeichenwechsel dann stattfindet, wenn man bei Veränderung der Wellenlänge das Zentrum des Absorptionsstreifens passiert.* Auf diese Weise ausgedrückt, stimmt dieses Ergebnis mit dem entsprechenden experimentell gefundenen optischen Gesetze (siehe Einleitung) vollständig überein.

Daß bei natürlich-aktiven Medien auch solche Absorptionsstreifen vorkommen können, die in keinem Zusammenhang mit dem optischen Drehungsvermögen dieser Medien stehen, erklärt man bekanntlich durch die Annahme, daß außer denjenigen Elektronengruppen, welche eine Drehung der Polari-

sationsebene verursachen (den aktiven Elektronen), auch andere Elektronengruppen vorkommen können, welche eine selektive Absorption ohne gleichzeitige Photogyration erzeugen. Ein elektromagnetisches Analogen zu einem solchen Medium würde man in einem Resonatorensystem erhalten, das teils von schraubenförmigen, teils von symmetrischen (z. B. geradlinigen oder ringförmigen) Elementen zusammengesetzt wäre.

9. Die Kurve I in Fig. 7 wurde durch Versuche mit dem aus 200 *rechtsgewundenen* Spiralen bestehenden Resonatorensystem M_3 erhalten, wenn die Wellenlänge = 11,4 cm war.



Der an der Gradscheibe abgelesene Winkel (α).

Fig. 7.

(Die Ordinaten sämtlicher Kurven in dieser Figur sind wieder in Prozenten der Intensität der freien Strahlung ausgedrückt.) Das aus gleich vielen *linksgewundenen* Spiralen bestehende System M_3 ergab dagegen die Kurve II. Diese beiden Kurven sind, wie aus der Figur hervorgeht, fast ganz symmetrisch mit Bezug auf die durch den Gradstrich 90° gezogene Ordinate, d. h. die von den beiden Resonatorensystemen erzeugten Rotationen waren *gleich groß aber von entgegengesetzten Vorzeichen* (− 7° bzw. + 7°). Die Abweichungen von dem linearen Polarisationszustand waren auch, wie ein Vergleich der Ordinaten der Minimipunkte der beiden Kurven ergibt, in den beiden Fällen gleich groß. Wenn man diese Abweichungen, wie wir

oben vorausgesetzt haben, wirklich auf einer *elliptischen Polarisation* der aus den Resonatorensystemen heraustretenden Wellen und nicht etwa auf einer durch diffuse Reflexion erzeugten Depolarisierung (Mischung von polarisierter und unpolarisierter Strahlung) beruhen, müssen diese Abweichungen einander aufheben, wenn die Wellen durch die beiden Resonatorensysteme gehen, nachdem diese unmittelbar hintereinander gestellt worden sind. Daß dies wirklich der Fall war, geht aus der Kurve III in Fig. 7 hervor, die eine vollständig geradlinige Polarisation der durch die in Serie geordneten Systeme M_3 und M_2 gegangenen Wellen zeigt. Daß die Ordinaten dieser Kurve für $\alpha = 45°$ und $\alpha = 135°$ gleich groß sind, beweist auch, daß die von den beiden Systemen erzeugten Rotationen einander kompensierten, so daß die Bahn der resultierenden elektrischen Schwingungsbewegung zu dem elektrischen Vektor der einfallenden Wellen parallel war. Daß die beiden eben erwähnten Ordinaten (für $\alpha = 45°$ und 135°) ein wenig kleiner sind als die halbe maximale Ordinate derselben Kurve, scheint darauf hinzudeuten, daß die von den beiden elliptisch polarisierten Komponenten zusammengesetzte resultierende Schwingungsbewegung von der einfachen harmonischen Bewegung (der sogenannten Sinusschwingungen) ein wenig abwich.

Die Kurve IV in Fig. 7 wurde durch Versuche mit einem System von 200 + 200 linksgewundenen Spiralen erhalten, das aus dem System M_2 und einem neuen aus 200 Elementen des Systems M_1 bestehenden System M_2' zusammengesetzt war. In Übereinstimmung mit einem schon oben festgestellten Gesetze ergibt sich aus dieser Kurve, daß der Drehungswinkel sich verdoppelte, wenn die Dicke der aktiven Schicht (bzw. die Anzahl der aktiven Resonatoren) verdoppelt wurde. Zugleich nahm auch das Verhältnis der kleineren Achse der Schwingungsellipse zu der großen Achse merklich zu. Die Absorption, die bei dem einfachen System M_2 (Kurve II) $100 - (82 + 3) =$ 15 Proz. war, betrug jetzt nach der Kurve IV $100 - (67 + 5) =$ 28 Proz. Die oben erwähnte aus 200 linksgewundenen und 200 rechtsgewundenen Spiralen bestehende System ($M_2 + M_3$) absorbierte nach der Kurve III $100 - 71 = 29$ Proz. oder ebensoviel wie das zuletzt erwähnte System. Von den 85 Proz. der direkten Strahlungsintensität, die das System M_2 durchließ,

ließ das System M_2' wieder $^{72}/_{85}$ oder 85 Proz. In Übereinstimmung mit den gewöhnlichen Absorptionsgesetzen *nahm also die Absorption nach einer geometrischen Reihe zu, wenn die Dicke der absorbierenden Schicht durch eine arithmetische Reihe vergrößert wurde.*

Durch eine allmählige Vergrößerung der Schichtdicke versuchte ich zu ermitteln, ob nicht die Absorption von einer durch mehrfache innere Reflexionen erzeugte Interferenz beeinflußt wurde. Die dabei erhaltene Kurve, welche die Absorption als Funktion der Schichtdicke für $\lambda/2 = 11{,}4$ cm darstellte, zeigte zwar einige kleine Höhenvariationen; diese waren jedoch so gering und so wenig regelmäßig, daß sie beinahe innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler fielen. Dieses negative Ergebnis läßt sich vielleicht dadurch erklären, daß die Absorption für Wellen von der Länge $2 \times 11{,}4$ verhältnismäßig groß war. Es scheint deshalb nicht ausgeschlossen, daß man durch Wiederholung dieses Versuches mit Wellen von geeigneterer Länge eine Interferenz der erwähnten Art würde nachweisen können.

10. Wenn die halbe Wellenlänge $= 9{,}6$ cm oder also $= \lambda_0/2$ war, fielen, wie dann auch zu erwarten war, die beiden Kurven, welche den Kurven I und II in Fig. 7 entsprachen, miteinander zusammen. Die Kurve, welche die resultierende Wirkung der beiden „entgegengesetzten" Resonatorensysteme (M_2 und M_3) darstellte, zeigte wieder — ähnlich wie die Kurve III in Fig. 7 — eine geradlinige Polarisation ohne Drehung (die beiden in entgegengesetzten Richtungen durchlaufenen Schwingungsellipsen, die in dem in Fig. 7 angegebenen Falle bei ihrer Superposition einander schnitten, waren jetzt aufrecht stehend und kongruent). Wenn dagegen die beiden Resonatorensysteme aus gleich gewundenen Spiralen (M_2 und M_2') zusammengesetzt waren, zeigte sich ihre resultierende Wirkung bei der betreffenden Wellenlänge, außer in einer größeren Absorption, in einem Zuwachs des Verhältnisses zwischen der wagerechten und der vertikalen Achse der resultierenden und immer noch aufrecht stehenden Schwingungsellipse.

11. Ein Resonatorensystem, das aus gleich vielen miteinander gleichförmig gemischten rechts- und linksgewundener Spiralen bestand, ließ die Polarisationsebene der durchgehenden

Wellen unverändert und wirkte demnach nur schwächend auf die Wellen ein. Ein auf diese Weise zusammengesetztes Resonatorensystem ist folglich ein elektromagnetisches Analogon zu den sogenannten „*Razemkörpern*“, welche, obwohl sie selbst optisch inaktiv sind, Verbindungen oder Mischungen gleicher Mengen aktiver „Antipoden“ sind und durch besondere Mittel in diese Bestandteile zerlegt werden können.

12. Bei allen bisher beschriebenen Versuchen waren, wie oben erwähnt wurde, der Oszillator O und der Meßresonator R wenigstens annähernd isochron. Falls dies nicht der Fall war, richtete sich die Rotation, wie dann auch erwartet werden konnte, nach der *Eigenperiode des Meßresonators*, die erheblich schärfer ausgeprägt war als die des Oszillators. Die unendlich vielen Komponenten von verschiedener Wellenlänge, aus denen die stark gedämpften primären Wellen zusammengesetzt gedacht werden können, erfuhren demnach verschieden große und zum Teil auch verschieden gerichtete Drehungen ihrer Polarisationsebene beim Durchgang der Wellen durch das aktive Resonatorensystem. Die Absorption schien jedoch in gewissem Grade vom Oszillator abhängig zu sein, denn wenn die Periode des Oszillators in nähere Übereinstimmung mit der Eigenperiode des Resonatorensystems gebracht wurde, so vergrößerte sich die Absorption. Weil der Meßresonator demnach — in Übereinstimmung mit einer von mir schon früher[1]) aus anderen Ursachen ausgesprochenen Ansicht — auch auf andere Teile des Energiesystems des Oszillators als auf den seiner eigenen „Hauptschwingung“ entsprechenden Teil etwas reagierte, schien es möglich, daß die eben erwähnte Rotationsdispersion eine, wenn auch geringe scheinbare Vergrößerung des Verhältnisses der kleineren Achse der Schwingungsellipse zur größeren herbeiführte.

Zusammenfassung.

Durch die oben beschriebenen Versuche ist eine durch ein isotropes System von spiralförmigen Resonatoren erzeugte Rotationspolarisation der elektromagnetischen Wellen nachgewiesen worden, welche mit den Forderungen der von Drude ent-

1) K. F. Lindman, Ann. d. Phys. 38. S. 554. 1912.

wickelten elektromagnetischen Theorie der Photogyration übereinstimmt. In erster Linie haben sich die folgenden Gesetze feststellen lassen:

1. Ein aus gleichen linksgewundenen und regellos verschieden gerichteten Resonatoren bestehendes dreidimensionales Gitter dreht die Polarisationsebene der durchgehenden elektromagnetischen Wellen nach links oder nach rechts (für ein der Fortpflanzungsrichtung der Wellen entgegengesetztes Auge), je nach dem die Länge (λ) der Wellen größer oder kleiner als die den Eigenschwingungen der Resonatoren entsprechende Wellenlänge (λ_0) ist. Ein aus rechtsgewundenen Resonatoren bestehendes System verhält sich in dieser Beziehung umgekehrt.

2. Wenn λ sich von λ_0 nur wenig unterscheidet oder gleich λ_0 ist, so ist die resultierende Schwingung elliptisch polarisiert, und zwar wechselt der von der großen Achse der Ellipse mit der Schwingungsebene der einfallenden Wellen gebildete Winkel ihr Vorzeichen, wenn λ den Wert λ_0 passiert.

3. Das Resonatorensystem besitzt ein ausgeprägtes selektives Absorptionsvermögen, und zwar entspricht dem Absorptionsmaximum eine Wellenlänge, die — in Übereinstimmung mit der Planckschen elektromagnetischen Dispersionstheorie des Lichtes — ein wenig, aber auch nur sehr wenig größer als λ_0 ist. Annähernd kann man also sagen, das der im vorigen Moment erwähnte Zeichenwechsel der Rotation im Zentrum eines „Absorptionsstreifens" stattfindet.

4. Für Werte von λ, die mit λ_0 nicht nahe übereinstimmen, gehorcht der Drehungswinkel φ dem Gesetz

$$\varphi = \frac{k_0}{\lambda^2 - \lambda_0^2},$$

wo k_0 eine Konstante ist. Falls λ_0^2 gegen λ^2 vernachlässigt werden kann, so ist also φ dem Quadrate der Wellenlänge umgekehrt proportional (optisches Gesetz von Biot).

5. Die Drehung ist der Anzahl der im Wege der Strahlen befindlichen gleichen spiralförmigen Resonatoren oder der Dicke der „aktiven" Schicht direkt proportional (entsprechend einem zweiten von Biots optischen Gesetzen).

Indem diese Versuche, bei denen die theoretisch gewonnenen Vorstellungen von der Ursache der Photogyration bei natürlich-aktiven Medien künstlich realisiert waren, der oben genannten Theorie eine neue Stütze geben, bilden sie zugleich ein direktes elektromagnetisches Analogon zu der betreffenden optischen Erscheinung.

Åbo, Mai 1920.

(Eingegangen 27. Mai 1920.)

3. *Elektromagnetische Wellen an dielektrischen Drähten*[1]*;*

von O. Schriever.

I. Einleitung.

Die Theorie der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen an einem geraden metallischen Draht ist in voller Strenge zuerst von Sommerfeld[2]) gegeben worden. Bezüglich Wellenlänge, Dämpfung, Intensität des Feldes, Einfluß der Materialkonstanten usw. kommt Sommerfeld zu Ergebnissen, die mit den seit Hertz bekannten experimentellen Tatsachen durchaus übereinstimmen. Dennoch aber läßt er die Frage offen, ob die von ihm gegebene Lösung des Problems auch die einzig mögliche sei.

Diese Frage hat dann Hondros[3]) eingehend erörtert und tatsächlich gefunden, daß außer der Sommerfeldschen Lösung, die er als „Hauptwelle" bezeichnet, theoretisch noch andere Lösungen, von ihm „Nebenwellen" genannt, möglich sind, daß diese aber infolge äußerst starker Dämpfung gegenüber der Hauptwelle so verschwindende Intensität besitzen, daß der Vorgang praktisch durch die Hauptwelle allein bestimmt wird. Nimmt man aber statt des metallischen Drahtes einen solchen aus dielektrischem Material, so müßten nach Hondros u. Debye[4]) die Nebenwellen von beobachtbarer Intensität werden, während die Hauptwelle dann vollkommen verschwindet.

Der experimentelle Nachweis dieser dielektrischen Drahtwellen ist Herrn Rueter und mir[5]) im Sommer 1914 gelungen.

---

1) Diese Abhandlung ist von der Philos. Fakultät der Universität Kiel als Inauguraldissertation angenommen worden.

2) A. Sommerfeld, Wied. Ann. 67. S. 285. 1899.

3) D. Hondros, Ann. d. Phys. 30. S. 905. 1909.

4) D. Hondros u. P. Debye, Ann. d. Phys. 32. S. 466. 1910.

5) Vorläufige Mitteilung siehe in den Schriften des naturwissensch. Vereins f. Schlesw. Holst. 16. Heft 2. 1915.

Unsere damalige, in verschiedenen Punkten verbesserte Versuchsanordnung hat Herr Zahn[1]) nebst eigenen Messungen inzwischen bereits veröffentlicht. Herr Zahn knüpft an das Ergebnis der Theorie von Hondros u. Debye an, daß an einem Draht dielektrischen Materials nur solche Wellen möglich sind, deren Länge l im Vakuum mit dem Brechungsexponenten ν und dem Radius ϱ des Drahtes in der Beziehung steht: $l \leqq 2{,}61 \cdot \varrho \cdot \sqrt{\nu^2 - 1}$. Zur Erregung benutzte Herr Zahn drei kleine Kondensatorkreise mit Funkenstrecke, die je eine unveränderliche Wellenlänge von $l = 60$ bzw. 52 und 28,4 cm lieferten. Gemäß der angegebenen Formel mußten dann, für Wasser als Drahtmaterial ($\nu = 9$), Drähte benutzt werden von der Dicke: $\varrho \geqq \frac{28{,}4}{23{,}4} = 1{,}2$ cm. Für andere Dielektrika wird, entsprechend ihrem kleineren Brechungsexponenten, der Grenzwert für ϱ größer. Als „Drähte" wurden Glasrohre benutzt, die mit der betreffenden Flüssigkeit gefüllt waren, und ihre Dimensionen hat Herr Zahn so abzupassen versucht, daß sie auf die gegebene Erregerschwingung möglichst stark ansprachen. Seine Ergebnisse sind aber, wie er selbst betont, nicht geeignet, die Theorie in quantitativer Hinsicht zu bestätigen, bedeuten vielmehr zur Hauptsache einen Nachweis, daß elektromagnetische Wellen an dielektrischen Drähten experimentell herstellbar sind. Die definitive Ausarbeitung der Versuche wollte Herr Zahn Herrn Rüter und mir überlassen. Herr Rüter starb in den Kämpfen in der Champagne am 27. 9. 15 den Tod fürs Vaterland. Nach dem Kriege habe daher ich allein dieses Thema wieder aufgenommen, und es ist mir gelungen, unter Verwendung einer Glühkathodenröhre als Erreger, dessen Frequenz sich stetig variieren ließ, auch eine quantitative Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment zu erreichen.

Um eine richtige Vorstellung von dem Wesen der dielektrischen Drahtwellen zu bekommen, das von dem der gewöhnlichen Drahtwellen erheblich abweicht, wird es nützlich sein, zunächst etwas näher auf die Theorie einzugehen.

---

1) H. Zahn, Phys. Zeitschr. 16. S. 414. 1915 und Ann. d. Phys. 49. S. 907. 1916.

II. Zur Theorie der dielektrischen Drahtwellen.

Die Maxwellschen Gleichungen:

$$\frac{\varepsilon}{c}\cdot\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}+\frac{4\pi\sigma}{c}\mathfrak{E}=\operatorname{curl}\mathfrak{H}$$

$$-\frac{\mu}{c}\cdot\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}=\operatorname{curl}\mathfrak{E}$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{E}=0;\qquad \operatorname{div}\mathfrak{H}=0$$

nehmen durch Einsetzen folgender Größen[1]):

$$\mathfrak{E}=\mathfrak{E}_0\,e^{i\omega t};\qquad \mathfrak{H}=\mathfrak{H}_0\,e^{i\omega t};\qquad \mathfrak{H}_0=\frac{ip}{\mu}\mathfrak{M}_0,$$

$$p=\sqrt{\varepsilon\mu-i\frac{4\pi\sigma\mu}{\omega}}\ \text{(komplexer Brechungsindex)},$$

$$l'=l\cdot\frac{\omega p}{c}\ \text{(dimensionslose „Längen“ } l' \text{ statt der wirklichen Längen } l)$$

die in $\mathfrak{E}_0$ und $\mathfrak{M}_0$ symmetrische Form an:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{E}_0&=\operatorname{curl}'\mathfrak{M}_0\\ \mathfrak{M}_0&=\operatorname{curl}'\mathfrak{E}_0\end{aligned}\right\},\qquad \operatorname{curl}'=\frac{\operatorname{curl}}{\frac{\omega p}{c}},$$

$$\operatorname{div}'\mathfrak{E}_0=0;\qquad \operatorname{div}'\mathfrak{M}_0=0.$$

In Zylinderkoordinaten $(r,\ \varphi,\ z)$ geschrieben, lauten sie also:

$$\mathfrak{E}_{0r}=\frac{1}{r'}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}(\mathfrak{M}_{0z})-\frac{\partial}{\partial z'}(\mathfrak{M}_{0\varphi}),$$

$$\mathfrak{E}_{0\varphi}=\frac{\partial}{\partial z'}(\mathfrak{M}_{0r})-\frac{\partial}{\partial r'}(\mathfrak{M}_{0z}),$$

$$\mathfrak{E}_{0z}=\frac{1}{r'}\cdot\frac{\partial}{\partial r'}(r'\,\mathfrak{M}_{0\varphi})-\frac{1}{r'}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}(\mathfrak{M}_{0r}),$$

$$\frac{1}{r'}\cdot\frac{\partial}{\partial r'}(r'\,\mathfrak{M}_{0r})+\frac{1}{r'}\cdot\frac{\partial}{\delta\varphi}(\mathfrak{M}_{0\varphi})+\frac{\partial}{\partial z'}(\mathfrak{M}_{0z})=0),$$

dazu das entsprechende System bei Vertauschung von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$. Partikuläre Lösungen dieser Gleichungen sind:

$$\mathfrak{E}_{0r}=+\,e^{i(n\varphi+\lambda z')}\cdot i\lambda^2\cdot Z_n'\left(r'\cdot\sqrt{1-\lambda^2}\right),$$

$$\mathfrak{E}_{0\varphi}=-\,e^{i(n\varphi+\lambda z')}\cdot\frac{n\lambda^2}{r'\cdot\sqrt{1-\lambda^2}}\cdot Z_n\left(r'\cdot\sqrt{1-\lambda^2}\right),$$

$$\mathfrak{E}_{0z}=+\,e^{i(n\varphi+\lambda z')}\cdot\sqrt{1-\lambda^2}\cdot Z_n\left(r'\cdot\sqrt{1-\lambda^2}\right),$$

1) Die nachfolgende vereinfachte Darstellung der Theorie der Drahtwellen verdanke ich der freundlichen Mitteilung von Herrn Prof. Madelung.

$$\mathfrak{M}_{0r} = + e^{i(n\varphi + \lambda z')} \cdot \frac{i\lambda n}{r' \cdot \sqrt{1-\lambda^2}} \cdot Z_n\left(r' \cdot \sqrt{1-\lambda^2}\right),$$

$$\mathfrak{M}_{0\varphi} = - e^{i(n\varphi + \lambda z')} \cdot \lambda \cdot Z_n'\left(r' \cdot \sqrt{1-\lambda^2}\right),$$

$$\mathfrak{M}_{0z} = 0,$$

sowie die entsprechenden Ausdrücke bei Vertauschung von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$.

Darin bedeutet Z_n eine Zylinderfunktion n-ter Ordnung und $Z_n'(x) = \frac{d Z_n(x)}{d x}$. Jede solche partikuläre Lösung stellt eine in bezug auf die z-Achse symmetrische „Welle" dar, und jeder elektromagnetische Ausbreitungsvorgang kann durch eine lineare Kombination solcher Systeme wiedergegeben werden. Die willkürlichen Konstanten n und λ charakterisieren die räumliche Periodizität des Vorganges um die Z-Achse bzw. in Richtung derselben. λ ist im allgemeinen Falle komplex. Mit der auf der Achse gemessenen Wellenlänge L steht der reelle Teil von λ in der Beziehung: $\Re(\lambda) \cdot L = 2\pi$, oder:

$$(1) \qquad \Re(\lambda) = \frac{2\pi}{L} = \frac{c}{\omega p} \cdot \frac{2\pi}{L},$$

während durch den imaginären Teil von λ die Dämpfung in Richtung der z-Achse gegeben wird.

Durch die Bedingung $n = 0$ beschränken wir uns auf die rotationssymmetrischen Wellen, die allein für die spezielle Versuchsanordnung dieser Arbeit in Frage kommen. Deren Feldgleichungen reduzieren sich auf:

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_{0r} = A \cdot e^{i\lambda z'} \cdot i\lambda^2 \cdot Z_0'\left(r' \sqrt{1-\lambda^2}\right), \\ \mathfrak{E}_{0z} = A \cdot e^{i\lambda z'} \cdot \sqrt{1-\lambda^2} \cdot \lambda \cdot Z_0\left(r' \sqrt{1-\lambda^2}\right), \\ \mathfrak{M}_{0\varphi} = - A \cdot e^{i\lambda z'} \cdot \lambda \cdot Z_0'\left(r' \sqrt{1-\lambda^2}\right). \end{cases}$$

Eine solche Welle kann man mit Hondros als eine „elektrische" bezeichnen, im Gegensatz zu der „magnetischen", die durch Vertauschung von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$ entsteht. Wegen der in dieser Arbeit verwendeten reinen elektrischen Anregung in der Achse begnügen wir uns mit der Diskussion der ersteren.

Handelt es sich nun um einen in der z-Achse gelegenen unendlich langen geraden Draht vom endlichen Radius ϱ, so hat man in Betracht zu ziehen, daß sich das gesamte Feld über zwei Medien erstreckt, den Außenraum (Medium I, $r \geqq \varrho$)

und das Drahtinnere (Medium II, $r \leqq \varrho$), und daß an deren Grenzschicht, der Drahtoberfläche, die Grenzbedingungen erfüllt sein müssen, daß die Tangentialkomponenten ($\mathfrak{E}_{0z}$ u. $\mathfrak{M}_{0\varphi}$) in beiden Medien gleich werden. Das liefert zwei Gleichungen für $\frac{A_I}{A_{II}}$ und λ. Dabei muß man noch berücksichtigen, daß als Zylinderfunktionen nur solche in Betracht kommen, die für alle vorkommenden Argumente regulär sind. Im Drahtinnern, wo r Null wird, haben wir daher die gewöhnliche Besselsche Funktion zu nehmen, und im Außenraum, wo r unendlich wird, im allgemeinen Fall[1]) die allgemeine Zylinderfunktion mit zwei unabhängigen Konstanten:

$$a \cdot H_{1,0} + b \cdot H_{2,0} .$$

Für „Drahtwellen" jedoch, deren Energiefluß im Unendlichen verschwindet und auf die wir uns weiterhin beschränken wollen, kommt für Medium I nur die erste Hankelsche Funktion mit positiv imaginärem Argument in Betracht. — Die Grenzbedingungen lauten also in dem Falle:

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} A_I \cdot \frac{x}{p_I^2} \cdot H(x) = A_{II} \cdot \frac{y}{p_{II}^2} \cdot J(y), \\ A_I \cdot H'(x) = A_{II} \cdot J'(y) , \end{cases}$$

wobei:

$$\varrho_I' \cdot \sqrt{1 - \lambda_I^2} = x , \quad \varrho_{II}' \cdot \sqrt{1 - \lambda_{II}^2} = y$$

gesetzt ist, oder, falls man noch die neuen, der Vakuumwellenlänge l bzw. der Drahtwellenlänge L umgekehrt proportionalen Abkürzungen:

$$\alpha = \frac{\omega \varrho}{c} = \frac{2\pi \varrho}{l} ; \quad \beta = \frac{2\pi \varrho}{L}$$

einführt:

$$\text{(4)} \qquad x = \sqrt{(\alpha p_I)^2 - \beta^2} ; \qquad y = \sqrt{(\alpha p_{II})^2 - \beta^2} .$$

Eliminiert man aus (3) zunächst die A:

$$\text{(5)} \qquad \left(\frac{p_I}{p_{II}}\right)^2 \cdot \frac{H'(x)}{x \cdot H(x)} = \frac{J'(y)}{y \cdot J(y)} ,$$

so hat man bei gegebenem α in (4) und (5) drei Gleichungen zur Bestimmung der drei Unbekannten x, y, β.

In der Lösung dieser transzendenten Gleichung besteht

---

1) vgl. Hondros, a. a. O., S. 942.

die eigentliche Aufgabe. Sommerfeld hat sie durchgeführt für rein metallisches Drahtmaterial ($p_{\mathrm{I}} = 1$, p_{II} komplex) und unter der vereinfachenden Annahme, daß die Geschwindigkeit gleich c und die Dämpfung gering sei, wie es ja den experimentellen Tatsachen entspricht. Aber auch ohne diese Voraussetzungen lassen sich, wie Hondros zeigt, Lösungen angeben, die er als „Nebenwellen" von der Sommerfeldschen „Hauptwelle" unterscheidet. Beide haben ganz verschiedene Eigenschaften. Besonders besitzen die Nebenwellen eine so große Dämpfung und so starken Skineffekt in bezug auf den Außenraum, daß sie gegenüber der Hauptwelle im Experiment unmerklich werden. — Die Arbeit von Hondros und Debye bezieht sich auf reines Dielektrikum als Drahtmaterial. In diesem Falle, der uns hier näher interessiert, wird $p_{\mathrm{I}} = 1$, $p_{\mathrm{II}} = \sqrt{\varepsilon} = \nu$ und der in der transzendenten Gleichung vorkommende Faktor $\left(\frac{p_{\mathrm{I}}}{p_{\mathrm{II}}}\right)^2$ gleich $\frac{1}{\nu^2}$. Das Resultat des von Hondros und Debye angewandten graphischen Lösungsverfahrens für Gl. (4), (5) ist ein Kurvenbild für β als Funktion von α. Um den experimentellen Sinn desselben deutlicher hervortreten zu lassen, ist hier statt dessen in derselben Weise direkt L als Funktion von l ermittelt.

Da keinerlei Leitfähigkeit vorhanden ist, so muß gemäß (1) L und folglich auch β reell sein. Damit ergibt sich dann aus (4), daß x, y nur rein imaginär oder reell sein können, und zwar hat man, damit auch Gleichung (5) bestehen kann, x als rein imaginär (und positiv) und y als reell anzunehmen. Aus (4) folgt dann:

$$y^2 = (\nu^2 - 1)\alpha^2 + x^2 \leqq (\nu^2 - 1)\alpha^2 \leqq (\nu^2 - 1) \cdot \left(\frac{2\pi\varrho}{l}\right)^2.$$

Das Gleichheitszeichen trifft zu für $x = 0$. In dem Falle muß wegen (5) entweder $y = 0$ sein, was bei vorgegebenem α unmöglich ist, oder $J(y) = 0$, d. h.:

$$y = 2{,}40; \quad 5{,}52; \quad 8{,}65; \ldots.$$

entsprechend dem oszillatorischen Verlauf der J-Kurve um die Abszissenachse. Für l ergibt sich somit die Beziehung (vgl. Einleitung):

$$(6)\quad \begin{cases} l \leqq \frac{2\pi}{2{,}40}\,\varrho\sqrt{\nu^2-1}\,; \quad \frac{2\pi}{5{,}52}\,\varrho\sqrt{\nu^2-1}\,; \quad \frac{2\pi}{8{,}65}\,\varrho\sqrt{\nu^2-1}\,; \ldots \\ \text{also z. B. für Wasser } (\nu = 9) \text{ als Drahtmaterial:} \\ l \leqq 23{,}4\,\varrho\,; \qquad 10{,}2\,\varrho\,; \qquad 6{,}6\,\varrho\,; \ldots \end{cases}$$

Aus (4) folgt weiter, damit x rein imaginär, y reell wird:

$$\alpha^2 \leqq \beta^2 \leqq \alpha^2\nu^2\,,$$

oder:

$$(7)\qquad l \geqq L \geqq l/\nu\,.$$

Nicht bei jeder beliebigen Erregerfrequenz sind also „Drahtwellen" möglich, sondern erst dann, wenn die der Frequenz entsprechende Vakuumwellenlänge einen gewissen, nur durch das Drahtmaterial (ϱ, ν) bestimmten Wert (Gleichung (6), erster Ausdruck) nicht überschreitet. Ist diese Bedingung erfüllt, so variiert die Wellenlänge am Dielektrikum, je nach der Erregerwelle, gemäß (7) zwischen zwei Grenzwerten. Im oberen Grenzfalle ist L gerade gleich l, die Drahtwelle pflanzt sich also längs der Achse mit der dem Außenmedium charak-

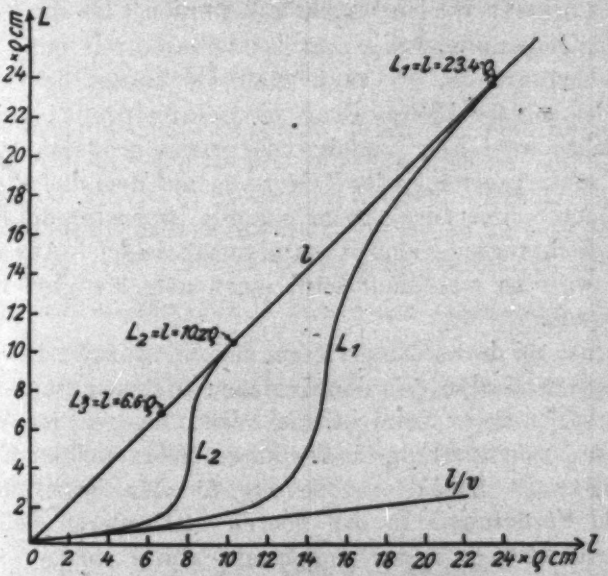


Fig. 1.

teristischen Geschwindigkeit (Lichtgeschwindigkeit c) fort. Bei kurzen Erregerwellen dagegen nähert sich L mehr und mehr

dem Werte l/ν, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit also dem Werte c/ν, wie er dem Drahtmaterial bekanntlich sonst charakteristisch ist. Das Verhalten von L zwischen diesen beiden Grenzwerten ist aus Fig. 1 ersichtlich, die sich auf Wasser als Drahtmaterial bezieht. Man erkennt, daß L unterhalb des oberen Grenzwertes (Kurve L_1) zunächst annähernd in demselben Maße abnimmt wie l (Gerade l), um dann aber, für Wasser besonders in dem Intervall $16\,\varrho \geqq l \geqq 14\,\varrho$ bedeutend schneller zu fallen als l. Bei noch kürzerem l dagegen, etwa unterhalb $12\,\varrho$, ist die Änderung von L geringer als die von l.

Damit aber ist der Vorgang nicht erschöpft. Entsprechend dem zweiten, dritten usw. Grenzwerte von l [Gleichung (6)] sind neben der bisher betrachteten Welle, sobald l bis auf jene Werte verkürzt ist, weitere Wellen, Nebenwellen 2., 3. usw. Ordnung, am dielektrischen Draht möglich, die alle den Verlauf der Nebenwelle 1. Ordnung wiederholen, nur in immer kürzerem Intervall.

Hier mag gleich eine Bemerkung für den experimentellen Nachweis unserer Wellen angeknüpft werden. Ist die Erregerwelle eine gedämpfte, von einem Kondensatorkreis mit Funkenstrecke herrührende, so kann man sie bekanntlich als ein mehr oder minder breites Band im Spektralstreifen auffassen. Ein solches wird aber, infolge der meist größeren Steilheit der L-Kurven gegenüber der l-Geraden, auf dem dielektrischen Draht noch weiter auseinander gezogen, worunter die Schärfe der Beobachtungsmöglichkeit naturgemäß leidet. Aus diesem Grunde wird es vorteilhaft sein, einen ungedämpften Erreger zu benutzen.

Ferner sei darauf hingewiesen, daß eine geringe Inkonstanz der Erregerwellenlänge in den Gebieten, in denen die L-Kurven steil verlaufen, ganz beträchtliche Schwankungen der Wellenlänge am Draht zur Folge haben kann. Konstanz der Erregerwellenlänge ist daher eine weitere an das Experiment zu stellende Forderung. In den oberen und unteren Teilen der L-Kurven wird sich eine Inkonstanz von l weniger störend bemerkbar machen.

Um ein anschauliches Bild von dem Kraftlinienverlauf der Wellen zu gewinnen, braucht man nur noch A_I/A_{II} auszurechnen. Es folgt aus (3) unmittelbar:

$$A_{\mathrm{I}} : A_{\mathrm{II}} = y \cdot J(y) : \nu^2 x \cdot H(x).$$

Darin können wir jetzt x, y als bekannte Größen ansehen. Setzt man dies in die Feldgleichungen (2) ein und ersetzt wieder die Vektoren $\mathfrak{E}_0$ und $\mathfrak{M}_0$ durch die ursprünglichen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ und die dimensionslosen „Längen" durch die wirklichen, so erhält man bis auf einen allen Gleichungen gemeinsamen konstanten Faktor für:

Das Feld im Außenraum:

$$\text{(I)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_r &= i\beta y J(y) H'\left(x\frac{r}{\varrho}\right) \\ \mathfrak{E}_z &= \quad x y J'(y) H\left(x\frac{r}{\varrho}\right) \\ \mathfrak{H}_\varphi &= i\alpha y J(y) H'\left(x\frac{r}{\varrho}\right) \end{aligned} \right\} e^{i\frac{\beta z - \alpha c t}{\varrho}}.$$

Das Feld im Drahtinnern:

$$\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_r &= i\beta x H(x) J'\left(y\frac{r}{\varrho}\right) \\ \mathfrak{E}_z &= \quad y x H(x) J\left(y\frac{r}{\varrho}\right) \\ \mathfrak{H}_\varphi &= i\nu^2 \alpha x H(x) J'\left(y\frac{r}{\varrho}\right) \end{aligned} \right\} e^{i\frac{\beta z - \alpha c t}{\varrho}}.$$

Die magnetischen Kraftlinien haben nur eine Komponente $\mathfrak{H}_\varphi$, umgeben also den Draht in konzentrischen, auf den Meridianebenen senkrecht stehenden Kreisen. Den Verlauf der elektrischen Kraftlinien erhält man, indem man für eine genügend große Anzahl von Punkten (r, z) einer beliebigen Meridianebene bei konstantem t (z. B. $t = 0$) den Quotienten $\frac{\mathfrak{E}_r}{\mathfrak{E}_z}$ bildet und die erhaltenen Werte als Richtungen in die r, z-Ebene einträgt. Dann erhält man Kraftlinienbilder, wie sie in Fig. 2 für drei verschiedene Fälle wiedergegeben sind. Fig. 2a bezieht sich auf den Fall, daß die Erregerwellenlänge gleich der oberen Grenzwelle der Nebenwelle 1. Ordnung ist. Hier hat man zu setzen:

$$x = 0, \quad y = 2{,}40; \quad \alpha = \beta = 2{,}40 : \sqrt{\nu^2 - 1}.$$

Mit diesen Werten würde man unter Benutzung obiger Feldgleichungen für alle Komponenten den Wert Null erhalten. Formt man aber die Gleichungen in geeigneter Weise um, daß sich ein allen Komponenten gemeinsamer und für $x = 0$

verschwindender konstanter Faktor[1]) absondern läßt, so kann man schreiben:

$$\text{(I')}\quad \begin{cases} \mathfrak{E}_r = 1{,}25\,\dfrac{\nu^2}{\sqrt{\nu^2-1}}\,\dfrac{x}{i}\,H'\left(x\dfrac{r}{\varrho}\right)\cos\left(\dfrac{2{,}40}{\sqrt{\nu^2-1}}\,\dfrac{z-ct}{\varrho}\right) \\ \mathfrak{E}_z = 0{,}52\,\nu^2\left(\dfrac{x}{i}\right)^2 i\,H\left(x\dfrac{r}{\varrho}\right)\sin\left(\dfrac{2{,}40}{\sqrt{\nu^2-1}}\,\dfrac{z-ct}{\varrho}\right) \\ \dfrac{\mathfrak{E}_r}{\mathfrak{E}_z} = \dfrac{1{,}25}{0{,}52}\,\dfrac{1}{\sqrt{\nu^2-1}}\,\dfrac{1}{x}\,\dfrac{H'\left(x\dfrac{r}{\varrho}\right)}{H\left(x\dfrac{r}{\varrho}\right)}\operatorname{ctg}\left(\dfrac{2{,}40}{\sqrt{\nu^2-1}}\,\dfrac{z-ct}{\varrho}\right) = \infty \text{ für } x = 0 \end{cases}$$

und:

$$\text{(II')}\quad \begin{cases} \mathfrak{E}_r = -\,1{,}53\,\dfrac{1}{\sqrt{\nu^2-1}}\,J'\left(2{,}40\,\dfrac{r}{\varrho}\right)\cos\left(\dfrac{2{,}40}{\sqrt{\nu^2-1}}\,\dfrac{z-ct}{\varrho}\right) \\ \mathfrak{E}_z = -\,1{,}53\cdot J\left(2{,}40\,\dfrac{r}{\varrho}\right)\sin\left(\dfrac{2{,}40}{\sqrt{\nu^2-1}}\,\dfrac{z-ct}{\varrho}\right) \\ \dfrac{\mathfrak{E}_r}{\mathfrak{E}_z} = \dfrac{1}{\sqrt{\nu^2-1}}\cdot\dfrac{J'\left(2{,}40\dfrac{r}{\varrho}\right)}{J\left(2{,}40\dfrac{r}{\varrho}\right)}\operatorname{ctg}\left(\dfrac{2{,}40}{\sqrt{\nu^2-1}}\,\dfrac{z-ct}{\varrho}\right). \end{cases}$$

Im Innenraum (II') endigen demnach die Kraftlinien senkrecht zum Draht ($J\left(2{,}40\dfrac{r}{\varrho}\right)$ verschwindet für $r = \varrho$) und behalten diese Richtung im Außenraum überall bei. In der Mitte des Drahtes ($r = 0$) verlaufen sie in Richtung der Achse ($J'\left(2{,}40\dfrac{r}{\varrho}\right)$ verschwindet).

Verkürzt man die Wellenlänge (Fig. 2b), so rückt im Drahtinnern die Zone, in der die Kraftlinien senkrecht zur Längsrichtung des Drahtes verlaufen, immer mehr von der Oberfläche zur Achse hin, so daß immer mehr Kraftlinien Gelegenheit haben, sich innerhalb des Drahtes zu schließen. Die Heraustretenden schließen sich in weiteren Bögen. Die Fig. 2b entspricht etwa den Zahlenwerten $l = 16{,}6\,\varrho$, $L = 14{,}4\,\varrho$, $x = 0{,}2\,i$, $y = 3{,}37$, die in die ursprünglichen Formeln (I) und (II) einzusetzen sind. Bezeichnet man mit r_∞ den Radiusvektor, für den $\dfrac{\mathfrak{E}_r}{\mathfrak{E}_z} = \infty$ wird (Normalzone) und entsprechend mit r_0 denjenigen, für den die Kraftlinien in Richtung der Achse verlaufen (Tangentialzone), so ist für den Fall der

1) Vgl. Hondros und Debye, a. a. O. S. 474.

Fig. 2a: $r_0 = 0$ $\quad r_\infty = \varrho$ Fig. 2b: $r_0 = 0$ $\quad r_\infty = 0{,}71\,\varrho$.

Allgemein sind, wie man aus (II) direkt ersehen kann, Tangentialzonen diejenigen, für die r der Bedingung unterliegt:

$$y \cdot r/\varrho = \text{Wurzel von } J', \text{ also } = 0;\ 3{,}83;\ \ldots$$

und Normalzonen diejenigen, für welche:

$$y \cdot r/\varrho = \text{Wurzel von } J, \text{ also } = 2{,}40;\ 5.52;\ \ldots$$

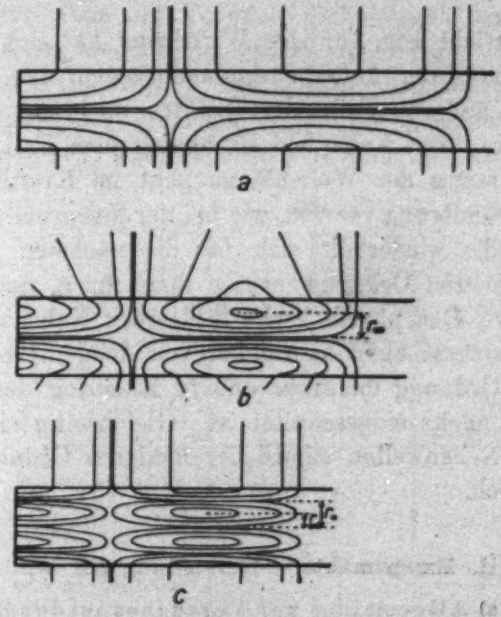


Fig. 2.

wovon im vorliegenden Falle der Nebenwelle 1. Ordnung nur das erste Wertepaar (0 und 2,40) in Betracht kommt, da y nur von 2,40 bis 3,83 variiert. Bei Annäherung an die untere Grenzwellenlänge von L_1 nähert sich hiernach r_∞ dem Werte: $\frac{3{,}83}{\varrho} r_\infty = 2{,}40$, d. h. $r_\infty = 0{,}63\,\varrho$. Sämtliche Kraftlinien schließen sich dann im Innern des Drahtes.

Der Mechanismus unserer dielektrischen Wellen ist demnach vergleichbar mit Rauchringen, die mit Lichtgeschwindigkeit (im oberen Grenzfalle) bzw. langsamer längs des Drahtes hineilen.

Das Bild der Nebenwellen 2. Ordnung wird etwas kom-

plizierter. Da für sie nämlich y von 5,52 bis 7,02 variiert, so umfaßt das Intervall $0 \leqq \frac{y}{\varrho} \cdot r \leqq \frac{y}{\varrho} \cdot \varrho$ auf jeden Fall zwei Wurzeln von J' und J, woraus je zwei Werte für r_0 und r_∞ folgen, und zwar im oberen Grenzfalle:

$$r_0 = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{3{,}83}{5{,}52}\varrho\,,$$

$$r_\infty = \frac{2{,}40}{5{,}52}\varrho \quad \text{und} \qquad \varrho\,.$$

Dem entspricht Fig. 2c: Der Wirbelring hat sich so weit auf die Umgebung der Achse zusammengezogen, daß sich um ihn herum im äußeren Teile des Drahtes noch ein zweiter ausbilden kann. Das Außenfeld ist analog dem Fall der Fig. 2a. Bei Verkürzung der Wellenlänge geht im Kraftlinienbild die gleiche Veränderung vor sich, wie bei der Nebenwelle 1. Ordnung.

Dasselbe wiederholt sich für die nächsten Nebenwellen. Bei der dritten Ordnung erhält man für r_0 und r_∞ je drei Werte usw. Das physikalische Bild jeder Nebenwelle höherer Ordnung unterscheidet sich daher von demjenigen der vorhergehenden Ordnung dadurch, daß in Richtung des Radius ein Wirbelring mehr eingeschaltet ist. Gleichzeitig sind in jedem Falle die Nebenwellen sämtlicher niederen Ordnungen außerdem möglich.

III. Experimentelle Herstellung der Wellen.

a) Allgemeines zur Versuchsanordnung.

Für eine experimentelle Herstellung der Wellen an dielektrischen Drähten ist es wesentlich hervorzuheben, daß es sich in der von Hondros und Debye gegebenen Theorie, wie aus dem obigen hervorgeht, nur um eine partikuläre Lösung der Maxwellschen Gleichungen handelt, die für ihre experimentelle Verifizierung eine ganz spezielle Erregung erfordert. Aus den Fig. 2 geht nämlich hervor, daß an der Erregerseite ($z = 0$, linke Begrenzung der Figuren) ein parallel der z-Achse gerichtetes elektrisches Feld vorhanden sein muß, dessen Stärke $\mathfrak{E}_z$ sich mit der Entfernung r von der Achse im Drahtinnern wie $J\left(y\frac{r}{\varrho}\right)$, im Außenraum wie $H\left(x\frac{r}{\varrho}\right)$ ändert. Die Erregung hätte also einmal in unendlich vielen unendlich

schmalen konzentrischen Kreisen zu geschehen und zudem in dieser komplizierten Abhängigkeit von deren Radien r. Das dürfte praktisch überhaupt nicht ausführbar sein. Bei den Versuchen wurde denn auch auf die Innehaltung dieser Bedingungen von vornherein verzichtet und das Feld mit Hilfe einer einzigen, zur Achse konzentrischen Kreisscheibe angeregt, deren Radius nur kleiner war als derjenige der innersten „Normalzone" der elektrischen Kraftlinien (vgl. oben). Dann wird sich aber der Vorgang nicht durch eine einzige partikuläre Lösung der Maxwellschen Gleichungen beschreiben lassen, sondern nur durch eine lineare Kombination vieler solcher, die aber nicht nur dem Typus der „Drahtwellen" anzugehören brauchen, sondern zum Teil auch mit Ausstrahlung

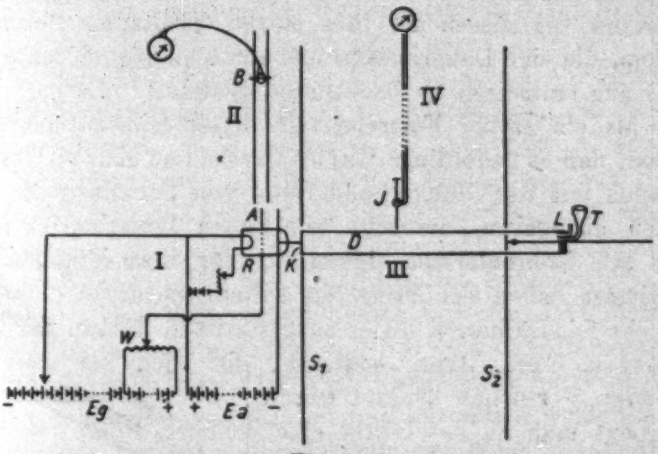


Fig. 8.

verbunden sein können. Letztere besitzen dann in Richtung der z-Achse eine gewisse Dämpfung. Um von ihnen frei zu werden, brauchte man daher auf dem Draht nur in solche Entfernung von der Erregungsstelle zu gehen, daß sie vollkommen abgeklungen und reine Drahtwellen übrig geblieben sind. Aber auch dies war wegen der beschränkten Länge des Drahtes nicht ausführbar.

Konnten somit die Voraussetzungen für die Theorie von Hondros und Debye experimentell nicht streng erfüllt werden, so wird man es auch im Experiment nicht mit reinen Drahtwellen zu tun haben, sondern mit einer gewissen seitlichen

Energiestrahlung rechnen müssen. Wir werden später sehen, wie dies in die Erscheinung tritt.

Die Versuchsanordnung, die in Fig. 3 schematisch dargestellt ist, bestand im wesentlichen aus folgenden Teilen: die Wellen wurden von einem Erreger (I) erzeugt und ihre Länge mit einem Meßkreis (II) bestimmt. Mit dem Erreger war der dielektrische Draht (III) gekoppelt und auf diesem ein Indikator (IV) verschiebbar angebracht. Die näheren Einzelheiten gehen aus dem folgenden Abschnitt hervor.

b) Spezielle Versuchsangaben.

1. *Der Erreger.* In der Erzeugung kurzer elektrischer Wellen war man bisher auf klein dimensionierte Kondensatorkreise mit Funkenstrecke angewiesen. Der unvermeidliche Übelstand bei diesen ist ihre starke Erhitzung durch den Funken, die eine Dauerinanspruchnahme unmöglich macht und meist nur ballistisch zu beobachten gestattet. Es darf daher wohl als ein großer Fortschritt in dieser Hinsicht bezeichnet werden, daß es neuerdings Barkhausen und Kurz[1]) gelungen ist, auch mit der Glühkathodenröhre eine Schaltung für kurze Wellen anzugeben, die sehr wohl einen Dauerbetrieb zuläßt. Nicht alle Röhrenformen eignen sich für diese Methode. Am günstigsten haben sich bisher die zylindrisch angeordneten und mit sehr feindrähtigem Gitter ausgestatteten Röhren der Firma Schott u. Gen., Jena, erwiesen, die auch bei den nachfolgenden Versuchen benutzt wurden.[2])

Legt man an das Gitter einer solchen Röhre (*R*, Fig. 3) eine hohe positive Spannung (E_g), an die Anode dagegen eine negative (E_a), so werden ohne Mitwirkung irgendeines Resonanzsystems in der Röhre Schwingungen erzeugt, für deren Zustandekommen Barkhausen und Kurz folgende Hypothese aufstellen: Die von der Glühkathode austretenden Elektronen erhalten durch die hohe positive Gitterspannung eine derartige Beschleunigung, daß die meisten von ihnen, die nicht gerade auf die feinen Gitterdrähte selbst auftreffen, durch das Gitter hindurchfliegen und erst hinter demselben infolge der ab-

1) H. Barkhausen u. K. Kurz, Phys. Zeitschr. 21. S. 1. 1920.

2) Solche Röhren wurden mir in liebenswürdiger Weise von der Torpedoinspektion zur Verfügung gestellt.

stoßenden Wirkung der Anode und der Anziehung seitens des Gitters zur Umkehr gelangen. Beim nächstmaligen Passieren des Gitters von rückwärts her wird wieder nur ein kleiner Teil abgefangen, der größere dagegen wieder hindurchgelassen, usf., so daß die Elektronen nicht auf dem kürzesten Wege von der Glühkathode zum Gitter gelangen, sondern erst mehrmals um dieses hin- und herpendeln. Und diese rein mechanische Hin- und Herbewegung der Elektronen wird als Ursache der Eigenschwingungen der Röhre angesehen. Die Wellenlänge ist naturgemäß abhängig von E_g, E_a und der Heizstromstärke J_h und läßt sich durch Veränderung dieser drei Größen variieren. Sie wurde durch Steigerung von E_g und E_a auf $+ 600$ bzw. $- 100$ Volt mit der Schott-*K*-Röhre auf minimal 44 cm gebracht. Mit der etwas größer dimensionierten *N* Röhre kommt man mit der Wellenlänge nicht ganz soweit herunter.

Um konstante Erregung, sowohl in bezug auf Intensität als auch Wellenlänge zu haben, ist erforderlich, daß die drei Veränderlichen E_g, E_a, J_h keinerlei Schwankungen unterworfen sind. Die Spannung des städtischen Netzes war aus diesem Grunde für unsere Zwecke nicht zu gebrauchen. Als sehr geeignet erwies sich eine Hochspannungsakkumulatorenbatterie von Bornhäuser. Ein mit Zellenschalter ausgestatteter, also von zwei zu zwei Volt veränderlicher Satz derselben diente als Anodenspannung, weitere Sätze von 100 Volt als Gitterspannung. Einem Teil der letzteren (100 Volt) wurde ein hoher Widerstand (*W*, Fig. 3) parallel gelegt, von dem aus durch Schleifkontakt nach Art der Potentiometerschaltung der eine Pol der Gitterspannung abgezweigt wurde. Der andere wurde je nach Bedarf zwischen die übrigen hintereinander geschalteten Sätze gelegt. Auf diese Weise ließ sich die Gitterspannung ziemlich kontinuierlich variieren. Zur Speisung des Glüchdrahtes wird wegen der verhältnismäßig starken Stromentnahme (1,2—1,3 Amp) zweckmäßig eine Akkumulatorenbatterie hoher Kapazität verwendet, da bereits ein geringes Nachlassen ihrer Spannung beträchtliche Schwankungen in der Erregung zur Folge hat. Durch einen passenden Widerstand läßt sich J_h leicht stetig variabel machen.

Wenn man dafür Sorge trägt, daß die drei Größen E_g, E_a, J_h die Bedingung der Konstanz erfüllen, so ist auch die Erregung eine äußerst konstante.

Zwecks Koppelung mit einem Meßkreis waren an Gitter und Anode zwei kurze horizontale Parallelantennen (*A*) aus Kupferdraht von etwa 5 bis 10 cm Länge angelegt.

2. *Der Wellenmesser.* Ihnen gegenüber befand sich in veränderlichem vertikalen Abstand der Meßkreis (II). Derselbe bestand aus zwei horizontalen Paralleldrähten von etwa 1 m Länge und 1,5 cm gegenseitigem Abstand, auf denen eine Brücke (*B*) verschoben wurde. Letztere wurde zuerst mit einem Thermokreuz ausgestattet. Es war dann aber, zur Erzielung nennenswerter Ausschläge, eine verhältnismäßig starke Koppelung zwischen Meßkreis und Erreger erforderlich, die zur Folge hatte, daß der Resonanzpunkt beim Verschieben der Brücke in der Resonanzlage durch die starke Rückwirkung sozusagen ein Stück mitgeschleift wurde, die Röhre also nicht frei schwingen konnte. Um dies zu vermeiden, mußte man so lose koppeln, daß die Empfindlichkeit eines Thermoelementes nicht mehr ausreichte. Aus diesem Grunde wurde eine Brücke hergestellt, die einen empfindlichen Kristalldetektor enthielt. Sie mußte zudem als Plattenbrücke ausgebildet werden, um einen wirksamen Schutz des resonierenden Teils der Paralleldrähte gegen ihre überstehenden Enden zu bilden. Eine Platte von 5,5 cm Durchmesser genügte dieser Anforderung. Die nähere Konstruktion der Brücke geht aus Fig. 4 hervor. Die kreisförmige Platte bestand aus zwei Hälften, die, einen Spalt von etwa 1 mm zwischen sich lassend, auf einen Hartgummiklotz aufgeschraubt waren und zum besseren Kontakt mit den Parallel-

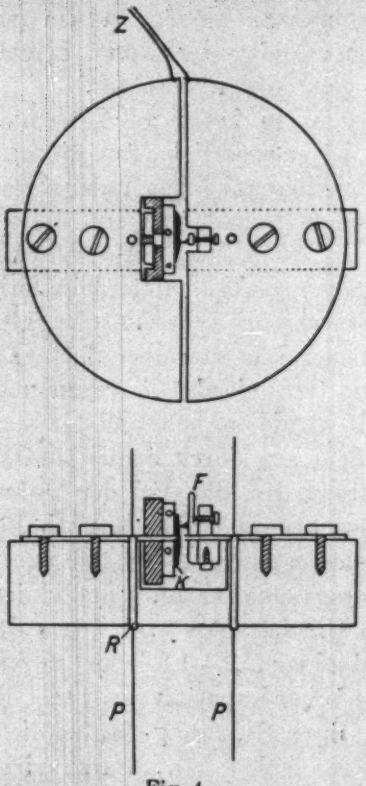


Fig. 4.

drähten (P) je ein Messingröhrchen (R) trugen. In der Mitte der Brücke befand sich der Detektor, bestehend aus einem Kristall K (Pyrit) in drehbarer Fassung und einer Spitze auf einer Feder (F) von regulierbarem Druck. Die Zuleitungen (Z) zum Galvanometer waren direkt an die beiden Plattenhälften angelötet.

Diese Anordnung erwies sich als äußerst empfindlich. Man konnte lose koppeln — Koppelungsabstand durchschnittlich 10 cm — und ein Spiegelgalvanometer von mittlerer Empfindlichkeit verwenden. Letzteres mußte zudem meist durch Nebenschluß noch unempfindlicher gemacht werden.

Die Paralleldrähte durften, um guten Kontakt mit der Brücke zu geben, keinerlei Unebenheiten aufweisen. Sie wurden deshalb dauernd durch Gewichte gespannt und des öfteren mit feinstem Schmirgelpapier sorgfältig poliert. Nur unter Beachtung dieser Maßregeln ist die aus den Abständen verschiedener Resonanzpunkte ermittelte Wellenlänge immer dieselbe. Und zwar ist, falls man mit r_1 die erste, mit r_2 die zweite Resonanzlage und mit b die „Brückenverkürzung" bezeichnet:

$$r_1 - b/2 = l/4,$$
$$r_2 - b/2 = 3l/4,$$

woraus folgt:

$$r_2 - r_1 = l/2.$$

Der Abstand zweier benachbarter Resonanzpunkte gibt also direkt die halbe Wellenlänge.

Es ist noch zu beachten, daß neben den eigentlichen Resonanzstellen der Brücke noch andere, von diesen unabhängige, auftreten, die unter sich aber die gleiche Wellenlänge ergeben wie die ersteren. Sie rühren her von einer Resonanz der überstehenden Enden mit den auf irgendeinem Wege durch Strahlung dorthin gelangten Erregerwellen. Ihre Intensität ist, je nach der Lage der Meßdrähte zu den übrigen Teilen der Apparatur, verschieden groß und kann durch passende räumliche Anordnung jedenfalls so weit herabgemindert werden, daß man beide Gruppen von Resonanzpunkten einwandfrei voneinander unterscheiden kann. Beide lassen sich übrigens zur Messung der Wellenlänge verwerten.

Die außerordentliche Resonanzschärfe läßt vermuten, daß man es mit sehr monochromatischen Schwingungen zu tun hat.

Dies gilt allerdings nicht für jede beliebige Einstellung der drei Erregervariablen E_g, E_a, J_h, läßt sich aber doch durch passende Variation derselben für jede Wellenlänge erreichen.

3. *Der dielektrische Draht.* Der Umstand, daß die Nebenwellen nach der Theorie erst unterhalb einer gewissen Wellenlänge auftreten, deren Größe ihrerseits durch den Radius und Brechungsexponenten des Drahtes bestimmt wird (Gleichung 5), zwingt dazu, entweder recht kurze Erregerwellen zu verwenden, oder ϱ und ν genügend groß zu wählen. Aus diesem Grunde wurde nur das Dielektrikum mit größtem Brechungsexponenten, nämlich Wasser, als Drahtmaterial verwendet. Zu seiner Aufnahme dienten ein 130 cm langes Glasrohr vom inneren Radius $\varrho = 2{,}76$ cm und, da Glasrohre größerer Dimension nicht zu beschaffen waren, ein mit Asphaltlack ausgestrichenes 1 m langes Papprohr der Weite $\varrho = 4{,}75$ cm.

In Fig. 3 stellt D den dielektrischen Draht dar. Das dem Erreger zugekehrte Ende war durch eine aufgekittete Glasscheibe verschlossen und trug zur Vermittlung der Koppelung eine zur Achse konzentrische Messingscheibe, die durch einen kurzen Draht mit der Anode der Senderöhre verbunden war. Der Radius der Koppelungsplatte betrug am Glasrohr 1,5 cm, war also, welche Wellenlänge man auch wählte, stets kleiner als der Radius der innersten „Normalzone“ der elektrischen Kraftlinien (r_∞), der nach S. 655 im Minimum $0{,}63\ \varrho = 1{,}74$ cm beträgt. Der entsprechende Wert für das Papprohr ist 3 cm, der Radius der Koppelungsplatte betrug hier 2,7 cm. Das andere Ende der Rohre war mit einem paraffinierten Kork verschlossen, durch den hierdurch ein, eine Metallplatte tragender Glasstab verschoben werden konnte. Zur besseren Dichtung war der Glasstab eingefettet. Ein Trichter (T) diente zum Füllen sowie zur Aufnahme des vom Glasstab verdrängten Wassers, ein Glasrohr (L) zum Ablassen der Luft. Die verschiebbare Platte erstreckte sich über den ganzen Querschnitt des Innenraumes und fand nach außen hin ihre Fortsetzung in dem ebenfalls verschiebbaren Schirm (S_2) aus Zinkblech von der Größe 60 × 60 cm. Ein gleicher Schirm (S_1) befand sich am Anfang des Drahtes. Welche Rolle diese Schirme für das Zustandekommen stehender Wellen spielen, wird sich unten ergeben. S_1 bildete gleichzeitig einen

Schutz der Drahtwellen gegen äußere vom Erreger herkommende Störungen. Die Rohre wurden getragen von zwei schmalen Holzgabeln. Ein störender Einfluß derselben auf die Ausbildung der Wellen wurde nicht beobachtet. Auf die Rohre war eine cm-Teilung mit dem Nullpunkt am Erregerende eingeätzt bzw. aufgeschrieben.

4. *Der Indikator.* Als Indikator (J, Fig. 3) für die Schwingungsverhältnisse auf dem dielektrischen Draht wurde zuerst die bereits von Herrn Zahn[1]) beschriebene Vorrichtung benutzt, bestehend aus einem Thermoelement mit zwei etwas ungleich langen, als elektrische Sonde wirkenden Parallelantennen. Dabei bildeten sich aber, wie sich herausstellte, auf der Galvanometerleitung trotz sorgfältigen Einhüllens derselben in Metallschlauch, vielleicht auch gerade auf dieser Metallhülle selbst, starke parasitäre Schwingungen aus, die eine erhebliche Fehlerquelle waren. Sie konnten die Angaben des Thermoelements bis um 50 Proz. beeinflussen. Zur Unterdrückung dieser störenden Schwingungen wurde der Metallmantel wieder beseitigt, dafür aber das erste Ende der Galvanometerleitung, etwa eine Doppelstrecke von 65 cm, aus dünnstem Eisendraht (0,015 mm Durchmesser, in Glaskapillaren ausgespannt) hergestellt, der nicht allein infolge des Skineffekts, sondern dazu wegen seiner magnetischen Eigenschaften den Schwingungen einen bedeutend größeren Widerstand bietet als dem Gleichstrom. Überdies wurde die Leitung so angeordnet, daß sie bei jeder Verschiebung des Indikators senkrecht vom dielektrischen Draht fortführte, um von möglichst wenig magnetischen Kraftlinien, die ja in Ebenen senkrecht zum Draht verlaufen, geschnitten zu werden. Bei dem hohen Widerstand der Galvanometerleitung reichte dann aber die Empfindlichkeit eines Thermoelements, selbst im Vakuum, nicht aus. An seiner Stelle wurde daher wiederum ein Kristalldetektor (Pyrit) verwendet, der sich nicht nur wegen seiner größeren Empfindlichkeit, sondern auch wegen seines hohen eigenen Widerstandes für diesen Zweck besonders eignet. Zwei an den Detektor angelegte vertikale Konstantenantennen (vgl. Fig. 5) von etwa 10 cm Länge und 0,1 mm Dicke,

1) a. a. O. S. 915.

von denen die eine zum dielektrischen Draht hinwies und beim Verschieben des Indikators mit ihrem Ende auf der Drahtoberfläche entlang schleifte, während die andere in die ent-

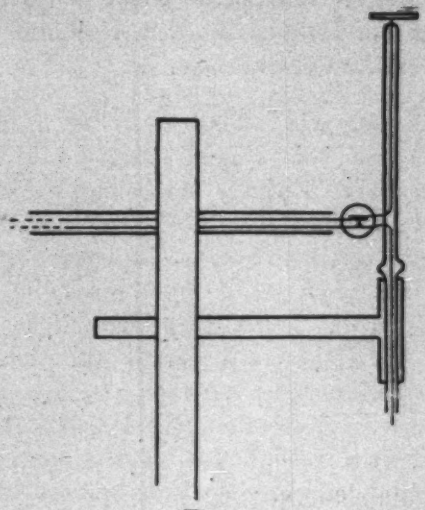


Fig. 5.

gegengesetzte Richtung wies, wirkten als aperiodischer Resonator. Seine geringe Kapazität war durch eine kleine Metallplatte am Ende der oberen Antenne passend vergrößert. Beide Antennen waren in eine gemeinsame Glaskapillare eingekittet, die ihrerseits in einem etwas weiteren Rohr lose hing. Auf diese Weise sorgte das eigene Gewicht des Antennensystems für dauernde Berührung mit der Oberfläche des dielektrischen Drahtes.

c) Beobachtungsmethode.

Die beste Möglichkeit eines Vergleichs der Theorie mit dem Experiment besteht in der Aufnahme einer Kurve, die den Zusammenhang zwischen der Erregerwellenlänge (l) und der am dielektrischen Draht beobachteten (L) wiedergibt. Dieser Weg konnte bei Herrn Zahns Versuchen nicht eingeschlagen werden, weil nur drei unveränderliche Erregerwellen zur Verfügung standen. Dort wurde vielmehr die Erregerwelle festgehalten und dafür mit Hilfe eines größeren Satzes verschieden weiter Glasrohre der Drahtradius variiert. Diese Methode ist aber nicht

nur in ihrer praktischen Ausführung unbequem, sondern läßt auch die funktionale Beziehung zwischen L und l nicht direkt erkennen. Eine stetige Variation der Erregerwellenlänge bei unverändertem Draht, wie sie der hier benutzte Erreger zuläßt, ist für diesen Zweck viel geeigneter.

Es wurden also die Variablen des Erregers, die Gitterspannung, Anodenspannung und Heizstromstärke so einreguliert, daß die aus den Resonanzlagen der Brücke des Wellenmessers sich ergebende Wellenlänge (l) eine passende Größe hatte. Dann bildeten sich vermittels der Koppelungsscheibe im dielektrischen Draht die Nebenwellen, und zwar zunächst als fortschreitende Wellen aus. Um zu stehenden Wellen Veranlassung zu geben, mußten dieselben reflektiert werden; erst dann ist aus den Knoten und Bäuchen ihre Wellenlänge direkt zu ermitteln. Bei den ersten Versuchen fehlte der Schirm S_2. Es wurden dann durch Verschieben des Indikators längs des Drahtes ebensolche Kurven erhalten, wie Herr Zahn sie mitgeteilt hat. Charakteristisch an ihnen ist, daß die Minimumstellen nicht auch Nullstellen sind, und daß die „Rohrlänge" ohne Einfluß auf die Form der Kurven ist. Besonders dieser letztere Umstand läßt das Zustandekommen der stehenden Wellen zunächst ganz unerklärlich erscheinen. Er legte jedoch die Vermutung nahe, daß es sich bei diesen Versuchen gar nicht um Reflexion am Ende des Drahtes gehandelt hat, sondern daß die Reflexionsstelle irgendwo im Zimmer in Verlängerung des Drahtes zu suchen ist. In der Tat war das der Fall, wie sich durch Bewegen einer Metallplatte hinter dem Rohr einwandfrei feststellen ließ. Es ergab sich somit die Notwendigkeit, eine exakte Reflexionsstelle zu schaffen, die zudem verstellbar sein mußte, damit die Rohrlänge immer gleich einem ganzen Vielfachen der jeweiligen halben Drahtwelle gemacht werden konnte. Erst dann werden reine stehende Wellen zu erwarten sein. Daß eine solche, an der richtigen Stelle angebrachte Reflexionswand fehlte, dürfte die Hauptursache dafür sein, daß bei Herrn Zahns Versuchen meist nur „mittelgute" oder gar „schlechte Wellen" erhalten wurden. — Der Schirm S_2, zusammen mit dem im Drahtinnern verschiebbaren Stempel erfüllten den Zweck der Reflexion sehr gut. Um auch an der Erregerseite des Rohres eine eindeutige Reflexionsebene

zu haben, lag die Koppelungsplatte K stets in der Ebene von S_1, nie dagegen wurde das Rohr D durch S_1 hindurchgeführt.

Um also die am dielektrischen Draht vorhandene Wellenlänge zu ermitteln, wurde die Stellung des Schirmes S_2 einschließlich der Scheibe im Drahtinnern so lange verändert, bis der in $^3/_4$ Abstand beider Schirme gehaltene Indikator maximalen Ausschlag gab. Dann ist die Entfernung der Schirme gerade gleich der Länge L der dielektrischen Welle. Wenn die Rohrlänge nicht ausreichte, wurde der Indikator in der Mitte zwischen den Schirmen gehalten. Dann ist bei maximalem Ausschlag der Abstand von S_1 und S_2 gleich der halben Wellenlänge. Derartige Messungen wurden bei verschiedenen Erregerwellenlängen ausgeführt.

Zur Aufnahme von Wellenkurven wurde bei unveränderter Einstellung des Erregers sowie der Schirme der Indikator längs des Rohres verschoben und der Ausschlag am Galvanometer als Funktion der Indikatorstellung beobachtet und in Kurven graphisch dargestellt.

d) Ergebnisse des Experiments.

1. *Die stehenden Wellen.* Als Beispiel dafür, mit welcher Reinheit auf dem Rohre die Knoten und Bäuche bei richtiger Stellung der Reflexionswand auftraten, sei in Tabelle I eine

Tabelle I.

Indikatorstellung cm	Galvanometerausschlag cm	Indikatorstellung cm	Galvanometerausschlag cm
0	0	30	2,9
3	7,8	33	13,1
6	20,9	36	26,4
9	38	39	37,2
12	47	42	45,9
13,5	48	43	47,5
15	47	45	45,2
18	38,5	48	37,1
21	26	51	21,1
24	12,5	54	5,3
27	2	57	0,6
29	1	58,5	0

Versuchsreihe mitgeteilt, die bei einer Erregerwellenlänge von 59 cm erhalten wurde. Die graphische Darstellung dieser Versuchsreihe ergibt die Kurve der Fig. 6. Man erkennt, daß die Minimumstellen wirkliche Nullstellen sind, und daß in den Reflexionsstellen immer ein Knoten des Potentials gelegen ist. Die noch vorhandene geringe Unsymmetrie dürfte davon herrühren, daß die Dimension der Schirme vielleicht etwas klein im Verhältnis zur Wellenlänge war. Bei längeren Wellen wurden denn auch die Unregelmäßigkeiten etwas größer. Derartige Kurven wurden in allen Fällen erhalten; es erübrigt sich daher, noch weitere mitzuteilen.

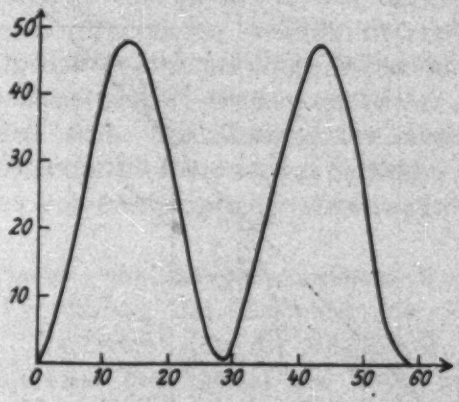


Fig. 6.

2. *Die Wellenlänge am Draht in Abhängigkeit von der Erregerwellenlänge.* Die zusammengehörigen Werte von Erregerwellenlänge (l) und Drahtwellenlänge (L), die bei Variation der Frequenz am Glasrohr erhalten wurden, sind in Tabelle II

Tabelle II.

	l cm	L cm		l cm	L cm
1	103,7	140	7	80	84
2	93,6	114	8	72	75
3	90	106	9	65,3	65,5
4	88,5	100	10	59	58,5
5	83,2	92	11	49,9	47
6	82	91	12	44,3	37,5

enthalten und nach Division durch den Drahtradius (2,76 cm) in Fig. 7 durch kleine Kreise wiedergegeben. Zum Vergleich ist die theoretische Kurve auch in die Figur eingetragen (die ausgezogene Kurve).

Wie die Figur lehrt, stimmt die beobachtete Kurve in ihrem unteren Teile mit der berechneten sehr gut überein. Und in dem theoretischen „oberen Grenzfalle" ist auch tatsächlich die dielektrische Welle von genau derselben Länge

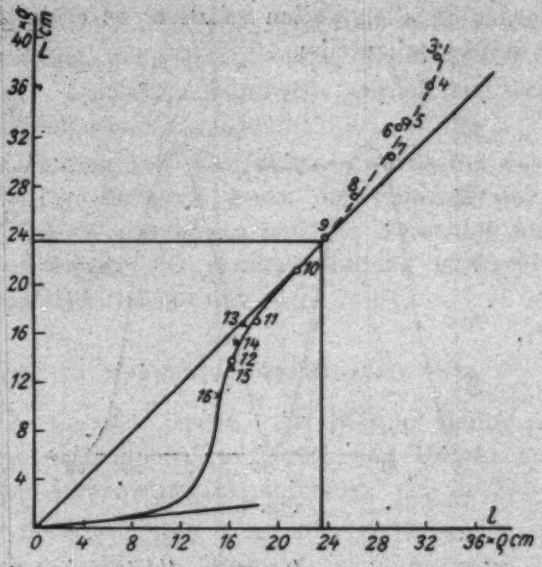


Fig. 7.

wie die Erregerwelle (Punkt 9), in Bestätigung der Formel: $l = L = 2{,}61 \cdot \varrho \cdot \sqrt{\nu^2 - 1}$. Um so überraschender ist es, daß in eben diesem Punkte die experimentelle Kurve nicht auch, wie die theoretische, einfach abbricht, sondern sich darüber hinaus ganz stetig fortsetzt. Bei Wellenlängen nämlich, die oberhalb der Grenzwelle lagen, wurden ebenso gute Maxima und Minima erhalten wie unterhalb. Dabei spielte aber die berechnete Grenzwelle auch im Experiment noch eine ausgezeichnete Rolle: unterhalb derselben ist die dielektrische Welle kürzer als die Erregerwelle, während sie oberhalb derselben die Erregerwelle an Länge übertrifft. Dieser letztere Umstand verdient besonders hervor-

gehoben zu werden, da er besagt, daß diese längeren dielektrischen Wellen längs der Achse eine Phasengeschwindigkeit besitzen, die größer ist als Lichtgeschwindigkeit. Nun hat Hondros[1]) in Weiterverfolgung der Theorie bereits gezeigt, daß Fortpflanzungsgeschwindigkeiten längs des Drahtes von Überlichtgeschwindigkeit dann auftreten, wenn der Vorgang mit seitlicher Strahlung verbunden ist, aber auch, daß gerade eine solche mit Strahlung verbundene „elektrische symmetrische" Welle, mit der wir es hier zu tun haben, nicht existieren soll. Seine Betrachtungen beziehen sich jedoch nur auf Metalldrähte, während die entsprechende Theorie für dielektrische Drähte noch nicht vorliegt. Um die Abweichung unseres Experiments von der Theorie zu erklären, werden wir somit zu der Annahme geführt, daß es sich bei diesen Wellen nicht um eigentliche „Drahtwellen" handelt, sondern um solche, die mit Strahlung verbunden sind. Als Ursache für deren Möglichkeit kommt nur die benutzte Erregungsart in Frage, die, wie oben ausgeführt, den Voraussetzungen der „Drahtwellen" nicht streng entspricht.

Der kürzesten vom Erreger gelieferten Wellenlänge entspricht, bei Verwendung des Glasrohres, der Punkt 12 der Kurve Fig. 7. Es besteht aber die Möglichkeit, mit den verfügbaren Frequenzen den Verlauf der Kurve nach der Seite der kürzeren Wellenlängen noch weiter zu verfolgen durch Wahl eines größere Drahtradius. Zu diesem Zwecke wurde das bereits erwähnte Papprohr hergerichtet. Die mit diesem erhaltenen Werte sind in Tabelle III, bzw. in Fig. 7 durch

Tabelle III.

	l cm	L cm
13	83,1	80
14	79	70
15	76,8	63
16	72,5	51

Kreuze wiedergegeben. Sie begleiten zwar die theoretische Kurve noch ein kleines Stück weiter; aber der Erreger ließ

1) Hondros, s. a. O. S. 941.

bei diesen Versuchen nur eine Ausnutzung bis zu minimal 72,5 cm zu, da sich für höhere Frequenzen eine starke Rückwirkung vom dielektrischen Draht auf den Erreger bemerkbar machte, die ein genaues Einstellen der Erregerwelle sehr erschwerte. Weitere Versuche in dieser Richtung wurden daher nicht unternommen, zumal das Erreichte bereits eine sehr gute Bestätigung der Theorie bedeutet.

Die Intensität der stehenden Wellen war im allgemeinen recht groß. In den Bäuchen wurden Galvanometerausschläge erhalten, die einer Spannung in der Größenordnung von 1 Millivolt entsprachen. Nur bei den kürzeren Wellenlängen nahm die Intensität sehr schnell ab. So betrug sie im Punkte 12 nur etwa $^1/_{1000}$ des Betrages im Punkt 9. Dies liegt zum Teil daran, daß die Erregerwellen für hohe Frequenzen weniger intensiv sind; ein anderer Grund aber dürfte in dem Umstand zu suchen sein, daß bereits bei diesen Wellenlängen ein großer Teil der Kraftlinien gar nicht mehr ins Außenfeld gelangt, sondern, wie es das Kraftlinienbild Fig. 2b veranschaulicht, ganz im Drahtinnern verläuft. — Für längere Wellen, als die in Tabelle III mitgeteilten, wichen die am Papprohr erhaltenen Daten nicht unerheblich von der theoretischen Kurve ab, was wiederum in dem ungleichen Verhältnis von Wellenlänge und Schirmgröße begründet sein dürfte.

3. *Einfluß der Leitfähigkeit.* Um die auch von Herrn Zahn behandelte Frage, welchen Einfluß ein Leitvermögen des Drahtes auf die Ausbildung der dielektrischen Wellen hat, zu untersuchen, wurde bei einer unveränderten Einstellung des Erregers das Glasrohr mit verschieden stark angesäuertem Wasser gefüllt und jedesmal die Wellenkurve aufgenommen. Fig. 8 zeigt das Resultat. Kurve 1 bezieht sich auf destilliertes Wasser. Wurde dasselbe durch Leitungswasser vom Leitvermögen $\varkappa = 0{,}0005$ ersetzt (Kurve 2), so gingen die Maximalausschläge um etwa 10% zurück, während in der Wellenlänge kein merklicher Unterschied festzustellen war. Bei weiterer Steigerung der Leitfähigkeit aber, bis auf $\varkappa = 0{,}0236$, nahm nicht nur die Intensität immer mehr ab (Kurve 3), sondern gleichzeitig verkürzte sich auch die Wellenlänge, die in diesem Falle nur noch 92,5 cm betrug gegenüber 100 cm bei destilliertem Wasser. Aber nicht beide Einflüsse gingen in gleichem Sinne weiter.

War nämlich $x = 0{,}0770$ (Kurve 4), so wurde die Intensität wieder größer und übertraf für $x = 0{,}2750$ (Kurve 5) sogar die am destillierten Wasser beobachtete, während die Wellenlänge schließlich bis auf 90 cm abgenommen hatte, mithin der Erregerwellenlänge, die 88,5 cm betrug, immer näher gekommen war.

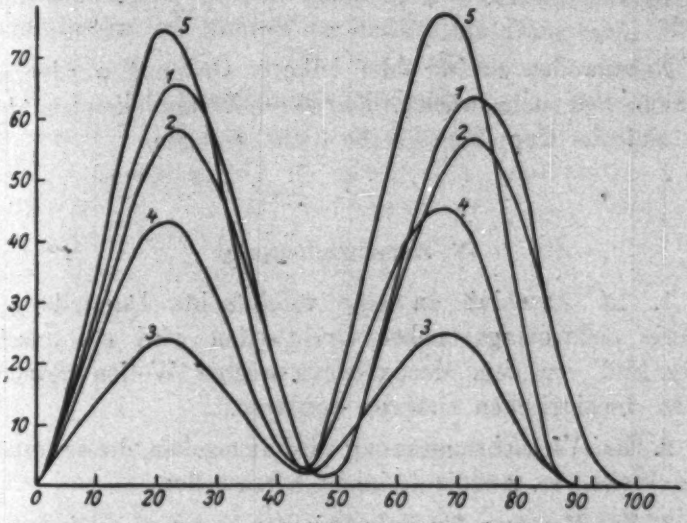


Fig. 8.

Diese Kurven zeigen mit weit größerer Deutlichkeit, als es bei Herrn Zahns Versuchen der Fall ist, daß mit zunehmender Leitfähigkeit die dielektrischen Wellen, also die Nebenwellen, mehr und mehr verschwinden, daß von einer gewissen Leitfähigkeit an aber auch die Leitungs- oder Hauptwellen merklich werden und schließlich den Vorgang allein beherrschen.

Da die Theorie für ein Drahtmaterial, das sowohl Dielektrizitätskonstante als auch mäßiges Leitvermögen besitzt, noch nicht explicite entwickelt ist, und somit ein Vergleich zwischen Experiment und Theorie nicht angestellt werden kann, wurde der Einfluß der Leitfähigkeit in quantitativer Hinsicht nicht weiter verfolgt.

4. *Sonstige Fragen.* Eine Neigung der elektrischen Kraftlinien gegen die Längsrichtung des Drahtes durch Ermittlung

der Knoten und Bäuche in verschiedenen Abständen von der Drahtoberfläche feststellen zu wollen, wie es Herr Zahn unternommen hat, ist, wie der Anblick der Kraftlinienbilder (Fig. 2) zeigt, gegenstandslos, da eine solche gerade in den Knoten und Bäuchen einmal gar nicht vorhanden ist und zudem beim Zusammenwirken der direkten und reflektierten Welle unter der Voraussetzung guter Reflexion überhaupt aufgehoben werden würde.

Nebenwellen zweiter oder höherer Ordnung wurden nicht mit Sicherheit nachgewiesen. Für deren Zustandekommen dürfte eine einfache Kopplungsscheibe nicht genügen.

IV. Zusammenfassung.

1. Im Anschluß an eine vereinfachte Darstellung der Theorie elektromagnetischer Drahtwellen wird ein anschauliches Bild von dem Mechanismus solcher Wellen gewonnen, die an dielektrischen Drähten auftreten.

2. Eine Versuchsanordnung wird angegeben, die es gestattet, diese Wellen in größter Reinheit herzustellen.

3. Zur Messung der Frequenz des Erregers — einer Glühkathodenröhre in der Barkhausen-Kurzschen Schaltung —, der nur lose Koppelung zuläßt, wird ein Paralleldrahtsystem angegeben, dessen Brücke einen empfindlichen Kristalldetektor enthält.

4. Die Theorie wird durch das Experiment quantitativ bestätigt.

5. Das von der Theorie abweichende Resultat, daß am Draht auch Wellen möglich sind, deren Länge größer ist als die berechnete „obere Grenzwellenlänge", wird erklärt durch die Annahme, daß es sich bei diesen Wellen nicht um eigentliche „Drahtwellen" handelt, sondern um solche, die mit Strahlung verbunden sind. Sie pflanzen sich längs des Drahtes mit Überlichtgeschwindigkeit fort.

6. Bei sukzessiver Vergrößerung der Leitfähigkeit des Drahtmaterials wird verfolgt, wie die dielektrischen Wellen allmählich in Leitungswellen übergehen.

Die vorliegende Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Universität Kiel angefertigt. Meine erste Einführung in die Praxis der elektrischen Schwingungen erhielt ich vor dem Kriege durch Herrn Prof. Dr. Zahn. Bei Ausführung der vorliegenden Untersuchungen erfreute ich mich besonders des fördernden Interesses von Herrn Geheimrat Prof. Dr. Dieterici und Herrn Prof. Dr. Madelung. Diesen meinen hochverehrten Lehrern spreche ich meinen verbindlichsten Dank aus.

(Eingegangen 2. Juni 1920.)

4. *Über die Isothermen des Wasserstoffs;* *von L. Holborn.*

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

An die früheren Bestimmungen[1]) von Isothermen der Luft, des Argons und des Heliums sind nun Messungen am Wasserstoff angeschlossen worden. Sie beziehen sich auf die Temperaturen 0°, 50° und 100° und auf die Drucke zwischen 20 und 100 Atm. Zur Verwendung kam die alte Versuchsanordnung mit nur unwesentlichen Änderungen: so war z. B. zwischen das Piezometer und die Hochdruck-Quecksilberpumpe eine Quecksilberfalle eingeschaltet. Das Piezometergefäß I aus Jenaer Glas 59^{III} hat auch die neuen Versuche ausgehalten, bis zuletzt die Kapillare innerhalb des Eisenmantels während des Einpumpens von Gas zerbrach. Die Kittungen des Gefäßes waren dagegen öfter, ebenso wie die der Hochdruckpumpe zu erneuern, woraus sich die kleinen Änderungen des schädlichen Raumes im Hochdruckvolumen erklären. Auch der schädliche Raum des Niederdruckvolumens änderte sich etwas bei der neuen Zusammensetzung des Piezometers.

Der Wasserstoff wurde durch Elektrolyse von verdünnter Schwefelsäure entwickelt, zweimal über festes Kaliumhydroxyd, dann über glühendes Kupfer geleitet und nach dem Trocknen durch Phosphorpentoxyd in einem Glaskolben von 14 l Inhalt aufgefangen, der ebenso wie die übrige Leitung vorher mehrfach mit Wasserstoff gespült und zuletzt durch eine Sprengelsche Pumpe soweit ausgepumpt war, daß in einem angeschmolzenen Geißlerschen Rohr die Entladung aussetzte. Der mit Wasserstoff von nahezu Atmosphärendruck gefüllte Kolben wurde

1) L. Holborn u. H. Schultze, Ann. d. Phys. 47. S. 1089. 1915. — Eine weitere Erörterung der dort angegebenen pv-Werte siehe in den Wärmetabellen der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt, herausgegeben von L. Holborn, K. Scheel u. F. Henning, Braunschweig 1919.

mit einem Hahn verschlossen, vom Entwicklungsapparat getrennt und an den Kreislauf angeschmolzen, in welchem das Gas nach der Kompression durch die Hochdruckpumpe in das Piezometergefäß gelangte und von da nach dem Entspannen in das Niederdruckvolumen, dessen Druck bei Zimmertemperatur gemessen wurde. Bevor der Hahn der Vorratsflasche jedoch geöffnet wurde, pumpte man die Verbindungslinie durch eine besondere Abzweigung leer, und erst dann strömte der Wasserstoff in den geschlossenen Kreislauf, wobei der Vorratskolben zur Aufbewahrung des zum Versuche nicht nötigen Gasrestes diente. Da man mit der Hochdruckpumpe der schnelleren Wirkung wegen immer vom Atmosphärendruck ausging, wurde der Wasserstoff auf diesen Druck anfangs durch eine Töplersche Pumpe und mit weiter abnehmendem Druck des Niederdruckvolumens durch abwechselnd abgekühlte und erwärmte Holzkohle komprimiert. Diese diente auch zur Herstellung des vollständigen Vakuums im Meßvolumen, in welches das Gas nach der Entspannung des Piezometers einströmte. Vor dem Einlassen des Wasserstoffs in die Kreisleitung wurde diese durch eine Ölpumpe evakuiert und darauf ebenfalls durch gekühlte Holzkohle von den letzten Luftresten befreit. Auf diese Weise hielt sich das Meßgas rein; seine zweimalige Erneuerung im Laufe der Versuche hatte keinen Einfluß auf die Messungen.

Tab. I enthält die Ergebnisse. In der zweiten Spalte t_h steht die Temperatur, auf der sich der Hochdruckraum vor dem Entspannen befand; in der dritten Spalte P_h sein Druck, und in der vierten Spalte das Volumen V_h, welches das komprimierte Gas bei den runden Temperaturwerten 0°, 50° und 100° einnehmen würde, wobei das kleine, auf Zimmertemperatur befindliche schädliche Volumen V_h' eingerechnet ist. Die Spalte t_u enthält die Temperatur des Niederdruckraumes, der aus verschiedenen im Wasserbade befindlichen Glaskolben bestand; die Spalte P_u den Niederdruck und die Spalte V_u das Volumen, das auf die Temperatur 0° des entspannten Gases bezogen ist. Zu den Volumen V_u gehören außer dem erwähnten Glaskolben das Piezometergefäß V_u' von der Temperatur t_h und die Verbindung V_u'' zwischen beiden und dem Niederdruckmanometer, die sich auf Zimmertemperatur befand. In der vorletzten Spalte stehen die hieraus folgenden

Tabelle I.

Versuch Nr.	t_h	P_h mm Hg	V_h ml	V_h' ml	t_u	P_u mm Hg	V_u ml	V_u' ml	V_u'' ml	$vp = V_hP_h/V_uP_u$ beobachtet	beob.—ber.
13	0°	19232	110,797	0,321	12,44°	779,20	2694,11	110,48	78,69	1,01505	−0,00005
2	0	19377	110,795	0,319	13,55	787,76	2683,93	110,48	78,14	1,01541	+ 18
14	0	19481	110,797	0,321	12,28	788,78	2695,27	110,48	78,47	1,01527	− 04
1	0	19544	110,797	0,321	13,32	793,72	2686,18	110,48	78,40	1,01564	+ 27
3	0	36906	110,790	0,320	13,84	762,13	5208,55	110,48	78,15	1,03003	+ 06
15	0	37076	110,791	0,321	12,57	762,39	5231,02	110,47	78,48	1,02999	− 12
4	0	37165	110,789	0,319	13,98	767,66	5206,11	110,48	78,13	1,03026	+ 08
16	0	53698	110,784	0,321	13,80	680,79	8368,39	110,46	78,35	1,04419	− 15
17	0	55627	110,784	0,321	13,83	704,12	8367,31	110,46	78,22	1,04600	00
18	0	73395	110,778	0,321	13,86	703,21	10893,53	110,46	78,32	1,06137	− 08
19	0	74425	110,778	0,321	13,91	712,51	10891,60	110,46	78,32	1,06240	+ 05
10	$50,13_6$	18858	110,894	0,377	13,56	653,95	2667,07	93,40	78,19	1,19901	+ 11
9	$50,12_3$	18887	110,899	0,377	13,73	654,94	2665,55	93,40	78,14	1,19889	+ 03
11	$50,14_5$	37066	110,885	0,377	13,39	650,58	5199,72	93,39	78,23	1,21498	− 13
12	$50,00_4$	37251	110,941	0,377	12,68	652,59	5212,43	93,43	78,50	1,21493	− 34
28	$50,02_8$	56125	110,934	0,389	15,13	781,03	6470,83	93,39	78,16	1,23198	− 10
26	$49,94_1$	71945	110,966	0,388	14,86	770,02	8321,00	93,42	78,32	1,24600	− 15
27	$50,25_1$	73010	110,862	0,388	15,04	780,35	8315,83	93,37	78,35	1,24732	+ 21
7	$99,93_7$	14916	111,121	0,433	14,53	821,58	1463,40	81,04	77,92	1,37859	− 10
8	$99,42_8$	14954	111,277	0,434	14,75	842,06	1432,97	81,15	48,39	1,37906	+ 33
6	$99,97_4$	37316	111,103	0,434	13,89	748,59	3958,84	81,02	78,01	1,39897	− 20
5	$99,98_4$	37353	111,102	0,433	13,71	748,92	3961,38	81,03	78,17	1,39883	− 37
23	$99,96_6$	56075	111,085	0,420	15,98	682,99	6440,55	81,03	78,13	1,41609	+ 14
22	$100,24_1$	56085	111,021	0,431	14,66	679,55	6468,83	80,94	77,91	1,41646	− 22
24	$100,04_1$	56689	111,064	0,420	15,87	689,75	6443,04	81,02	78,26	1,41685	− 02
21	$99,63_7$	74534	111,186	0,430	14,42	694,94	8320,98	81,11	77,90	1,43312	− 06
25	$100,07_0$	74561	111,042	0,418	15,68	697,15	8285,08	80,34	78,13	1,43343	+ 22
20	$99,91_0$	74651	111,104	0,430	14,13	694,63	8329,31	81,05	78,08	1,43352	+ 23

pv-Werte, und in der letzten deren Abweichungen von den sogleich anzugebenden Formeln.

Als Einheit des Drucks gilt für die pv-Werte eine Quecksilbersäule von 1 m Höhe, bezogen auf 0° und die normale Schwere von 980, 665 cm/sec², und als Einheit des Volumens der von dem Gase unter diesem Druck bei 0° eingenommene Raum.

Die Isothermen für 50° und 100° weisen innerhalb der Beobachtungsgenauigkeit, die einige Zehntausendstel beträgt, einen linearen Verlauf auf, während die Isotherme von 0° etwas von einer Geraden abweicht, jedoch im ganzen Beobachtungsbereich nicht viel mehr als 1 Promill. Es gelten die folgenden Formeln, bei deren Berechnung als Grenze des Ausdehnungskoeffizienten für die äußerste Verdünnung der Wert 0,0036618 angenommen wurde; für

$$0°: \; pv = 0{,}99918 + 0{,}00082094\, p + 0{,}0_{6}3745\, p^2,$$
$$50°: \; pv = 1{,}18212 + 0{,}00089000\, p,$$
$$100°: \; pv = 1{,}36506 + 0{,}00091400\, p.$$

Aus diesen Gleichungen folgt Tab. II, in die auch noch die für 20° interpolierten pv-Werte aufgenommen sind, weil sie für den Gebrauch des mit Wasserstoff gefüllten Gasmanometers von Bedeutung sind.

Tabelle II.

p	pv			
m Hg	0°	20°	50°	100°
0	0,99918	1,07236	1,18212	1,36506
1	1,00000	1,07320	1,18301	1,36597
5	1,00329	1,07660	1,18657	1,36962
10	1,00742	1,08086	1,19102	1,37418
15	1,01158	1,08514	1,19547	1,37875
20	1,01575	1,08942	1,19992	1,38332
25	1,01994	1,09371	1,20437	1,38789
30	1,02414	1,09801	1,20882	1,39246
35	1,02837	1,10232	1,21327	1,39703
40	1,03261	1,10665	1,21772	1,40160
45	1,03688	1,11099	1,22217	1,40617
50	1,04116	1,11534	1,22662	1,41074
55	1,04546	1,11970	1,23107	1,41531
60	1,04978	1,12408	1,23552	1,41988
65	1,05412	1,12846	1,23997	1,42445
70	1,05848	1,13286	1,24442	1,42902
75	1,06285	1,13726	1,24887	1,43359
76	1,06372	1,13814	1,24976	1,43450

Bei den von uns beobachteten Temperaturen sind bisher nicht viele pv-Werte für Wasserstoff bestimmt worden. Von Amagat[1]) liegt nur ein Wert für 0° vor, der (in unsere Einheiten umgerechnet) 1,0688 für $p = 76$ m Quecksilber beträgt und der um 0,5 Proz. größer ist als unseren Bestimmungen entspricht. Die Abweichung liegt in demselben Sinne, wie sie die pv-Werte für Luft, die Amagat in derselben Arbeit mitteilt, gegen die unsrigen aufweisen. Für Wasserstoff gibt er noch Werte für die 15,5°-Isotherme von 100 zu 100 Atm. Der Wert für 100 Atm. (76 m Hg) ist um 0,8 Proz. größer als der unsrige.

Tabelle III.

t	p m Hg	pv	$(L-H)\cdot 10^4$	t	p m Hg	pv	$(L-H)\cdot 10^4$
0°	Kam. Onnes u. Hyndman			20°	Kam. Onnes u. Hyndman		
	34,20	1,0291	+ 14		36,51	1,1039	+ 3
	37,54	1,0315	+ 10		39,69	1,1065	+ 1
	40,45	1,0342	+ 12		42,88	1,1090	− 1
	Kam. Onnes u. Braak				Kam. Onnes, Dorsman u. Holst		
	20,77	1,0149	− 15		51,00	1,1159	− 3
	27,06	1,0198	− 18,5		54,51	1,1194	+ 2
	32,99	1,0248$_5$	− 18		57,60$_5$	1,1226	+ 6
	38,44	1,0294	− 18,5		60,30	1,1247	+ 4
20°	Schalkwijk				63,28	1,1272	+ 3
	5,11	1,0765	− 2		66,56	1,1302	+ 4
	6,91	1,0777	− 5		[68,79	1,1333	+ 15]
	8,68	1,0796	− 1		Kam. Onnes, Crommelin u. Smid		
	10,54$_5$	1,0814	0		49,59	1,1151	+ 1
	10,69	1,0812	− 3,5		55,54	1,1205	+ 4
	12,57$_5$	1,0830	− 1		58,80	1,1238	+ 9
	13,73$_5$	1,0836	− 5		61,70	1,1265	+ 9
	17,60	1,0875	+ 1		64,70	1,1293	+ 11
	21,04	1,0900	− 3		67,17	1,1318	+ 14
	22,14$_5$	1,0910	− 3		70,27	1,1347	+ 16
	24,86	1,0929	− 6,5		73,33	1,1374	+ 16,5
	26,86	1,0946	− 7		76,26	1,1402$_5$	+ 19
	28,03	1,0963	0	100°	Kam. Onnes u. Braak		
	33,62$_5$	1,1009	− 2		23,54	1,3852	− 14
	39,68$_5$	1,1064$_5$	+ 1		30,24$_5$	1,3904	− 23
	45,61	1,1115	− 1		38,19	1,3969	− 31

1) E. H. Amagat, Ann. chim. phys. (6) 29. S. 68. 1893.

Außerdem haben Kamerlingh Onnes und seine Mitarbeiter im Leidener Laboratorium[1]) pv-Werte des Wasserstoffs bestimmt, von denen allerdings nur einige für 0° und 100° gelten. Von den tiefen Temperaturen abgesehen beziehen sich die meisten Bestimmungen auf 20°; hier liegen vier Beobachtungsreihen vor, von welchen die ersten beiden bis 60 Atm., die beiden folgenden bis 100 Atm. reichen. In Tab. III sind alle Werte zusammengestellt: neben dem Druck p und dem in Leiden beobachteten pv-Wert ist der Unterschied zwischen der Leidener (L) Messung und der unsrigen (H) angegeben. Nur bei der letzten Reihe für 20° weist die Größe (L—H) einen ausgesprochenen Gang auf, sonst bleibt sie unter 1 Promill. Bei 0° und 100° ist der Unterschied durchweg größer, wobei zu bemerken ist, daß die Leidener Werte für 100° aus Beobachtungen der beobachteten 100,2°-Isotherme abgeleitet worden sind.

Die Isotherme Schalkwijks liegt den Druckmessungen Witkowskis[2]) zugrunde, die auch nur bis 60 Atm. reichen. Seine pv-Werte des Wasserstoffs für 0° und 100° weichen um 0,2 Promille von den unsrigen ab.

Stellt man die beobachteten pv-Werte als Funktion von $1/v$ dar, so reichen ebenfalls quadratische Gleichungen aus. Es gilt für

$$0°: \quad pv = 0{,}99918 + \frac{0{,}00081613}{v} + \frac{0{,}0_5 1220}{v^2},$$

$$50°: \quad pv = 1{,}18112 + \frac{0{,}0010505}{v} + \frac{0{,}0_5 1015}{v^2},$$

$$100°: \quad pv = 1{,}36506 + \frac{0{,}0012450}{v} + \frac{0{,}0_5 1240}{v^2}.$$

Tab. IV enthält die aus diesen Formeln folgenden pv-Werte für runde Werte von $1/v$ und Tab. V die mittleren Ausdehnungs- und Spannungskoeffizienten zwischen 0 und 50° und zwischen 0 und 100°. Die mittleren Ausdehnungskoeffizienten $a_{0,50}$ und $a_{0,100}$ nehmen mit wachsendem Drucke ab, während die Spannungskoeffizienten $\beta_{0,50}$ und $\beta_{0,100}$ zunehmen. Beim

1) Communications from the Lab. at Leiden: Nr. 70, J.C. Schalkwijk 1901; Nr. 78, H. Kam. Onnes u. F. Hyndman 1902; Nr. 100b, H. Kam. Onnes u. C. Braak 1907; Nr. 146a, H. Kam. Onnes, C. Dorsman u. G. Holst 1915; Nr. 146c, H. Kam. Onnes, C.A. Crommelin u. E. J. Smid 1915.

2) Witkowski, Krakauer Anzeiger 1905, S. 305.

Helium nehmen beide Koeffizienten in demselben Temperaturgebiet ab. Dies kommt daher, daß die Neigung der Isothermen gegen die p-Achse mit wachsender Temperatur beim Wasserstoff zunimmt, beim Helium dagegen etwas abnimmt.

Tabelle IV.

$1/v$	0°	50°	100°
0	0,99918	1,18212	1,36506
1	1,00000	1,18317	1,36631
5	1,00329	1,18740	1,37132
10	1,00746	1,19273	1,37763
15	1,01170	1,19810	1,38401
20	1,01599	1,20354	1,39046
25	1,02034	1,20902	1,39696
30	1,02476	1,21455	1,40353
35	1,02924	1,22013	1,41016
40	1,03378	1,22576	1,41684
45	1,03838	1,23145	1,42361
50	1,04303	1,23718	1,43041
55	1,04775	1,24296	
60	1,05254	1,24880	
65	1,05738		
70	1,06229		

Tabelle V.

p	$100\,\alpha_{0,50}$	$100\,\alpha_{0,100}$	$1/v$	$100\,\beta_{0,50}$	$100\,\beta_{0,100}$
0	0,3662	0,3662	0	0,3662	0,3662
1	0,3660	0,3660	1	0,3663	0,3663
5	0,3654	0,3651	5	0,3670	0,3668
10	0,3645	0,3641	10	0,3678	0,3674
15	0,3636	0,3630	15	0,3685	0,3680
20	0,3626	0,3619	20	0,3692	0,3686
25	$0,3616_5$	0,3608	25	0,3698	0,3691
30	$0,3606_5$	0,3596	30	0,3704	0,3696
35	0,3596	0,3585	35	0,3709	0,3701
40	0,3585	0,3573	40	0,3714	0,3705
45	0,3574	$0,3561_5$	45	0,3719	0,3710
50	0,3563	0,3550	50	0,3723	0,3714
55	0,3551	0,3538	55	0,3726	
60	0,3539	$0,3525_5$	60	0,3729	
65	0,3526	0,3513			
70	0,3513	0,3501			
75	0,3500	0,3488			
76	0,3498	0,3486			

(Eingegangen 11. Juni 1920.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1920. № 24.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 63.

1. *Über die spezifische Wirkung der polarisierten Strahlung*[1]; von *Fritz Weigert.*

(Hierzu Tafel II.)

I. Einleitung. — II. Methodisches. A. Belichtung. B. Plattenmaterial. C. Beobachtung. — III. Die Wirkung des zirkular polarisierten Lichtes. — IV. Longitudinal- und Transversaleffekt. A. Beobachtungen. B. Die Lage der optischen Achse. C. Transversaleffekt im natürlichen Licht. — V. Qualitative Beobachtung der spezifischen Wirkungen der Farben. — VI. Quantitative Meßmethoden. A. Dichroismus. B. Doppelbrechung. — VII. Quantitative Messung der spezifischen Wirkungen der Farben. A. Der Dichroismus. B. Die Doppelbrechung. C. Die Nachwirkungen im Dunkeln. — VIII. Die Farbenänderungen der belichteten Photochloride. A. Die Farbenanpassung der Photochloride. B. Der indirekte Effekt. C. Die anomalen Farben im Polarisationsmikroskop. — IX. Schluß. — X. Zusammenfassung.

I. Einleitung.

Im Sommer 1919 wurde in den Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft ein bis jetzt unbekannter Effekt beschrieben, welchen linear polarisierte Strahlung in verschiedenen lichtempfindlichen Schichten hervorruft.[2]) Die Schichten hatten durch die polarisierte Belichtung dauernd die Eigenschaften doppelbrechender Kristalle angenommen, sie zeigten Dichroismus und Anisotropie und zwar lagen die Auslöschungsrichtungen bei der Beobachtung zwischen gekreuzten Nicols in den Schnittlinien, welche die Schwingungsebenen des elektrischen und magnetischen Vektors der erregenden linear polarisierten Strahlung mit der Ebene der lichtempfindlichen Schicht bildeten. Im folgenden sollen diese beiden ausgezeichneten Richtungen als die *e-Richtung* und die *m-Richtung* bezeichnet werden. Die Polarisationsebene der Strahlung hatte sich also in der *m*-Richtung dauernd in der Schicht ab-

1) Einige Ergebnisse der vorliegenden Untersuchungen wurden schon kurz in der Zeitschr. f. Physik 2. S. 1. 1920 mitgeteilt.

2) F. Weigert, Verh. 21. S. 479. 615. 623. 1919.

gebildet. Unter einer dauernden Wirkung, welche bei diesem „Photodichroismus" und der „Photoanisotropie" auftreten, soll im Gegensatz zu Momentaneffekten, welche in der Fluoreszenz und in gewissem Sinne auch in der Phosphoreszenz vorliegen, Nachwirkungen verstanden werden, deren Lebensdauer sich auf mindestens mehrere Tage beläuft. Dies gilt in erster Linie von der Photographie, so daß man in diesem Fall von einer Photographie der Polarisationsebene sprechen kann.

Die am leichtesten zu beobachtende Veränderung der Schichten ist eine verschiedene Veränderung der Lichtabsorption in der *e*- und *m*-Richtung, welche in der gewöhnlichen Ausdrucksweise als ein Dichroismus bezeichnet werden kann. Die Effekte sind bei genügend langer Einwirkung der polarisierten Strahlung recht bedeutend und lassen sich schon mit groben Hilfsmitteln nachweisen. In der Fig. 1 (Taf. II) sind vier kreisförmige belichtete Stellen photographisch wiedergegeben, welche mit natürlichem Licht aufgenommen (obere Reihe) keine besondere Merkmale zeigen, mit vertikaler und horizontaler Polarisationsebene durch ein Nicol photographiert aber sehr deutlich den beschriebenen Dichroismus erkennen lassen (mittlere und untere Reihe). Die genaue Besprechung der Figuren erfolgt S. 688. Schwächere Absorptionsveränderungen lassen sich nur durch andere Hilfsmittel erkennen, über die im Kapitel VI berichtet werden soll.

In den früheren Mitteilungen wurde nur die Beobachtung beschrieben, daß die Schicht dann heller aussah, wenn die Polarisationsebenen bei der Erregung der Schicht und bei der Betrachtung mit einem Nicol parallel waren oder wenn die Polarisationsebene des Betrachtungsnicols auch in der *m*-Richtung die Schicht schneidet. Die Fortführung der Versuche hat nun auch die Existenz eines inversen Effektes ergeben. Es soll deshalb im folgenden der schon bekannte Dichroismus als *positiv*, der inverse als *negativ* bezeichnet werden.

Wenn man die Intensität des in der *e*-Richtung schwingenden Strahles nach dem Passieren der absorbierenden erregten Schicht mit I_e, die der *m*-Richtung entsprechende mit I_m bezeichnet, soll als Maß für den Dichroismus D der dekadische Logarithmus des Verhältnisses

$$D = \log \frac{I_e}{I_m}$$

eingeführt werden, welcher positiv ist, wenn I_s größer als I_m ist, und im umgekehrten Fall negativ.[1]) Der Dichroismus 0,8 bedeutet also, daß die erregte Schicht beim Drehen des Beobachtungsnicols um 90° ihre Helligkeit wie 1 : 2 ändert. Solche starken Effekte sind mit Leichtigkeit zu erhalten.

In den folgenden Kapiteln sollen die Erscheinungen, welche an Photochloridschichten in Gelatine auftreten, eingehender beschrieben werden, weil dieses System etwas einfacher zu behandeln ist, als die Farbstoffschichten, über welche in einer weiteren Mitteilung berichtet wird.

II. Methodisches.

A. Belichtung.

Wie aus § 11 der zweiten Mitteilung hervorgeht, tritt die Anisotropie schon bei geringen Belichtungen auf, für deutliche Veränderungen sind jedoch ziemlich große Lichtintensitäten erforderlich. Da Sonnenlicht nicht immer zur Verfügung steht, und auch in bezug auf den Einfallswinkel und die Stärke zu variabel ist, verwendet man vorteilhaft eine gut regulierende Kohlenbogenlampe L (Fig. 2), deren Strahlen durch einen Glas- oder besser Quarzkondensor Q von ca. 8 cm Brennweite und

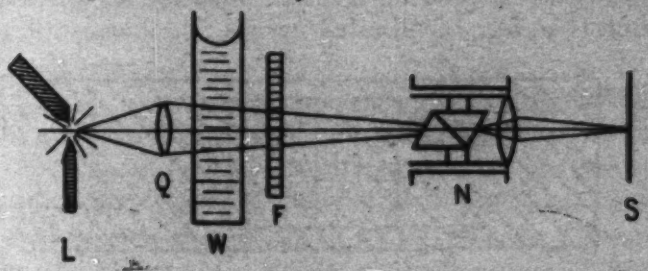


Fig. 2.

4 cm Durchmesser, nachdem sie ein dickes Wasserfilter W passiert haben, auf ein möglichst großes Nicolsches Prisma N konzentriert werden, das mit einer Glaslinse von ca. 10 cm Brennweite in einem Rohr gefaßt ist. Das System läßt sich in einem weiteren Rohr drehen, um den elektrischen Vektor in verschiedenen Richtungen einzustellen. Die im Strahlenweg hinter dem Nicol angebrachte Linse entwirft ein genügend gleichmäßig beleuchtetes Bild der Kondensorlinse auf der

1) Der logarithmische Wert steht in direkter Beziehung zu den veränderten Stoffmengen.

lichtempfindlichen Schicht S. Die Flächenhelligkeit läßt sich durch Veränderung der Größe des Kondensorbildes und durch Einsetzen anderer Linsen variieren. Als Farbenfilter F, welche hinter dem Wasserfilter eingeschaltet werden, können beliebige Farblösungen, Gelatinefilter und Farbgläser verwendet werden.

Das Bild des Kondensors auf der lichtempfindlichen Schicht ist ziemlich scharf, es empfiehlt sich jedoch, um gute Kontraste zu erhalten, die lichtempfindliche Platte, welche normal zu dem Strahlengang aufgestellt ist, mit einer schwarzen Papierblende zu bedecken.

Vorteilhaft konnten die Beobachtungen des § 10 der zweiten Mitteilung bei der weiteren Untersuchung verwertet werden, nach denen bei Einschaltung einer $\frac{1}{2}\lambda$-Glimmerplatte in Diagonalstellung der Effekt auf der Schicht so ist, als ob die Ebene des polarisierten Lichtes um 90° gedreht ist. Man kann so die dichroitischen Kontraste erhöhen, wenn man eine auf das verwendete Farbfilter abgestimmte $\frac{1}{2}\lambda$-Glimmerplatte durch Spaltung herstellt und durch einen scharfen Schnitt teilt. Die beiden Teile wurden dann so zwischen Glasplatten eingekittet, daß ihre Hauptschwingungsrichtungen einen Winkel von 45° bildeten, und die Kanten möglichst scharf aneinander grenzten (Fig. 3). Die Kante ging als Durchmesser durch eine

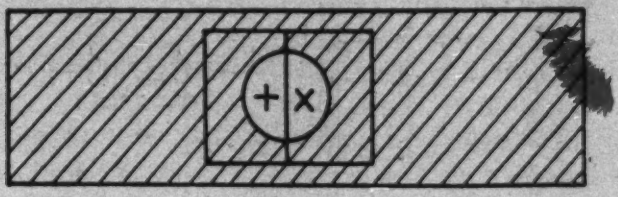


Fig. 3.

kreisrunde Blende von 8 mm Durchmesser. Beim Auflegen dieses Systemes auf die lichtempfindliche Schicht und Belichten mit linear polarisiertem Licht, dessen elektrischer Vektor in einer Hauptrichtung der Glimmerplatten lag, erhielt man dicht nebeneinander zwei halbkreisförmige Felder, deren Erregungsvektor um 90° gegeneinander gedreht war. Die Anordnung dieses Glimmersystems geht aus Fig. 3 hervor. In der Fig. 1 der Tafel ist Feld 1 mit demselben, Feld 2 und 3 ohne Glimmer mit senkrechter und horizontaler Richtung des elektrischen Vektors der erregenden Strahlung erregt. Bei

Feld 4 endlich wurde über die Photochloridschicht ein Quarzkeil gelegt, dessen optische Achse unter 45° zur Schwingungsrichtung der erregenden Strahlung lag (vgl. § 10 der zweiten Mitteilung). Die so in verschiedener Weise erregte Schicht wurde mit gelbrotem Licht auf eine sensibilisierte Trockenplatte kopiert (vgl. S. 697). Die in den drei Reihen untereinander liegenden Felder sind immer dieselben, doch wurde die oberste mit natürlichem Licht, die zweite mit senkrechtem, und die dritte mit horizontalem Lichtvektor kopiert. Man erkennt ohne weiteres den sehr deutlichen Dichroismus, und daß beim Wechsel der Schwingungsrichtung die hellen und dunklen Felder ihre Stellung vertauschen. Dasselbe gilt für die Streifen hinter dem Quarzkeil, welche photographisch die Stellen angeben, an denen der Gangunterschied der interferierenden Strahlen $n\,\pi/2$ und $n\,\pi$ beträgt.

B. Plattenmaterial.

Zur Präparierung der Photochloridplatten hat sich u. a. die Vorschrift von Valenta[1]) bewährt.

Es werden 3 Lösungen angesetzt:

A. 3,2 g Silbernitrat; 0,8 g Citronensäure; 16 ccm Wasser.
B. 9,6 g Gelatine; 0,28 g Ammoniumchlorid; 70 ccm Wasser.
C. 0,28 g Weinsäure, 0,14 g Natriumbicarbonat; 0,18 g Alaun; 14 ccm Wasser.

Zuerst wird B. und C. bei 50° gemischt, dann A. langsam eingerührt. Je schneller man die Platten nach dem Mischen gießt, um so durchsichtiger bleiben sie, was für die Bestrahlung mit polarisiertem Licht von Vorteil ist. Man breitet auf einer etwas angewärmten nivellierten 9×12 Platte möglichst schnell 2—5 ccm der Emulsion aus oder übergießt sie in freier Hand und läßt den Überschuß ablaufen. Die Präparation der ziemlich unempfindlichen Schichten kann bei gewöhnlicher künstlicher Beleuchtung geschehen. Nach dem Trocknen in senkrechter Stellung läßt man die Platten bei Tageslicht oder Bogenlicht bis zu dem gewünschten Grade anlaufen, eventuell hinter einem Blaufilter. Zur Wiedergabe des Spektrums (vgl. § 9 der zweiten Mitteilung, a. a. O.) ist ein ganz heller rosenroter Ton geeignet.

Es empfiehlt sich, nach dem Anlaufen die Platten gründlich auszuwässern (bis das verwendete Leitungswasser nicht mehr durch Chlorsilber getrübt wird). Die so behandelten

1) Vgl. Eder, Handb. d. Photogr. IV. S. 165.

Platten sind nach dem Trocknen gegen kurzwelliges Licht viel unempfindlicher geworden.[1])

C. Beobachtung.

Die Beobachtung der belichteten Stellen kann durch Drehen eines Nicols vor dem Auge geschehen. Besonders bei Verwendung der $\frac{1}{2}\lambda$-Glimmerdoppelplatte während der Erregung erkennt man den Dichroismus leicht, wenn er einen gewissen Grad überschritten hat.[2]) Bedeutend feiner lassen sich aber die Beobachtungen im Polarisationsmikroskop in parallelem Licht anstellen. Bei den auf die beschriebene Weise präparierten Schichten waren nämlich in Diagonalstellung der e- und m-Richtung zu den gekreuzten Nicols ähnliche anomale Farbenerscheinungen zu beobachten, wie sie im § 11 der zweiten Mitteilung für die Farbstoffschichten beschrieben waren. Wie im Kapitel VIII C ausgeführt wird, sind sie durch den Dichroismus hervorgerufen und bilden ein sehr empfindliches qualitatives Anzeichen dafür. Bei den dicht nebeneinander liegenden Feldern, deren e-Richtungen um 90° verdreht sind, sind besonders bei heller Beleuchtung die Farbenkontraste recht auffallend.

III. Über die Wirkung zirkular polarisierten Lichtes.

Die Wirkung zirkularpolarisierten Lichtes auf die lichtempfindlichen Schichten läßt sich am besten mit einem $\frac{1}{4}\lambda$-Glimmer-Doppelplättchen untersuchen, welches ebenso wie das in Fig. 2 abgebildete $\frac{1}{2}\lambda$-Glimmersystem angeordnet ist. Wenn eine Hauptrichtung der einen Plättchenhälfte mit der Schwingungsrichtung des erregenden linear polarisierten Lichtes parallel ist, trifft die Schicht hinter dieser Hälfte linear polarisiertes Licht, hinter der anderen zirkular polarisiertes. Die Energie des Lichtes hinter den beiden Hälften ist aber dieselbe, da sie aus demselben Plättchen geschnitten wurden und daher keine merklichen Absorptionsunterschiede zeigten.

1) Vor dem Auswaschen enthielt die Schicht überschüssiges Silbernitrat und Reduktionsmittel, wodurch im Licht eine starke Silberabscheidung stattfindet, die durch das Auswaschen vermieden wird.

2) Eine hinter dem $\frac{1}{4}\lambda$-Glimmer-Doppelsystem erregte Schicht ist durch eine Art Halbschattenwirkung geeignet, die unbekannte Schwingungsrichtung linear polarisierten Lichtes bequem und schnell aufzufinden. Über die Verwendungsmöglichkeit für meteorologische Zwecke soll an anderer Stelle berichtet werden.

Falls die Glimmerplatte gut auf die Farbe des erregenden roten Lichtes abgestimmt war, was natürlich streng nur für eine Wellenlänge gilt, verhielten sich die betreffenden Stellen ebenso, als wenn sie mit natürlichem Licht bestrahlt waren. Der Dichroismus, mit einem Nicol beobachtet, war unmerklich und auch im Polarisationsmikroskop war er nur sehr schwach zu erkennen, was wohl durch die Unvollkommenheit des $\frac{1}{4}\lambda$-Plättchens bedingt ist. Dies konnte sowohl an den Chlorsilberschichten als auch an den Farbstoffkollodiumplatten beobachtet werden.

Sehr interessant war es aber, daß auch der im § 12 der zweiten Mitteilung beschriebene Effekt des natürlichen Lichtes auftrat, und zwar erschien die mit zirkular polarisiertem Licht erregte Hälfte auch ohne Nicol deutlich heller in einer anderen Farbennuance als die mit linear polarisiertem Licht bestrahlte. Der Unterschied ist erheblich leichter zu beobachten, als bei der früher beschriebenen Versuchsanordnung, weil die beiden Felder unmittelbar aneinander grenzen.

Die immerhin noch vorhandene Möglichkeit, daß vielleicht dadurch eine Täuschung vorhanden sein kann, daß die eine Hälfte der Doppelplatte etwas stärker absorbiert als die andere, wurde trotz ihrer Unwahrscheinlichkeit (beide Hälften entstammten derselben Platte) noch auf folgende Weise ausgeschaltet. Durch Drehen des Nicols um 45° bei unveränderter Stellung der Doppelplatte wurden die linear und zirkular belichteten Hälften miteinander vertauscht. Dabei wechselte auch die hellere Hälfte ihren Platz. Dies wäre natürlich bei einer ungleichen Färbung nicht der Fall.

Ob bei der Belichtung mit zirkular polarisiertem Licht eine geringe Veränderung der optischen Drehung der Schicht eintritt, kann noch nicht mit Sicherheit entschieden werden, weil die optische Aktivität der festen Gelatine derartig inkonstant ist, daß diese Ermittlungen einer späteren Präzisionsuntersuchung vorbehalten bleiben müssen.[1])

1) Die Analyse des durch die zirkular polarisiert belichteten Stelle hindurchgegangenen Lichtes mit einem $\frac{1}{4}\lambda$-Plättchen ergab keinen Unterschied von natürlichem Licht. Beim Drehen eines Analysators wurden keine Helligkeitsschwankungen wahrgenommen. Von vornherein war es nicht unmöglich, daß die mit zirkular polarisiertem Licht bestrahlte Stelle eintretendes natürliches Licht teilweise in zirkular polarisiertes verwandeln könnte, wie es für das linear polarisierte der Fall ist.

Vorläufig kann man mit großer Wahrscheinlichkeit behaupten, daß zirkular polarisiertes Licht auf die lichtempfindlichen Systeme, welche den neuen Effekt zeigen, ebenso wirkt wie natürliches. Hierdurch ist die experimentelle Untersuchung des indirekten Nachweises für die spezifische Wirkung der polarisierten Bestrahlung, auf dessen Wichtigkeit im § 13 der zweiten Mitteilung hingewiesen wurde, sehr erleichtert, da man einfach durch Drehen einer $\frac{1}{4}\lambda$-Platte um 45° linear polarisiertes Licht in scheinbar natürliches von genau derselben Intensität umwandeln kann. Dies ist sonst nur durch drehende Polarisatoren oder diffuse Zerstreuung zu erreichen. Besonders im letzten Fall werden aber gleichzeitig die Intensitätsverhältnisse in unübersichtlicher Weise geändert.

Die Untersuchung der Photochloridschichten mit dieser Methode zeigte übrigens, daß schon bei den kürzesten Belichtungen, wenn überhaupt eine Farbänderung der Schicht eintritt, der indirekte Effekt vorhanden ist, der sich nach den oberflächlichen Schätzungen mit zunehmender Belichtungszeit nicht merklich verändert. Falls, wie im § 12 der zweiten Mitteilung vermutet wurde, Verarmungsvorgänge diese Erscheinung verursachen, müssen sie schon im Beginn der Belichtung einsetzen. Eine Deutung für die verschiedenen Farbennuancen wird im Kapitel VIII, B gegeben werden.

IV. Longitudinal- und Transversaleffekt.

Alle in den früheren Paragraphen beschriebenen Erscheinungen wurden auf den Schichten in derselben Richtung beobachtet, in welcher die Strahlung bei der Erregung aufgefallen war. Man kann hier von einem *Longitudinaleffekt* sprechen. Zur näheren Kenntnis des neuen Effektes war es aber auch wichtig, ihn in einer zur Erregungsstrahlung senkrechten Richtung zu untersuchen. Es ist dies ein *Transversaleffekt*.

A. Beobachtungen.

Um den Transversaleffekt in reiner Form kennen zu lernen, muß eine lichtempfindliche Schicht von solcher Dicke vorhanden sein, daß Strahlung in merklichem Betrag in Richtung der Schichtebene eindringen kann, deren Wirkung dann senkrecht zur Schicht beobachtet werden muß. Dies ist unter Benutzung der am Schluß des § 3 der ersten Mitteilung er-

wähnten Beobachtung zu erreichen, daß auch feuchte Photochloridschichten den spezifischen Effekt der polarisierten Strahlung zeigen.

Die Ausführung des Versuches geschieht am einfachsten in einer kleinen aus Glasstreifen zusammengekitteten Küvette, deren Form aus den Figg. 4 u. 5 ersichtlich ist, welche die Küvette von der Schichtebene und Schichtkante darstellen. Auf eine Glasplatte werden zwei Glasstreifen von ca. 1,5 mm Dicke aufgekittet, so daß zwischen ihnen eine 1 cm breite Rinne bleibt.

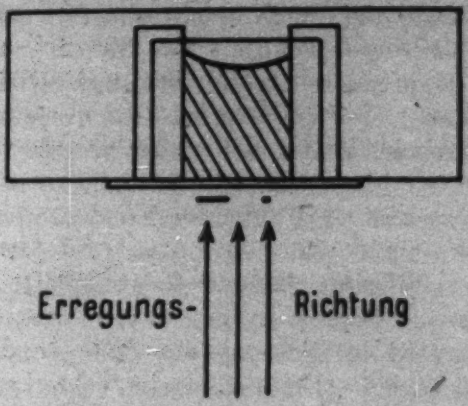


Fig. 4.

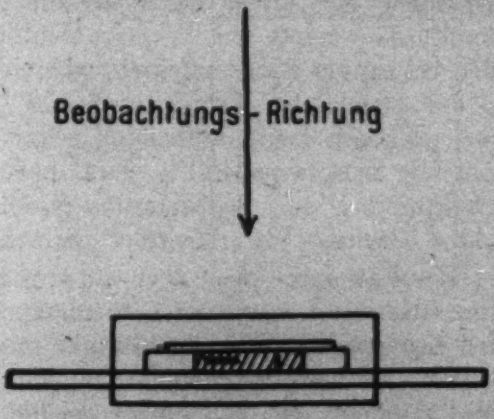


Fig. 5.

Die Schmalseite dieser Rinne wird durch einen Deckglasstreifen mit etwas Klebwachs verschlossen, und dann die Rinne mit einer Photochloridemulsion ausgegossen, die aus einer schwach angelaufenen und ausgewässerten Photochloridplatte durch

Abziehen der Schicht und Umschmelzen hergestellt war. Vor dem Erstarren wird die Rinne mit einem Deckglas bedeckt, so daß eine gleichmäßige feuchte Schicht von 1,5 mm Dicke entstand, die allerdings ziemlich dunkel gefärbt, aber doch noch für helles Licht durchscheinend war. Das Deckglas an der Schmalseite wurde mit schwarzem Papier so weit abgedeckt, daß die Strahlung nur durch einen schmalen Spalt direkt in die Schicht eindringen konnte. Vor diesem Spalt war eine $\frac{1}{2}\lambda$-Glimmer-Doppelplatte für Rot befestigt. (Nicht in den Figuren gezeichnet.) Die Stellung des Glimmersystemes war so, daß der elektrische Vektor der in die Schicht von der Seite eindringenden Strahlung teils in der Schicht, teils senkrecht zu ihr orientiert war. Das Bild der Kondensorlinse Q (Fig. 2) wurde auf der Glimmerplatte entworfen. Die Strahlung wurde durch eine mit Filterrot gefärbte Gelatineplatte filtriert. In der Fig. 4 ist die Schicht in der Papierebene angenommen. Die Strahlung tritt in Richtung der Pfeile in die Kante der feuchten Schicht ein. Der elektrische Vektor schwingt links in der Schicht, rechts senkrecht zu ihr.

Nach einer Exposition von 5 Minuten war die Schicht an der Eintrittsstelle der Strahlung etwa 2 mm weit deutlich aufgehellt, doch war die Hälfte, bei welcher der elektrische Vektor in der Schichtebene lag, etwas heller als die andere. Im Polarisationsmikroskop zeigte nur die erste deutlichen Dichroismus mit den bekannten Farbeneffekten, während die zweite, bei welcher der elektrische Vektor senkrecht zur Schicht orientiert war, praktisch keine Aufhellung zeigte. Mit einem Nicol erschien die anisotrope Hälfte dann heller, wenn der elektrische Vektor bei der Beobachtung parallel mit dem Erregungsvektor orientiert war (Positives Dichroisum).

Dasselbe Resultat wurde auch noch auf eine andere Weise erhalten. Ein Glaswürfel von 2 cm Kantenlänge wurde durch einen Tropfen Zedernöl in optischen Kontakt mit der Schicht einer Photochloridgelatineplatte gebracht und polarisierte Strahlung möglichst streifend auf die Schicht geleitet. Eine Aufhellung fand in allen Fällen statt, die Schicht war aber nur dann anisotrop, wenn der elektrische Vektor eine Komponente in der Schichtebene hatte.

Auch die Farbstoffkollodiumschichten, deren Eignung für den Effekt im § 6 der ersten Mitteilung beschrieben wurde,

verhielten sich analog. Da aber die feuchten Farbstoff-kollodiumlösungen nur sehr schwach den Effekt zeigen, konnte nur die Methode des streifenden Lichteinfalls zur Anwendung kommen. Hier wurden die Farbstoffschichten direkt auf eine Würfelfläche gegossen. Auch in diesem Fall konnte die Anisotropie im Polarisationsmikroskop nur dann beobachtet werden, wenn der elektrische Vektor eine Komponente in der Schichtebene hatte.

Bei der intensiven seitlichen Bestrahlung zeigten sowohl die Photochloridschichten als auch die Farbstoffschichten im roten Licht sehr deutlich das Tyndallphänomen. Da das Tyndallicht vorwiegend senkrecht zur Strahlenrichtung polarisiert ist, kann nur dann abgebeugte polarisierte Strahlung die Schicht durchsetzen, wenn der elektrische Vektor der einfallenden Strahlung in der Schichtebene liegt. Die Schicht wird also durch das Tyndallicht senkrecht mit polarisiertem Licht bestrahlt und die beobachteten Effekte ließen sich durch diesen sekundären Vorgang erklären. Daß tatsächlich das Tyndallicht allein genügt, um einer Photochloridschicht anisotrope Eigenschaften zu erteilen, konnte dadurch gezeigt werden, daß eine zweite Platte über die seitlich bestrahlte feuchte Schicht gelegt wurde. Sie zeigte sehr schwach die typischen Farbenerscheinungen.

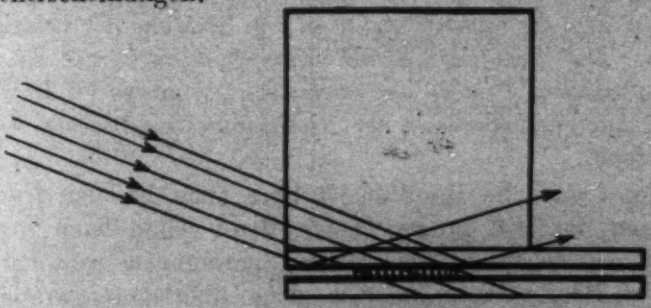


Fig. 6.

Um aber nachzuweisen, daß dieser sekundäre Effekt gegen die Hauptwirkung, welche durch die eintretende Strahlung direkt ausgeübt wird, zu vernachlässigen ist, wurde folgender Versuch angestellt, der in der Fig. 6 skizziert ist. Mit einem Glaswürfel wurde die *Glasseite* einer Photochloridplatte in optischen Kontakt gebracht und ein anderes Stück derselben Platte Schicht auf Schicht mit der ersten Platte in Berührung

gebracht. Nur an einer Stelle wurde aber durch einen kleinen Tropfen Zedernöl für optischen Kontakt zwischen den beiden Schichten gesorgt, während sie an den anderen Stellen durch eine dünne Luftschicht getrennt waren. Wie aus der Figur hervorgeht, kann nur an der Stelle des optischen Kontaktes die streifende einfallende Strahlung von der oberen Schicht in die untere eindringen, während sie an den anderen Stellen total reflektiert wird und die obere Schicht zweimal passiert. An diesen Stellen erhält die untere Schicht nur indirektes Tyndallicht. Wenn man das System 10 Minuten mit polarisiertem Licht, dessen elektrischer Vektor in der Schichtebene liegt, bestrahlt, ist die ganze untere Platte anisotrop geworden, aber unter dem Öltropfen ungleich stärker als unter der Luftschicht. Das Tyndallicht kann also den beobachteten Effekt nur zum kleinen Teil verursachen, und wir haben es mit einer direkten Wirkung der seitlich einfallenden Strahlung zu tun.

B. Die Lage der optischen Achse.

Alle hier angeführten Versuche führen übereinstimmend zu einem Resultat, das sich am reinsten aus dem Versuch mit der dicken feuchten Schicht ergibt:

Durch die Wirkung des linear polarisierten Lichtes werden die Stoffe, welche den neuen Effekt zeigen, optisch einachsig, und zwar liegt die optische Achse in der Richtung des elektrischen Vektors. Der ordentliche Strahl schwingt dann in der Richtung des magnetischen Vektors der erregenden Strahlung (m-Richtung) und der außerordentliche in der Richtung des elektrischen Vektors (e-Richtung).

Dieses einfache Resultat ist aber auch bei den feuchten Schichten nur von kurzer Dauer, denn schon nach wenigen Minuten entstehen in der Gallerte Spannungen, wodurch sich über die Photoanisotropie eine neue überlagert, welche die einfachen Verhältnisse verwischt. In festen Schichten von Gelatine und Kollodium entstehen daher durch die polarisierte Bestrahlung überhaupt keine optisch einachsigen Systeme, da die gespannten Schichten schon von vornherein eine optische Achse in der Schichtnormale besitzen. Durch Belichtung mit linear polarisiertem Licht senkrecht zur Schichtebene entstehen also optisch zweiachsige Gebilde und es ist sogar zu erwarten, daß sie recht verwickelte optische Eigen-

schaften besitzen. So wird z. B., da durch die Lichtabsorption die Wirkung der Strahlung von Schicht zu Schicht geringer wird, der Winkel der optischen Achsen in allen Schichten ein anderer sein, und da, wie wir im Kap. VII B sehen werden, auch der Charakter der Doppelbrechung für die verschiedenen Farben mit der Belichtungsintensität sein Vorzeichen wechseln kann, so kann auch in einer bestimmten Tiefe der Schicht die Achsenebene sich um 90° drehen. Da nun die Beobachtung dieser Verhältnisse nur durch die ganze Schicht hindurch möglich ist, müssen sich die verschiedenen Werte in unentwirrbarer Weise überlagern. Man kann aber die Verhältnisse vereinfachen, indem man immer senkrecht zur Schicht erregt und beobachtet, da die optische Achse der natürlichen Anisotropie der gespannten Schichten in dieser Richtung liegt. Es wird also nur die Projektion der neuen optischen Veränderungen, in die Schichtebene, untersucht.

C. Transversaleffekt im natürlichen Licht.

Die Beobachtungen beim Transversaleffekt lassen unmittelbar voraussehen, daß durch seitliche oder streifende Bestrahlung einer lichtempfindlichen Schicht mit natürlichem Licht diese anisotrope Eigenschaften erhalten muß, da die in allen Ebenen um die Strahlenrichtung schwingenden elektrischen Vektoren bei ihrer Projektion in die Schichtebene eine Ellipse ergeben, deren große Achse senkrecht zur Strahlenrichtung liegt. Der Versuch ergab in der Tat, daß in diesem Fall die Schicht deutlich anisotrop war, und daß die optische Achse in der Schichtebene senkrecht zur Strahlenrichtung liegt.[1])

Die bei der Transversalbeobachtung auftretenden Erscheinungen zeigen, daß der neue Effekt analog verläuft, wie drei andere Wirkungen der Strahlung. Es sind dies: das Tyndallphänomen, die Resonanzstrahlung und der selektive Photoeffekt. Im ersten Fall hat die Strahlung des abgebeugten Lichtes, im zweiten das Fluoreszenzlicht vorwiegend dieselbe Schwingungsrichtung wie die erregende Strahlung. Beim selektiven Photoeffekt fällt die Richtung der aus der Metalloberfläche ausgeschleuderten Elektronen mit der Richtung des

1) Man ist also imstande, mit natürlichem Licht Schichten mit bleibenden polarisierenden Eigenschaften herzustellen.

elektrischen Vektors zusammen. Bei dem neuen Effekt erteilt die polarisierte Strahlung der lichtempfindlichen Schicht dauernd neue Eigenschaften, deren bevorzugte Richtung in der Richtung des elektrischen Vektors liegt.

Bei Erregung mit natürlichem Licht ergeben sich in allen diesen Fällen gerichtete Wirkungen. Das Tyndallicht ist teilweise senkrecht zur Einfalls- und Beobachtungsrichtung polarisiert. Für die Resonanzstrahlung gilt unter geeigneten Bedingungen dasselbe, und bei dem neuen Effekt entsteht eine optische Achse in derselben Richtung. Die Tatsache, daß in natürlichem Licht der selektive Photoeffekt nur bei schiefem Lichteinfall auftritt, spricht in demselben Sinne.

Rein phänomenologisch muß man daher sagen, daß in allen diesen Fällen innerhalb des absorbierenden Systemes elektrische Ladungen sich in der Richtung des elektrischen Vektors bewegen, welche beim Tyndalleffekt selbst zu Emissionszentren werden, bei der Resonanzstrahlung andere Zentren in ihrer Richtung zur Emission veranlassen, beim Photoeffekt eine Elektronenemission in dieser Richtung bewirken und endlich bei dem neuen Effekt die Objekte in dieser Richtung bevorzugt beeinflussen. Ich habe diese Beeinflussung bisher als eine mechanische aufgefaßt, und muß auch jetzt, wo ein sehr großes neues experimentelles Material vorliegt, an einer photokinetischen Deutung der Erscheinungen unbedingt festhalten. Besonders die neuen Beobachtungen über den inversen Effekt über den quantitativen Verlauf des Dichroismus und der Doppelbrechung, und auch die in einer folgenden Mitteilung zu beschreibenden Erscheinungen an den Farbstoffschichten lassen sich nicht mehr auf andere Weise deuten.

In einem mehr nebensächlichen Punkt sehe ich mich aber veranlaßt, meine früheren Vermutungen auf Grund der Ergebnisse beim Transversaleffekt zu revidieren. Sowohl am Schluß des § 8 der ersten Mitteilung, als auch im § 16 der dritten Mitteilung sprach ich die Vermutung aus, daß die elektrisch vermittelten mechanischen Verschiebungen *senkrecht zur Schwingungsebene* des elektrischen Vektors stattfinden. Diese wäre dann eine Symmetrieebene und die optische Achse der anisotropen Gebilde müßte demnach senkrecht zu dieser Ebene angenommen werden. Dies schien mir auf Grund der Bohrschen Anschauungen über die Absorption wahrscheinlich. Ein

linearer Polarisationseffekt war dann bei Beobachtung von der Kante der Schwingungsbahnen zu erwarten, während senkrecht zu den Kreisbahnen die Effekte des zirkular polarisierten Lichtes auftreten müßten, die nach dem Vorhergehenden nicht von denen des natürlichen zu unterscheiden sind.[1]) Bei seitlicher Belichtung der lichtempfindlichen Schichten hätte dann Anisotropie auftreten müssen, wenn der elektrische Vektor der erregenden Strahlung senkrecht zur Schichtebene orientiert war, und Isotropie, wenn er in der Schichtebene lag.

Der Versuch hat im entgegengesetzten Sinne entschieden. Nicht die Schwingungs*ebene* des elektrischen Vektors ist die Symmetrieebene der neu entstehenden anisotropen Gebilde, sondern die Schwingungs*richtung* desselben wird als optische Achse abgebildet. Es entspricht dies den klassischen Anschauungen über die Absorption. Über die Möglichkeit der Deutung dieses Befundes mit den Bohrschen Quantenvorstellungen müssen weitere Versuche entscheiden.

V. Qualitative Beobachtung der spezifischen Wirkungen der Farben.

Schon in dem einleitenden Kapitel I wurde kurz darauf hingewiesen, daß bei der weiteren Untersuchung des neuen Effektes auch ein negativer Dichroismus beobachtet wurde. Nach den Feststellungen im vorigen Kapitel entspricht ein positiver Dichroismus oder der normale Effekt einer schwächeren Lichtabsorption in der *e*-Richtung, in welcher der außerordentliche Strahl schwingt. Bei dem inversen Effekt wird im Gegensatz dazu der außerordentliche Strahl stärker absorbiert. Da der inverse Effekt am leichtesten im kurzwelligen Spektralgebiet, im Blaugrün und Blau auftritt, wurde er früher übersehen. Erst die Verwendung der ausgewaschenen Schichten (II, B) erlaubte eine Untersuchung der starken Absorption im Blau.

Zuerst konnte der inverse Effekt im Polarisationsmikroskop durch die Neigung der Schwingungsellipsen erkannt werden, die für Blau entgegengesetzt wie für die langwelligen Strahlen war, eine Beobachtung, die zur Ausarbeitung der im folgenden Kapitel zu beschreibenden dichrometrischen Methode führte. Dann aber konnte er auch direkt mittels eines Nicols und auf photographischem Wege nachgewiesen werden.

1) Die Erscheinungen im transversalen und longitudinalen Zeemaneffekt verlaufen in diesem Sinne.

A. Die Absorptionsverschiebungsregel.

Der gerichtete inverse Effekt bei polarisierter Bestrahlung ist nur ein Spezialfall einer allgemeineren Erscheinung, die auch im natürlichen Licht auftritt, welche scheinbar an den Photochloriden noch nicht beobachtet worden ist. Bei der Bestrahlung mit einem engen Spektralgebiet hellt sich in diesem die Schicht auf, in den benachbarten findet aber eine Absorptionsverstärkung statt. Diese Absorptionsverschiebung soll zunächst beschrieben werden.

Die Anordnung war in allen Fällen die im Kapitel II, A für die Belichtung beschriebene.

Als Farbfilter wurden für ganz reine Farben folgende Kombinationen verwendet:

Rot: Dunkelrotglas, Absorption von 600 $\mu\mu$ an.

Grün: Gelatinefilter, gefärbt mit Filtergrün-Hoechst + 1 cm Kupfersulfat (20%).

Blau: 3 dunkle Kobaltgläser + 2 cm Kupfersulfat (20%) + 1 cm Chininsulfat.

Das Absorptionsgebiet der drei Filter wurde photographisch ermittelt. Die Aufnahmen wurden mit einem großen Hilgerschen Quarzspektrographen gemacht, vor dessen Spalt ein Goldbergkeil [1]) befestigt war, so daß sich die stärkere oder schwächere Lichtdurchlässigkeit der Filter in der bergförmigen Gestalt der Schattenkurve ausdrückt. Die Negative lassen erkennen, daß die Farbfilter ziemlich rein sind. Das Blaufilter läßt weder Rot noch Hg-Grün und Gelb durch. Das Grünfilter kein Blau und Rot, und wie durch besondere spektroskopische Beobachtung festgestellt wurde, auch kein Hg-Gelb. Endlich läßt das Rotfilter keine der hauptsächlichen Hg-Linien durch. Diese Reinheit ist für die spätere Diskussion der Resultate wichtig.

Eine Photochloridplatte wurde mit natürlichem rotem, grünem und blauem Licht so lange bestrahlt, bis die Lichtwirkung an den betreffenden Stellen deutlich festzustellen war. Bei durchfallendem weißen Licht erschien dann die hinter dem Rotfilter belichtete Stelle gelblichrot und heller als der Grund; die hinter den anderen Farben belichteten Stellen dagegen dunkler als der Grund und mit einer schwach grünlichen und bläulichen Nuance. Von einer exakten Farbenwiedergabe war keine Rede.

1) E. Goldberg, Z. f. wiss. Phot. 10. S. 238. 1912.

Wenn man aber die Schicht durch die drei farbigen Aufnahmefilter hindurch gegen eine diffus beleuchtete helle Fläche betrachtete, dann erschien hinter dem Rotfilter der Rotfleck viel heller als der Grund, und die beiden anderen dunkler, hinter dem Grünfilter war der Grünfleck deutlich gegen den Grund aufgehellt, der Rot- und Blaufleck dagegen dunkler, hinter dem Blaufilter endlich war der Blaufleck etwas heller, der Grünfleck ganz wenig und der Rotfleck deutlich dunkler als der Grund. Für Blau und Grün, welches von der Photochloridschicht sehr stark absorbiert wird, wurde als diffus leuchtende Fläche eine 200-kerzige mattierte Nitralampe verwendet. Die Absorption hat sich also in allen Fällen von dem Spektralgebiet der Erregungsfarbe nach den benachbarten verschoben. Eine objektive Darstellung der beschriebenen Erregung ist in der folgenden Tabelle gegeben, welche auf Grund von spektrophotometrischen Messungen aufgestellt ist.

Die mit rotgelbem, grünem und blauem natürlichen Licht erregten Stellen der Photochloridschicht wurden vor und nach der Belichtung mittels des Spektralphotometers von König-Martens in den Hg-Linien ausgemessen. Es wurden für die verschiedenen Farben verschiedene Schichten, welche die Erregung besonders ausgeprägt zeigten, verwendet. Da die Anfangsextinktion $\log I_0/I$ in den drei Fällen nicht die gleiche war, wurde zum besseren Vergleich die relative Extinktionsveränderung, bezogen auf die Anfangsextinktion 1 in der Tabelle eingetragen.

Meßfarben	Erregungsfarben		
	Rotgelb	Grün	Blau
579	0,896	1,102	1,283
546	1,033	0,936	1,112
436	1,182	1,069	0,945

Man erkennt deutlich die Aufhellung, wenn Erregungs- und Meßfarbe übereinstimmen, und die Verdunklung in den anderen Spektralgebieten.

Zur photographischen Festhaltung der Erscheinung wurde die belichtete Schicht mit den drei Flecken direkt auf eine mit Pinacyanol sensibilisierte Bromsilberplatte kopiert, unter Einschaltung der Aufnahmefarbfilter zwischen der als Lichtquelle verwendeten unmattierten Nitralampe und dem Kopier-

rahmen. Die für die drei Farben sehr verschiedene Belichtungszeit wurde durch Probieren ermittelt.

Die Kontraste sind auf den Platten deutlich, aber für die Reproduktion zu schwach.

Die hier beschriebene Beobachtung, daß bei der Belichtung mit einem engen Spektralgebiet in anderen Farben neue Absorptionen entstehen, hat ihr Analogon in der Phosphoreszenz und bei den phototropen Erscheinungen. In beiden Fällen wurde aber bisher die neue Absorption nur auf der langwelligen Seite der Erregungsfarbe beobachtet, während sie hier auch auf der kurzwelligen Seite auftritt.

B. Der inverse Effekt.

Die im vorstehenden beschriebenen Absorptionsverschiebungen bei Erregung der Photochloridschichten mit natürlichem Licht finden sich als dichroitische Verschiebungen wieder, wenn man die Schichten mit linearpolarisiertem Licht erregt. Qualitativ läßt sich diese Umkehrung des Dichroismus in erregungsfremden Spektralgebieten am deutlichsten auf folgendem photographischem Wege zeigen.

Als Objekt wurde eine mit gelbrotem linearpolarisiertem Licht unter Einschaltung eines $\frac{1}{2}\lambda$-Glimmerdoppelsystems (vgl. S. 684) stark erregte Plattenstelle verwendet. Das in zwei halbkreisförmige Hälften geteilte Feld wurde in der durch die Fig. 7 angedeuteten Weise vor dem weit gestellten Spalt eines großen Hilgerschen Quarzspektrographen befestigt und mit einer Quecksilberlampe beleuchtet. Auf der photographischen Platte bilden sich dann streifenförmige Ausschnitte der erregten Plattenstelle in den Hauptfarben des Quecksilberbogens monochromatisch ab.

Fig. 7.

In der Fig. 8 (Taf. II) ist das Positiv einer derartigen Aufnahme reproduziert; gleichzeitig sind die Belichtungsarten und die Farben der einzelnen Linien eingetragen. Das oberste Spektrum wurde mit natürlichem Licht 45 Sekunden lang, das zweite bis vierte mit linear polarisiertem Licht entsprechend länger und mit verschiedener Schwingungsrichtung des elektrischen Vektors exponiert. Das erste Spektrum zeigt die schon beschriebene Absorptionsverschiebung: Aufhellung im

Gelb und Verdunklung vom Blau bis Hg 366. Das zweite und dritte Spektrum zeigt den normalen Dichroismus im Gelb (Aufhellung in derjenigen Feldhälfte, für welche die Schwingungsrichtung des Lichtes bei der Erregung und bei der Photographie übereinstimmt), und auch im Gelbgrün, wo die Schicht sehr stark absorbiert, ist der normale Effekt gleichfalls noch schwach sichtbar. Im Blau, Violett und bei der Hg-Linie 366 $\mu\mu$ dagegen ist der Effekt invers, d. h. für parallele Polarisationsebenen bei der Erregung und Aufnahme ist die Lichtabsorption verstärkt. Im kurzwelligen Ultraviolett ist nichts mehr zu beobachten. Das etwas kürzer exponierte vierte Spektrum unterscheidet sich nicht vom dritten.

Die anderen Erregungsfarben geben keine gut reproduzierbaren Bilder. Für diese lassen sich die dichroitischen Verschiebungen aus den quantitativen Messungen des Abschnittes VII, A erkennen. Hier kam es nur auf die qualitative Demonstration des inversen Effektes an.

VI. Quantitative Meßmethoden.

Zur näheren Erkenntnis der durch die polarisierte Strahlung in den Schichten bewirkten Veränderungen erwies sich die quantitative Ermittlung des Dichroismus und der Doppelbrechung als unbedingt erforderlich. Die ersten im § 11 der zweiten Mitteilung graphisch wiedergegebenen Messungen an Farbstoffplatten waren noch recht unvollkommen, ließen aber schon ersehen, daß besonders die Erregungsdauer den Verlauf der Erscheinung recht kompliziert beeinflußt.

A. Dichroismus.

Besonders die genaue Messung des Dichroismus bot im Anfang Schwierigkeiten. Sie ist prinzipiell mit jedem Polarisationsphotometer durchzuführen und recht brauchbare Resultate ergab auch das bekannte Spektrophotometer von König und Martens.[1]) Das von den zwei Eintrittsspalten ausgehende natürliche Licht wird senkrecht und horizontal polarisiert und beleuchtet die beiden Hälften eines Zwillingsprismas, welche durch einen Okularspalt und einen Analysator anvisiert werden. Wenn man vor den Eintrittsspalten ein dichroitisches Objekt anbringt, dann erscheinen die vorher gleich hell beleuchteten

1) A. König, Wied. Ann. 53. S. 785. 1894.
2) F. F. Martens u. F. Grünbaum, Diese Ann. 12. S. 984. 1903.

Vergleichsfelder des Zwillingsprismas verschieden, wenn die Schwingungsrichtungen des dichroitischen Objektes mit den Polarisationsrichtungen des Instrumentes parallel sind. Man kann dann durch Drehen des Analysators wieder auf gleiche Helligkeit einstellen und so den Dichroismus messen.

Bei Benutzung dieses Instrumentes empfiehlt es sich aber, die zu messenden Schichten nicht vor den Eintrittsspalten anzubringen, da sie zu weit auseinander liegen und weil die lichtempfindlichen Objekte durch die helle Beleuchtungslichtquelle leiden. Dagegen erhält man sehr brauchbare Resultate, wenn man das Objekt einfach auf den Okularspalt aufsetzt. Man beobachtet dann durch die immer sehr transparenten Schichten hindurch das photometrische Vergleichsfeld und kann auf diese Weise den Dichroismus bis zu der Genauigkeitsgrenze des Instrumentes, also bis zu einem Unterschied von etwa 1 Proz. der beiden zu vergleichenden Intensitäten messen.

Trotz der guten Resultate mit dieser Methode wurde sie zugunsten einer anderen verlassen, welche auf bequemere Weise die Genauigkeit noch zu steigern erlaubte. Sie beruht auf folgendem Prinzip.

Falls ein anisotropes, *nicht dichroitisches* Objekt von linear polarisiertem monochromatischen Licht passiert wird, dessen Schwingungsrichtung unter 45° zu den Hauptschwingungsrichtungen des Objektes liegt, so wird das linear polarisierte Licht in zwei Komponenten von gleicher Amplitude zerlegt, welche sich nach dem Austritt allgemein durch Interferenz zu elliptisch polarisiertem Licht zusammensetzen. Falls die Phasendifferenz kleiner als $\frac{1}{4}\lambda$ ist, liegt die große Achse der Schwingungsellipse in der Richtung der ursprünglichen linear polarisierten Strahlung und bei der Analyse des elliptischen Lichtes mittels eines Analysatornicols erscheint das Gesichtsfeld dann am dunkelsten, wenn seine Polarisationsebene genau unter 90° zu der des Polarisators steht.

Wenn andererseits das anisotrope Objekt *dichroitisch* ist, dann haben die beiden interferierenden Komponenten durch die verschiedene Lichtabsorption in beiden Schwingungsrichtungen verschiedene Amplituden und die resultierende Schwingungsellipse ist mit ihrer großen Achse nach der Richtung geneigt, in welcher die in dem dichroitischen Objekt am wenigsten absorbierte Komponente schwingt.

Aus der Fig. 9, in welcher die Schwingungsellipsen für eine Verzögerung um $^1/_{16}\,\lambda$ ohne und mit Dichroismus konstruiert sind, sind die Verhältnisse zu übersehen. Für letzteren Fall wurde angenommen, daß der unter $+\,45^0$ im Objekt schwingende Strahl eine doppelt so große Amplitude als der unter $-\,45^0$ schwingende hat:

$$\log I_e/I_m = 0{,}6.$$

Das Gesichtsfeld erscheint also im allgemeinen bei gekreuzten Nicols nicht maximal dunkel, sondern man muß den Analysator um den Winkel α' in die Richtung der großen Ellipsenachse drehen, um die größte Dunkelheit zu erhalten. Für ein Objekt mit extremen Unterschieden der Absorption würde die Drehung 45^0 betragen.

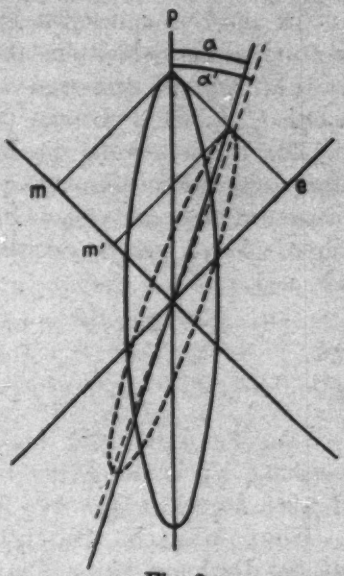


Fig. 9.

Analytisch läßt sich eine Beziehung zwischen dem Winkel α und dem Dichroismus auf Grund der folgenden Formel ableiten:

(1) $$\operatorname{tg} 2\psi = \operatorname{tg} 2\varphi \cos \delta.$$ [1])

In dieser Formel bedeutet ψ den Winkel zwischen der großen Achse der Schwingungsellipse und den Hauptschwingungsrichtungen des anisotropen Objektes, in unserem Fall also $\psi = (45^0 \pm \alpha')$ und δ die Phasendifferenz der beiden Strahlen nach dem Austritt aus dem Objekt. φ endlich steht mit dem Verhältnis der Amplituden A und B der beiden Strahlen nach der Absorption in Beziehung durch die Gleichung $\operatorname{tg} \varphi = A/B$, und da $A/B = \sqrt{I_A/I_B}$ ist, falls I_A und I_B die Intensitäten der in den beiden Richtungen schwingenden Strahlen bedeuten, ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{I_A/I_B} \quad \text{und} \quad \varphi = \operatorname{arctg} \sqrt{I_A/I_B}.$$

1) Vgl. u. a. Müller-Pouillet II, Optik, S. 887. 1909.

Die Messung des Neigungswinkels a' der großen Achse der Schwingungsellipse gegen die Nullstellung erlaubt also eine Bestimmung des Dichroismus.

In unserem speziellen Fall soll der Dichroismus von lichtempfindlichen Schichten, die vorher mit polarisiertem Licht bestrahlt waren, gemessen werden. Für I_A/I_B ist dann nach S. 681 I_e/I_m zu setzen.

Zur Vereinfachung der Formel kann das im Kapitel VII, B näher mitgeteilte Messungsresultat verwendet werden, daß die Phasendifferenz in vielen Fällen so klein ist, daß unbedenklich $\cos \delta = 1$ gesetzt werden kann. Die Formel vereinfacht sich also zu

$$(45^0 \pm a) = \operatorname{arctg} \sqrt{I_e/I_m}$$

und

$$\log I_e/I_m = 2 \log\operatorname{tg} (45 \pm a). \tag{2}$$

Aus der Figur geht hervor, daß auch für $\delta = 22{,}5^0$ (Verzögerung $^1/_{16}\lambda$) die Differenz von $a' - a$ noch klein ist. Es ist aber korrekter für $\delta > 10^0$ die Formel (1) zu benutzen.

Die praktische Durchführung der Messung kommt also auf die Drehung eines Analysators auf maximale Dunkelheit des Gesichtsfeldes heraus. Dies ist aber mit sehr großer Genauigkeit mit einem Halbschatten-Polarisationsapparat auszuführen, dessen beide Halbschattenfelder wie bei dem Lippichschen Typus linear polarisiertes und nicht elliptisch polarisiertes Licht enthalten.[1])

Die Exaktheit der Einstellung ist um so größer, je geringer die Phasendifferenz ist, d. h. je gestreckter die Schwingungsellipse ist. Besonders im Anfangsstadium der Erregungen ist diese aber immer sehr klein und gerade in diesem Gebiet haben die Messungen sehr merkwürdige Verhältnisse enthüllt. Aber auch bei größeren Phasendifferenzen läßt sich die große Genauigkeit der Einstellung nach vorheriger Kompensation mit irgendeinem Kompensator ausnutzen.

Für die Versuche wurde aus einem Lippichschen Polarimeter, dessen Teilkreis eine Ablesung bis auf $0{,}01^0$ erlaubte, die Rinne zum Einlegen der Polarisationsröhren herausge-

1) Auf die Möglichkeit, das Lippichsche Polarimeter zur Messung des Amplitudenverhältnisses zu verwenden, wurde von Bergholm (Diss. Upsala 1915, S. 24) kurz hingewiesen.

nommen und möglichst dicht vor der Halbschatteneinrichtung eine drehbare Trommel mit einer zentralen 5 mm weiten Blende angebracht, auf welcher die zu untersuchende Stelle der lichtempfindlichen Platte befestigt werden konnte. Es wurden dann zwei Messungen gemacht, wenn die e-Richtung unter $+ 45^0$ und unter $- 45^0$ zum Polarisator stand. Die Differenz war $= 2a$.[1]) Der Dichroismus ist positiv, wenn die Drehung des Analysators von der Nullstellung nach der e-Richtung, negativ, wenn die Drehung nach der m-Richtung hin erfolgt.

Als Lichtquelle wurde eine Quecksilberlampe benutzt, deren Licht durch einen großen Monochromator mit einem Prisma von 90^0 Ablenkung spektral zerlegt wurde. Die Messungen wurden im Gelb, Grün und Blau gemacht. Für Rot wurde eine kleine Nitralampe von 100 Kerzen für 10 Volt mit einem dunkelroten Glasfilter verwendet, dessen Absorption von $600\,\mu\mu$ an vollkommen war. Besonders im Gelb und Grün ließen sich die Messungen mit sehr großer Schärfe auf $0{,}01^0$ reproduzieren.[2]) Ein Wert von $0{,}02^0$ für $2a$ entspricht dann einem Wert von 1,0007 für I_e/I_m. Es ist also mit dieser Messungsmethode die Möglichkeit gegeben, zwei Lichtintensitäten mit einer größeren Genauigkeit als 0,1 Proz. zu vergleichen.

Mit den gewöhnlichen Vergleichsphotometern kann man bei längerem Arbeiten kaum weiter als bis auf eine Ein-

1) Die Messung in den beiden Lagen der e-Richtung und die Bestimmung des Winkels $2a$ ist notwendig, um einen Fehler, welcher durch die Konstruktion des Lippichschen Polarisationsapparates bedingt ist, auszuschalten (vgl. hierzu auch: H. Schulz, Verh. der Deutsch. Phys. Ges. 21. S. 227. 1919). Da nämlich durch die Anordnung der beiden Nicolschen Prismen in der Halbschatteneinrichtung die Intensität der beiden Halbschattenfelder nicht ganz gleich ist, entspricht die Nullstellung des Analysators nicht genau der Halbierungslinie des Halbschattenwinkels. Falls bei größeren Phasenverschiebungen durch die Doppelbrechung die Schwingungsform des Lichtes schon merklich elliptisch wird, sind die Abweichungen bedeutender und können mehrere Grade betragen. Die Drehungswinkel des Analysators liegen also unsymmetrisch zur Nullstellung und eine Einzelmessung würde zu fehlerhaften Resultaten führen. In demselben Sinne wirkt übrigens die natürliche optische Drehung der Gelatine. Durch die Messung in den beiden Lagen fällt dieser Fehler heraus und $2a$ ist der doppelte richtige Neigungswinkel.

2) Da das Rot nicht homogen war, beanspruchen bei der beobachteten starken Dispersion des Dichroismus die Messungen im Rot einen geringeren Grad von Sicherheit.

stellungsgenauigkeit von 1 Proz. kommen, denn die extremen von Helmholtz angegebenen Werte von ca. 0,6 Proz. gelten nur für besonders günstige Beleuchtungsverhältnisse, die in den meisten Fällen nicht vorhanden sind. Diese Genauigkeit ist bei der Halbschatteneinrichtung mit einer Einstellungsschärfe auf 0,3° erreicht, die auch unter ungünstigen Beleuchtungsverhältnissen (Messung im Blau bei gleichzeitiger starker Absorption des Objektes) keine Schwierigkeit bietet. Dagegen ist kürzlich von Schulz[1]) gezeigt worden, daß unter bestimmten Bedingungen gute Halbschatten-Polarisationsapparate eine Einstellungsgenauigkeit bis auf 0,001° erlauben. Die Feinheit der dichrometrischen Messungen würde dadurch noch um eine Zehnerpotenz gesteigert werden.

B. Doppelbrechung.

Die Messung der Doppelbrechung der belichteten Schichten wurde nach der Einstellung des Analysators auf maximale Dunkelheit mittels eines Babinetkompensators durchgeführt, der in ein gut passendes Lager am Polarisationsapparat so eingelegt werden konnte, daß seine Stellung im Strahlengang praktisch unverändert blieb. Diese unveränderliche Lagerung, welche sich bei der mir zur Verfügung stehenden Apparatur nicht vermeiden ließ, verbietet es allerdings, die Schwingungsrichtungen im Kompensator unter 45° zur Polarisationsebene des Analysators einzustellen. Durch die Drehung des Analysators in die Richtung der Schwingungsellipse beträgt der Winkel $(45^0 + \alpha)$. Die an der Kompensatortrommel abgelesene Einstellung ist aber trotzdem direkt zur Berechnung der Phasendifferenz zu verwenden. Dies geht aus folgender Überlegung hervor.

Wenn δ die zu bestimmende unbekannte Phasendifferenz und δ_0 die aus der Ablesung am Kompensator nach Eichung für die verschiedenen Farben ermittelte Phasendifferenz ist, wenn weiter das Verhältnis der Amplituden der im Kompensator schwingenden Strahlen $A/B = \operatorname{tg} \varphi_0$, und das Verhältnis der Amplituden in dem dichroitischen Objekt $\sqrt{I_e/I_m} = \operatorname{tg} \varphi$ ist, dann gilt die Formel

$$\sin \delta \sin 2\varphi = \sin \delta_0 \sin 2\varphi_0 \tag{3}$$

1) H. Schulz, Phys. Zeitschr. 21. S. 33. 1920.

und

$$\sin \delta = \frac{\sin 2\varphi_0}{\sin 2\varphi} \sin \delta_0 .$$

Nun ist aber nach S. 702 sehr angenähert

$$\varphi_0 = (45 \pm \alpha) = \operatorname{arctg} \sqrt{I_e / I_m} = \varphi$$

und es gilt daher

$$\sin \delta = \sin \delta_0 .$$

Was den Charakter der Doppelbrechung anbelangt, so soll deshalb, weil nach Kapitel IV, B die optische Achse in der e-Richtung liegt, ein *positiver Wert* eingesetzt werden, wenn der Brechungsexponent des in der e-Richtung schwingenden Strahles n_e größer als n_m ist.

Der Babinetkompensator wurde mit dem Rotfilter (mittlere Wellenlänge = 650 $\mu\mu$) und den Quecksilberlinien geeicht. Die Phasendifferenzen δ_1, welche einer Trommelumdrehung des Kompensators entsprechen, sind in der folgenden Tabelle angegeben.

	Rot	Gelb	Grün	Blau	
$1\lambda =$	9,89	9,03	8,49	6,61	Trommelumdrehung
$\delta_1 =$	36,0°	39,9°	42,4°	54,4°	

Es muß zugegeben werden, daß die beschriebene Bestimmungsweise der Doppelbrechung, welche durch die polarisierte Bestrahlung in den Schichten hervorgerufen wird, noch verfeinert werden kann.[1]) Wie jedoch aus Kapitel VII, B hervorgeht, genügt sie zunächst zum vorläufigen Überblicken der Erscheinungen.[2])

VII. Quantitative Messung der spezifischen Wirkungen der Farben.

Die in diesem Kapitel zu beschreibenden Messungen stellen nur einen ersten Ansatz zur quantitativen Erforschung der neuen Erscheinungen dar. An ihre erschöpfende Behandlung kann vorläufig nicht gedacht werden, denn die Systeme, welche zur Untersuchung kommen, sind sowohl chemisch als

1) Dies ist durch die Halbschattenmethoden von Brace (vollständige Literatur bei Bergholm, Ann. d. Phys. 44. S. 1053. 1914), und die etwas einfachere von G. Szivessy, Verh. d. Deutsch. phys. Ges. 21. S. 271. 1919 zu erreichen.

2) Für Rot gelten dieselben Einschränkungen wie S. 703, Anm. 2.

physikalisch so kompliziert, und ihre Vorgeschichte, vor Einwirkung der polarisierten Strahlung, ist so unübersichtlich, daß schon die Herstellung mehrerer Schichten mit genau reproduzierbaren Eigenschaften unmöglich ist. Es liegen in den Chlorsilber-Gelatine-Emulsionen kolloide Systeme vor, deren Eigenschaften sich mit der Zeit, mit der Temperatur, im flüssigen, gallertartigen und trockenen Zustand dauernd in einer Weise ändern, deren wissenschaftliche Erforschung noch im ersten Anfangsstadium steht. Es sei hier nur an die Fabrikation der photographischen Trockenplatten erinnert, welche auch heute noch als eine vollkommen empirische Technik zu bezeichnen ist, trotzdem ungeheuer viel wissenschaftliche Arbeit auf dieses Gebiet verwendet wurde.

Für unseren speziellen Fall kommt dann noch die Vorbelichtung hinzu, welche alle die zunächst noch unbekannten Faktoren in sich schließt, deren Erforschung der eigentliche Zweck der Untersuchung ist. Wie sich dann der Zustand durch das Auswaschen und wieder Trocknen der Gelatineschichten ändert, ist zunächst vollkommen dunkel.

Die hier zu beschreibenden Versuche sind also mehr als Einzelversuche zu betrachten, welche sich aber in dem qualitativen Verlauf der Messungen so reproduzieren ließen, daß allgemeine Schlüsse erlaubt sind. Es wurde im wesentlichen die spektrale Verteilung des Dichroismus und der Doppelbrechung in Abhängigkeit von der Einwirkungsdauer verschiedenfarbigen polarisierten Lichtes untersucht. Als Material wurden angelaufene, blaurot gefärbte Photochloridschichten verwendet, deren Lichtabsorption sich in solchen Grenzen hielt, daß noch Messungen in allen Spektralgebieten möglich waren. Auf energetische Messungen mußte zunächst noch verzichtet werden, weil die Systeme nach dem oben Gesagten noch nicht für absolute Messungen reif zu sein scheinen.

Auch wurden zunächst nur die Erscheinungen in trockenen Photochloridschichten untersucht, da in den gequollenen feuchten und fixierten Schichten die Verhältnisse noch komplizierter zu sein scheinen.

A. Der Dichroismus.

Die zu untersuchenden Plattenstellen wurden vor der polarisierten Bestrahlung im Halbschattendichrometer auf schon von vornherein bestehenden Dichroismus untersucht, der

auch stets in geringem Maße vorhanden war; dann wurde die Schicht eine kurze Zeit der Strahlung ausgesetzt und der Dichroismus in allen Farben gemessen. Nach der Messung wurde weiter belichtet, wieder gemessen usw., so daß man die fortschreitende Veränderung einer bestimmten Plattenstelle erfahren konnte. Zur Berechnung wurde der vor der Belichtung gemessene Winkel am Dichrometer $2a_0$ von den direkt gemessenen $2a_t$ abgezogen. Die Differenz entspricht der Änderung des Dichroismus, die in den folgenden Figuren und Tabellen aufgenommen ist.

Besonders merkwürdige Ergebnisse lieferte die Veränderlichkeit des Dichroismus mit der Bestrahlungsdauer, die sich am übersichtlichsten in der folgenden Weise graphisch darstellen läßt. Für jede Erregungsfarbe sind die Resultate in den verschiedenen Meßfarben in einer Anzahl Kurven zusammengestellt, und zwar ist der im Halbschattendichrometer gemessene Dichroismus $\log I_e/I_m$ auf der Ordinate, und die Bestrahlungsdauer auf der Abszisse abgetragen.

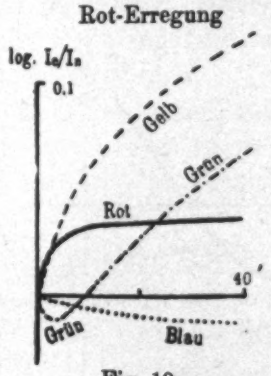


Fig. 10.

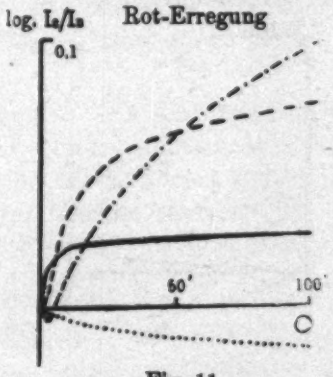


Fig. 11.

Der Verlauf der dichrometrischen Kurven für die verschiedenen Meßfarben unterscheidet sich für die drei Erregungsfarben ganz charakteristisch. Für Rot ist in Fig. 10 ein Beispiel gegeben. Sofort mit dem Beginn der Erregung wird die Schicht für Rot positiv dichroitisch, für Grün und Blau negativ, während für Gelb der Dichroismus zuerst langsamer und dann steiler als für Rot anwächst. Während aber die Rotkurve nach dem ersten steilen Anstieg sich bald zur Abszissenachse krümmt und einem Sättigungswert zustrebt, wächst

der positive Gelbdichroismus steil an und schneidet die Rotkurve. Die Grünkurve aber ist im Anfang ausgesprochen negativ (inverser Effekt), erreicht dann ein Minimum, um dann steil zu positiven Werten anzusteigen, die bei genügend langer Belichtung sogar die Gelbkurve überschreiten. Die Blaukurve endlich wird dauernd negativer (Fig. 11).

Der inverse Effekt im Grün ist also nur vorübergehend, und das zögernde S-förmige Ansteigen der Gelbkurve (Fig. 11) spricht dafür, daß auch hier im Anfang ein inverser Effekt vorhanden ist, der allerdings sehr schnell durch den bald einsetzenden positiven kompensiert wird. Die Umkehr im Grün ist weit unterhalb der photographischen, photometrischen Empfindlichkeitsgrenze, welche unter günstigen Verhältnissen bei 5 Proz. Helligkeitsunterschied oder $\log I_1/I_2 = 0{,}02$ liegt. Die Fig. 8 auf Taf. II gibt daher nur den bei lang dauernder Belichtung einsetzenden positiven Effekt im Grün an.

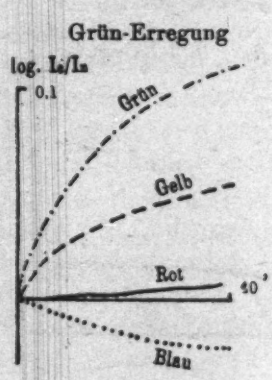


Fig. 12.

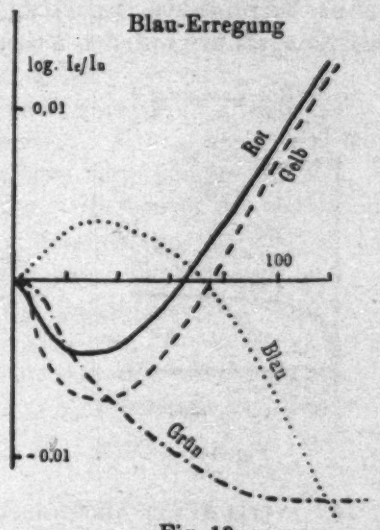


Fig. 13.

Der Verlauf der Kurven bei Grünerregung ist in Fig. 12 in demselben Maßstab wiedergegeben. Grün steigt sofort steil an und bleibt immer oberhalb Gelb und Rot. Im Blau ist der inverse Effekt noch ausgesprochener wie bei der Roterregung.

Bei Blauerregung endlich, welche in Fig. 13 graphisch wiedergegeben ist, ist die Veränderung für die vier Farben

eine ganz andere und viel schwächere. Die Ordinaten sind in der Figur 8mal größer eingetragen. Man ersieht dann, daß die Blaukurve im Beginn der Belichtung positiv ist, sich dann aber umkehrt, um immer negativer zu werden. Alle drei anderen Farben zeigen im Beginn der Belichtung den inversen Effekt und werden im weiteren Verlauf positiv. Die Selbstumkehr beim Blau findet immer bei genügend langer Belichtung statt, und zwar zeigten einige Versuche mit verschieden stark gefärbten Schichten, daß dies um so eher geschieht, je geringer die Lichtabsorption im Blau ist. Es liegt hier eine typische Solarisationserscheinung vor, und andere Beobachtungen, auf welche in einer folgenden Mitteilung eingegangen werden soll, machen es wahrscheinlich, daß recht enge Beziehungen zu der eigentlichen Solarisation photographischer Platten vorliegen.

Die drei angeführten Beispiele sind typisch für die Erregung in den drei Hauptfarben. Die gegenseitige Beziehung für die einzelnen Meßfarben wurden in allen untersuchten Fällen gleichartig wiedergefunden, wenn sich auch quantitative Unterschiede ergaben, welche vorläufig noch nicht sicher zu reproduzieren sind.

Wohl das interessanteste Resultat der dichrometrischen Messungen ist das sofort mit der Belichtung einsetzende positive Ansteigen des Dichroismus, wenn die Meß- und Erregungsfarben übereinstimmen und die anfänglichen inversen Effekte in den anderen Farben. Diese sind sicher nachgewiesen:

bei Roterregung im Grün und Blau,
„ Grünerregung im Blau,
„ Blauerregung im Rot, Gelb und Grün.

Dafür, daß der inverse Effekt auch in den noch fehlenden Farben eintritt, spricht der S-förmige Beginn der in großem Maßstab gezeichneten Kurven in den erregungsfremden Farben, welcher ein allmähliches Überwiegen des positiven Dichroismus anzeigt.

Der anfängliche negative Dichroismus im Gelb bei Roterregung konnte jedoch auch direkt nachgewiesen werden, als eine besonders empfindliche Schicht untersucht wurde. Dies geht aus den Figg. 14 und 15 hervor. In Fig. 14 umfaßt die

Abszisse 8 Minuten. Die kürzeste Belichtung betrug 2 Sekunden, wodurch die Schicht für Rot stark, für Gelb ganz schwach positiv, für Grün stark und für Blau schwach negativ dichroitisch wurde. Die S-Krümmung für Gelb ist deutlich.

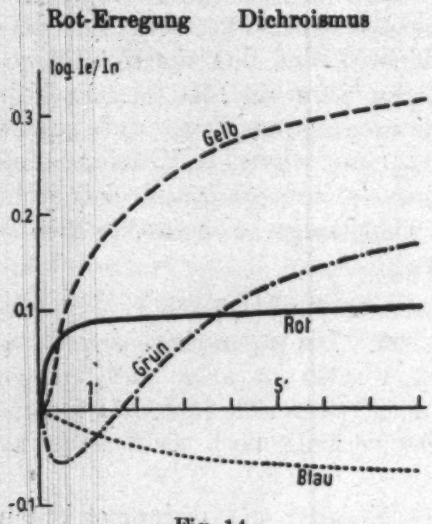


Fig. 14.

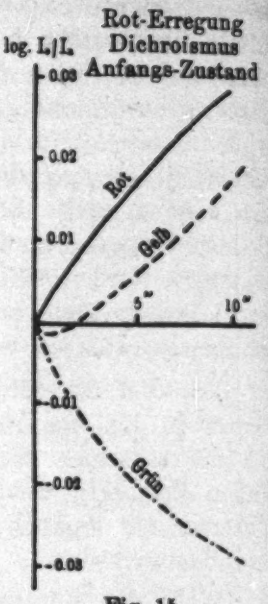


Fig. 15.

Ein Stück derselben Schicht wurde dann mit viel kürzeren Belichtungszeiten untersucht (Fig. 15). Hierzu wurde in den Strahlengang ein rotierender Sektor eingeschaltet, welcher auf eine Öffnung von $^1/_{50}$ eingestellt war. Bei einer Rotationsdauer von 2 Sekunden, also einer Belichtungsdauer von 0,04 Sekunden. waren schon sehr deutliche Veränderungen zu beobachten, wie aus der Figur und der Tabelle hervorgeht. Nur Rot ist positiv, Gelb und Grün dagegen sind negativ. Bei weiterer Fortsetzung der Belichtung durchläuft Gelb ein flaches Minimum und geht bei 2 Sekunden zu positiven Werten über, während Grün und Rot im Anfangssinne weiter wachsen. Nachdem während der ersten 5 Sekunden die Schicht mit den blitzartigen Belichtungen bestrahlt war, wurde kontinuierlich noch 2, und dann noch 3 Sekunden weiterbelichtet. Die Kurven erhalten dadurch keinen Knick. Die Wirkung der intermittierenden Belichtung kann daher zunächst der kontinuierlichen gleichgesetzt werden.

Der Versuch zeigt also die anfängliche Inversion im Gelb, er gibt gleichzeitig ein anschauliches Bild für das empfindliche Ansprechen der Schicht auf die polarisierte Bestrahlung und für die gute Brauchbarkeit der dichrometrischen Methode. Der interessante Teil des Verlaufs spielt sich weit unter der gewöhnlichen photometrischen Empfindlichkeitsgrenze ab.

Tabelle.

Erregungszeit	log $I_\perp/I_\parallel$ Rot	log $I_\perp/I_\parallel$ Gelb	log $I_\perp/I_\parallel$ Grün
0,04 Sek.	+ 0,0002	− 0,0009	− 0,0006
0,10	+ 0,0008	− 0,0014	− 0,0012
0,20	+ 0,0000?	− 0,0015	− 0,0018
0,30	+ 0,0012	− 0,0015	− 0,0026
0,40	+ 0,0018	− 0,0015	− 0,0032
0,60	0,0026	− 0,0015	− 0,0039
0,80	0,0033	− 0,0014	− 0,0055
1,00	0,0041	− 0,0012	− 0,0061
1,40	0,0053	− 0,0009	− 0,0082
2,00	0,0074	+ 0,0002	− 0,0100
3,00	0,0109	+ 0,0014	− 0,0145
3,00	—	+ 0,0039	− 0,0170
5,00	0,0167	+ 0,0053	− 0,0200
7,00 kont.	0,0227	+ 0,0097	− 0,0240
10,00 Bel.	0,0276	+ 0,0177	− 0,0288

Die Farbenempfindlichkeit des Effektes kann man nur schätzen, solange noch keine absoluten energetischen Bestimmungen vorliegen. Es geht aus den zahlreichen Versuchen hervor, daß die gerichteten Wirkungen der polarisierten Strahlung vom Rot nach dem Blau zu immer schwächer werden. Daß der normale Effekt in der Erregungsfarbe in direkter Beziehung zu dem inversen Effekt in den anderen Spektralgebieten steht, ergibt sich aus dem Mitgeteilten. Es ist aber zu beachten, daß beide Effekte nicht etwa quantitativ starr gekoppelt sind. Eine stöchiometrische Beziehung zwischen den Stoffen, welche vor und nach der Erregung in dem betreffenden Spektralgebiet absorbieren, besteht also nicht.

Wie schon S. 709 kurz erwähnt wurde, hat die Gesamtabsorption der Schicht für die verschiedenen Farben einen bedeutenden Einfluß auf den Verlauf der Kurven. Aus zahl-

reichen Messungen geht hervor, daß besonders für den positiven Dichroismus um so eher ein Sättigungszustand erreicht wird, je geringer die Absorption ist, also zuerst im Rot, dann im Gelb und zuletzt im Grün. Das geht deutlich aus der Fig. 11 hervor, wo die sich der Abzsissenachse nähernde Rotkurve zuerst von der Gelb- und dann von der Grünkurve geschnitten wird. Später übersteigt dann noch Grün das Gelb.

Es wurden einige Bestimmungen durchgeführt, bei denen die Veränderung der Gesamtabsorption photometrisch und gleichzeitig die des Dichroismus dichrometrisch verfolgt wurden. Nur ein Beispiel mit Roterregung sei hier mitgeteilt. Die photometrischen Messungen wurden mit dem König-Martensschen Spektralphotometer für das Quecksilbergelb, Grün und Blau ausgeführt, die belichtete Plattenstelle stand so vor dem einen Photometerspalt, daß die e-Richtung einen Winkel von 45° mit der Spaltrichtung bildete.

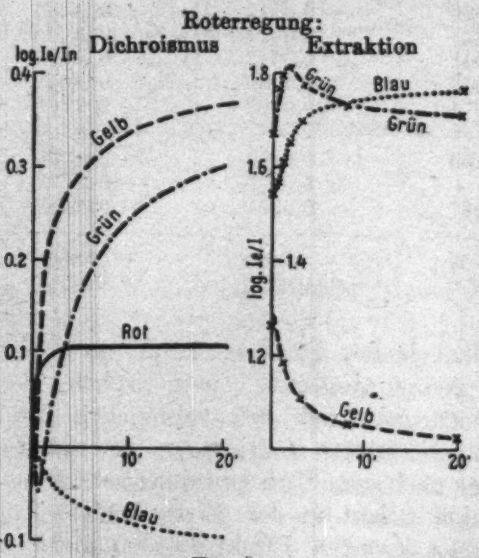


Fig. 16.

In der Fig. 16 bedeuten die vier Kurven links den Verlauf des Dichroismus $\log I_e/I_m$ in Abhängigkeit von der Zeit. Auf der rechten Seite ist die Gesamtextinktion $\log I_0/I$ für die drei Farben Blau, Grün und Gelb wiedergegeben. Es ist ein deutlicher Parallelismus zu erkennen. Im Gelb wächst der positive Dichroismus dauernd an, und die Absorption nimmt dauernd von 1,26—1,02 ab, für Blau gilt das Entgegengesetzte: der Dichroismus wird als inverser Effekt immer negativer und die Absorption immer größer von 1,55 bis 1,77, für Grün endlich entspricht einem Vorzeichenwechsel bei 80 Sekunden ein Maximum der Extinktion bei 1,81.

Weitere Schlußfolgerungen aus derartigen Messungen können vorläufig noch nicht gezogen werden.

B. Die Doppelbrechung.

Die Messung der Doppelbrechung ergab für die Abhängigkeit von der Erregungsfarbe und Bestrahlungsdauer merkwürdige Verhältnisse. Wie aus den graphischen Darstellungen in der Fig. 17 ersichtlich ist, ist der Verlauf der Kurven für den Dichroismus, (links) und die Doppelbrechung (rechts) ganz verschieden.

Es wurde schon auf Grund der Beobachtungen beim Transversaleffekt vorgeschlagen, das Vorzeichen durch die Differenz $n_e - n_m$ bestimmen zu lassen, d. h. der Charakter der Doppelbrechung ist negativ, wenn der in der e-Richtung schwingende Strahl sich schneller fortpflanzt. Dies ist der normale Effekt, während der positive Charakter der Doppelbrechung dem inversen Effekt entspricht.

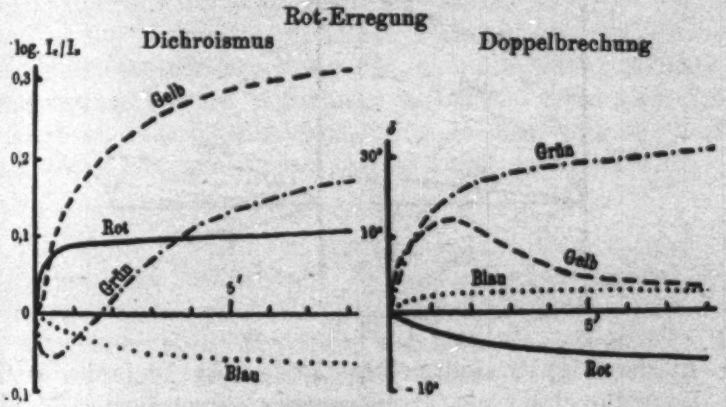


Fig. 17.

In der Fig. 17 ist für einen Versuch mit Roterregung nebeneinander die Veränderlichkeit des Dichroismus und der Doppelbrechung mit der Zeit eingetragen. Der Verlauf ist für alle analogen Versuche typisch. Für Rot und Blau ist die Veränderung auch bei lang ausgedehnten Belichtungen einsinnig. Für Rot wird der Charakter dauernd negativer und für Blau dauernd positiver. Auch wenn der Grenzzustand für den Dichroismus im Rot schon praktisch erreicht ist, ist für die Doppelbrechung noch keine Sättigung vorhanden. Im Gelb wird die Doppelbrechung bald nach dem Einsetzen der Erregung deutlich positiv, sie erreicht ein Maximum bei einer Phasenveränderung von 12° oder einer Verzögerung von $^1/_{30}\,\lambda$,

dann nimmt sie wieder ab. Bei dem in der Figur wiedergegebenen Versuch bleibt der Charakter immer noch positiv. In anderen Fällen wechselte dagegen die Doppelbrechung im Gelb ihr Vorzeichen. Für Grün endlich wird die Doppelbrechung zuerst langsamer, dann schneller als beim Gelb positiv. Die Phasenveränderung konnte 20° und mehr betragen. Auch im Grün trat bei sehr langen Belichtungen in einigen Fällen eine Tendenz zur Umkehr und sogar zur Negativierung zutage, doch machten sich bei diesen Versuchen, die über mehrere Tage ausgedehnt wurden, störende Nachwirkungen im Dunkeln bemerkbar, auf welche unter VII C kurz eingegangen werden soll.

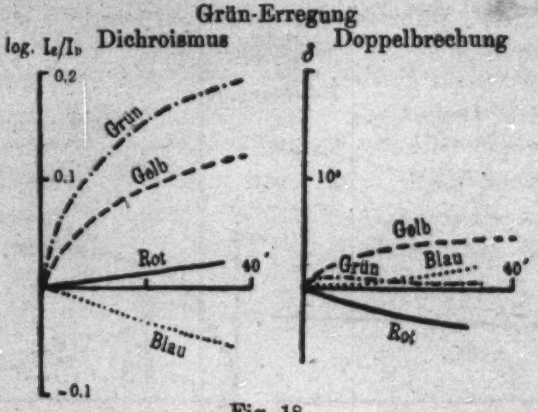


Fig. 18.

In der Fig. 18 sind nebeneinander der Dichroismus und die Doppelbrechung bei Grünerregung eingetragen. Die Beziehungen zwischen beiden Eigenschaften sind andere wie bei der Roterregung. So tritt im Grün trotz sehr starken Dichroismus nur eine minimale Doppelbrechung auf, und im Gelb ist keine merkliche Tendenz zur Umkehr und zur Negativierung vorhanden. Im Rot und Blau sind die Verhältnisse in verringertem Maße ähnlich wie bei der Roterregung.

Bei Blauerregung sind mit den schwachen dichroitischen Wirkungen so geringe Veränderungen der Doppelbrechung verbunden, daß sie mit den vorhandenen Mitteln noch nicht sicher festgestellt werden konnten.

Über den allgemeinen Zusammenhang zwischen dem Dichroismus und der Doppelbrechung eines Objektes besitzen wir bis jetzt nur die qualitative Babinetsche Regel, welche

aussagt, daß der stärker gebrochene Strahl auch stärker absorbiert wird.[1]) In unserer Bezeichnung müßten dann positiver Dichroismus und negative Doppelbrechung zusammenfallen, ebenso negativer Dichroismus und positive Doppelbrechung, da dann der in der *m*- oder *e*-Richtung schwingende Strahl gleichzeitig am stärksten absorbiert und gebrochen wird. Die Regel ist also erfüllt im Rot und Blau. Dagegen folgen die Erscheinungen im Gelb und Grün nicht der Babinetschen Regel. Es hängt dies wahrscheinlich mit den komplizierteren Veränderungen zusammen, für welche der Wechsel des Vorzeichens in diesen beiden Farben ein Anzeichen ist.

Besseren Aufschluß über den Zusammenhang werden wahrscheinlich Messungen ergeben, welche in den ersten Stadien der Belichtung angestellt werden, in denen auch der Verlauf des Dichroismus ein einfacherer ist. Dies kann aber erst nach Verfeinerung der Methoden geschehen. Es ist nicht ausgeschlossen, daß durch die Untersuchung des neuen Effektes, welcher es zum erstenmal erlaubt, ein Objekt in dosierter Weise dichroitisch zu machen, neues Licht auf die auch sonst nur mit großen Ausnahmen geltende Babinetsche Regel geworfen wird.

C. Die Nachwirkungen im Dunkeln.

Es wurde bei der Messung des Dichroismus und der Doppelbrechung beobachtet, daß im Dunkeln geringe Veränderungen eintreten, welche innerhalb 24 Stunden schon deutlich merkbar werden. Man kann sich noch kein allgemeines Bild über diese Nachwirkungen machen, welche z. B. für Gelb und Grün im entgegengesetzten Sinne verlaufen. Der Gesamthabitus der ganzen Erscheinungen wird aber durch die relativ geringen Veränderungen nicht verschoben. Sie scheinen durch den Ausgleich innerer Spannungen zu entstehen, über die man sich natürlich erst dann ein Bild machen kann, wenn die Umgebung der empfindlichen Gelatineschichten besser definiert ist. Dies muß weiteren Versuchen vorbehalten bleiben.[2])

VIII. Die Farbenänderungen der belichteten Photochloride.

Die in den letzten Kapiteln beschriebenen Beobachtungen führen zu einigen Schlußfolgerungen, die sich in folgenden Sätzen aussprechen lassen:

1) Vgl. Kayser, Spektroskopie III. S. 135.
2) Vgl. die Anmerkung am Schluß.

1. Bei der Bestrahlung von Photochloridschichten mit natürlichem und linear polarisiertem Licht einer bestimmten Farbe verändern sich die Schichten in der Weise, daß bei der Betrachtung mit natürlichem Licht die Absorption für die Erregungsfarbe geringer wird (Aufhellung).

2. Mit diesen Aufhellungen in dem Spektralgebiet der Erregungsfarbe sind Verdunklungen in anderen Spektralgebieten verbunden (Verschiebungsregel).

3. War die erregende Strahlung linear polarisiert, dann werden die Schichten *in den ersten Stadien der Belichtung* in dem Spektralgebiet der Erregungsfarbe positiv dichroitisch, d. h. die *geringere* Absorption liegt in der *e*-Richtung.

4. Mit diesen ersten positiven normalen Effekten gehen negative Effekte in anderen Spektralgebieten Hand in Hand, d. h. für diese liegt die *stärkere* Absorption in der *e*-Richtung (inverser Effekt).

5. Bei *länger dauernder* polarisierter Bestrahlung wird die Schicht auch für solche Spektralgebiete positiv dichroitisch, welche in der Erregungsfarbe nicht enthalten waren. Dies kann zur Aufhebung oder Umkehrung der unter 4. genannten inversen Effekte führen.

6. Die Fähigkeit der linear polarisierten Strahlung, in den Photochloridschichten sowohl positive als negative dichroitische Effekte hervorzurufen, nimmt nach abnehmenden Wellenlängen ab.

A. Die Farbenanpassung der Photochloride.

Diese Resultate der Beobachtung geben ohne weiteres die Deutung für die von Seebeck zuerst bemerkte Eigenschaft der Photochloride, die Farbe des Erregungslichtes anzunehmen.[1] Von Wiener wurden die Farbenänderungen als Körperfarben und nicht als Interferenz- oder Schillerfarben gedeutet, und darauf zurückgeführt, daß die Lichtabsorption spezifisch in dem Spektralgebiet der Erregungsfarbe abnimmt. In weiterer Ausbildung dieses Gedankens schlug Wiener ein Verfahren zur Photographie in natürlichen Farben vor, welches auf der selektiven Ausbleichung eines schwarzen Gemisches von rot-, grün- und blauabsorbierenden Farbstoffen beruhte. Dieser Vorschlag ist dann auch technisch in dem sogenannten Ausbleichverfahren verwertet worden.

1) Vergl. die Literatur: Verh. 21. S. 479. 1919.

Die unter 2. beschriebene Verschiebungsregel zeigt nun, daß die Tendenz der Photochloride zur Farbenanpassung im Prinzip viel idealer ist, als die im Ausbleichverfahren ermöglichte. Denn durch die mit der Aufhellung in der Erregungsfarbe verbundene gleichzeitige Dunkelung in den benachbarten Spektralgebieten wird nicht nur eine vermehrte Durchlässigkeit für das Licht der Erregungsfarbe, sondern auch noch eine verstärkte Absperrung gegen falsches Licht erreicht. Hierzu ist ein Farbstoffgemisch nicht befähigt, da die Absorptionen der nicht ausbleichenden Farbstoffe unverändert bleiben.

In Wirklichkeit werden aber die Farben von den Photochloriden nicht sehr richtig abgebildet. Denn erstens zeigt die unter 5. formulierte Beobachtung, daß bei länger dauernder Belichtung mit einer Farbe eine Tendenz zur Aufhellung auch in anderen Spektralgebieten einsetzt, wodurch das Spektralgebiet in der Abbildung verbreitert wird. Dann aber haben die Photochloride eine charakteristische rötliche Eigenfarbe, da sie vom Grün an stark absorbieren. In diesem Gebiet sind nun aber gerade die Systeme für die aufhellende Wirkung des Lichtes viel unempfindlicher, so daß sehr lange Belichtungen nötig sind, um die Absorption so weit herunter zu drücken, daß die Farbe der Schichten im weißen Licht einen blauen oder grünen Ton annimmt. Umgekehrt findet eine Aufhellung im Rot und Gelb sehr leicht statt und bewirkt gleichzeitig eine Verdunklung im Blau. Die schon an und für sich rötlich gefärbten Schichten nehmen daher auch schon bei schwachen roten und gelben Belichtungen die Erregungsfarbe an.

Auf diese Unterschiede in den verschiedenen Spektralgebieten ist in den früheren Mitteilungen schon mehrfach hingewiesen. Sie lassen sich aber durch die neuen Beobachtungen der vorigen Kapitel viel besser übersehen. Ob sich mit Photochloridschichten überhaupt eine gleichmäßige über das ganze sichtbare Spektrum verteilte Farbenanpassung erreichen läßt, scheint nach den bisherigen Beobachtungen höchstens unter Anwendung von Sensibilisatoren mit ganz neuen Eigenschaften möglich.[1])

B. Der indirekte Effekt.

Als indirekter Effekt wurde in der zweiten Mitteilung die Tatsache bezeichnet, daß natürliche und polarisierte Strahlung

1) Vgl. Anmerkung am Schluß.

derselben Energie auf die Photochloridschicht Wirkungen ausübt, die auch mit bloßem Auge als voneinander verschieden erkannt werden. Es wurde schon im Kapitel III der vorstehenden Mitteilung, in dem gezeigt wurde, daß zirkular polarisiertes Licht ebenso wirkt, wie natürliches, darauf hingewiesen, daß die zuerst ausgesprochene Vermutung, daß es sich hier um Verarmungserscheinungen handelt, wahrscheinlich nicht zutrifft, weil der indirekte Effekt schon bei sehr schwachen Belichtungen auftritt. Außerdem zeigen die S. 712 mitgeteilten photometrischen Messungen, daß auch bei Eintritt der Sättigung im Rot die Gesamtabsorption noch stark ist.

Die Messungen über den Verlauf des Dichroismus mit der Bestrahlungsdauer geben nun ohne weiteres eine Deutung für den Effekt, wie aus Fig. 19, in welcher die Dichrometerablesungen im Verlauf einer Rotbelichtung wiedergegeben sind, zu ersehen ist. Für natürliches Licht von der Intensität I_n kann man zwei senkrecht zueinander polarisierte Belichtungen mit der Intensität $I_n/2$ setzen. Die dichroitischen Wirkungen erscheinen in natürlichen Licht ebenso, als ob sie in allen Richtungen von der Intensität $I_n/2$ ausgeübt worden wären. Linear polarisiertes Licht von der Intensität I_p bewirkt die seiner Intensität entsprechenden dichroitischen Effekte. Diese Aufhellungen und Verdunklungen erscheinen aber dem Auge im natürlichen Licht nur halb so stark.

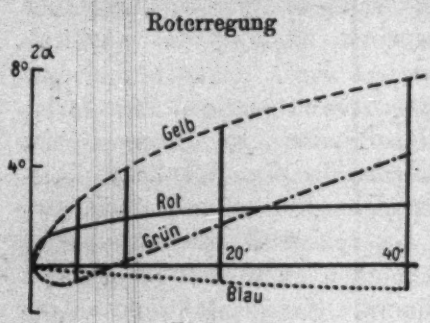


Fig. 19.

Wir vergleichen also beim indirekten Effekt die halben Absorptionsveränderungen für I_p (oder t) mit den ganzen für $I_n/2$ (oder $t/2$). Falls der Verlauf der Kurven linear wäre, würde man keinen Unterschied bemerken. Die Fig. 19 zeigt aber, daß ein Unterschied vorhanden ist. In der Tabelle ist für 10, 20 und 40 Minuten [oder $I = 10$, 20 und 40[1])] die Wirkung auf das Auge für natürliches und polarisiertes Licht zusammen-

1) Es wird hier vorläufig die Annahme gemacht, daß die dichromatischen Kurvenbilder bei wachsender Erregungsintensität (I) dieselben sind wie bei wachsender Erregungsdauer (t).

gestellt, wie sie sich aus den Schnittpunkten der betreffenden Ordinaten mit den Kurven ergibt. Es geht daraus hervor, daß in allen Fällen für Rot und Gelb in natürlichem Licht ein größerer Wert herauskommt, im Grün ein kleinerer und im Blau eine stärkere Verdunklung.

Bestr.-Zeit	Strahlungszone	rot	gelb	grün	blau
10	natürl.	+ 8	+ 13	− 4	− 1,0
	polar.	+ 5	+ 10	+ 0,5	− 0,5
20	natürl.	+ 10	+ 20	+ 1	− 2,0
	polar.	+ 6	+ 14	+ 4	− 1,5
40	natürl.	+ 12	+ 28	+ 8	− 3
	polar.	+ 6	+ 19	+ 12	− 2

Dies steht auch in Übereinstimmung mit der Erfahrung: Die mit natürlichem oder zirkular polarisiertem Licht bestrahlten Felder erscheinen in den helleren schwach absorbierten roten und gelben Farben heller und im Grün und Blau etwas dunkler als die mit linear polarisiertem Licht bestrahlten. Die geringen, aber vollkommen sicher nachweisbaren Unterschiede sind photographisch nicht gut wiederzugeben.

C. Die anomalen Farben im Polarisationsmikroskop.

In der zweiten Mitteilung über den neuen Effekt wurde kurz berichtet, daß die mit polarisiertem Licht bestrahlten Farbstoffschichten im Polarisationsmikroskop zwischen gekreuzten Nicols verschiedene Farben zeigten, wenn in der Diagonalstellung des Präparates die *e*-Richtung und *m*-Richtung miteinander vertauscht wurden. Auf S. 686 der vorstehenden Arbeit wurde gezeigt, daß dies auch bei den Photochloridschichten der Fall ist, und daß diese anomalen Farbenerscheinungen immer auftreten, wenn die linear polarisierte Strahlung überhaupt spezifisch auf lichtempfindliche Schichten einwirkt. Unter Verwendung des $\frac{1}{2}\lambda$-Glimmerdoppelsystems bei der Erregung bilden sie den empfindlichsten qualitativen Nachweis überhaupt für das Auftreten des neuen Effektes.

Die quantitativen Messungen der Doppelbrechungen im Kapitel VII B zeigten nun, daß es sich hier nicht um wahre Interferenzfarben handeln kann, da die Phasenveränderung in allen Fällen so gering ist, daß die Interferenzfarbe nur ein dunkles Grau ist. Dagegen gab die Dispersion des Dichroismus

die Deutung für die Erscheinungen, in Verbindung mit der optischen Aktivität des Bindemittels Gelatine oder Kollodium.

Dies geht aus Folgendem hervor. Die große Achse der Schwingungsellipse (Fig. 9) erhält je nach dem Vorzeichen des Dichroismus eine Neigung nach der *e*-Richtung oder *m*-Richtung des diagonal über dem Polarisator liegenden Objektes, und wenn der Analysator genau unter 90° zum Polarisator eingestellt ist, erscheint das Gesichtsfeld für eine Farbe um so mehr aufgehellt, je größer dieser Winkel ist.

Diese Neigungen der Schwingungsellipsen müßten für die beiden Stellungen symmetrisch nach beiden Seiten der Analysatorebene liegen, doch wird diese Symmetrie durch die natürliche Drehung der Polarisationsebene aufgehoben.

Diese hatte für eine der untersuchten Schichten nach folgender Tabelle von Rot nach Blau ansteigende Werte nach links

Rot	Gelb	Grün	Blau
− 0,06°	− 0,06°	− 0,07°	− 0,12°

Im Polarisationsmikroskop mit gekreuzten Nicols setzen sich die Farben zusammen aus den Quadrat des Sinus der Neigungen der Schwingungsellipsen für die verschiedenen Farben, zu denen sich die optischen Drehungen mit den richtigen Vorzeichen addieren. Sie sind also unsymmetrisch verteilt, wenn die *e*-Richtung unter + 45° oder − 45° zur Polarisationsebene des Polarisators orientiert ist. Die Mischfarben müssen also verschieden sein.

Die Unterschiede sind deutlich. Sie erscheinen durch Kontrastwirkung besonders stark, wenn zwei Felder, in denen die *e*-Richtung die verschiedene Orientierung zeigen, dicht aneinander stoßen. Dies ist nun der Fall, wenn eine Schicht hinter dem $\frac{1}{2}\lambda$-Glimmerdoppelsystem bestrahlt wurde. Es ist dies die Ursache für die anomalen Farbenerscheinungen, welche in diesem Fall im Polarisationsmikroskop beobachtet werden.

IX. Schluß.

Die Veränderungen, welche die polarisierte Bestrahlung in den Photochloridschichten bewirkt, wurden in den vorangehenden Kapiteln etwas ausführlicher besprochen als es vielleicht das Interesse des speziellen Falles erforderte. Dies schien aber schon aus dem Grunde berechtigt, weil hier Erscheinungen vorliegen, welche bisher überhaupt noch nicht bekannt waren.

Ein weiterer Grund hierfür ist aber die Tatsache, daß die Farbenanpassungen der Photochloride und ihre Variation durch polarisierte Bestrahlung wahrscheinlich nur ein Spezialfall einer viel allgemeineren Lichtwirkung ist. Mit der experimentellen und theoretischen Aufklärung würde dadurch der Schlüssel zu einigen anderen photochemischen Problemen gefunden sein. Es sollen in diesem Zusammenhang nur kurz zwei Beobachtungen mitgeteilt werden, deren genauere Beschreibung an anderer Stelle erfolgt.

1. Auch bei den früher beschriebenen Farbstoffschichten wurden neben dem Ausbleichen Andeutungen von Farbenanpassungen, welche im polarisierten Licht dichroitisch waren, aufgefunden, und weitere Versuche deuten darauf hin, daß gerade diese Veränderungen als die primäre Lichtwirkung aufzufassen sind, während der leicht beobachtbare Ausbleichvorgang nur ein sekundärer Prozeß ist. Es führt diese Beobachtung direkt in das wichtige Gebiet der photochemischen Veränderung der Farbstoffe.

2. Mit dem empfindlichen Halbschattendichrometer wurden unzweifelhafte dichroitische Effekte festgestellt, als unbelichtete Chlorsilber- und ungereifte Bromsilberemulsionsplatten der polarisierten kurzwelligen Strahlung ausgesetzt wurden. Dies steht in naher Beziehung zu den photographischen Prozessen. Die außerordentlich geringen Lichtintensitäten, welche nach S. 710 schon hinreichen, um meßbare dichroitische Effekte hervorzurufen, zeigen, daß wir in diesen ein Mittel besitzen, um noch solche Lichtwirkungen in photographischen Schichten direkt sichtbar zu machen, bei denen es bis jetzt nur durch die „Entwicklung" möglich war. Es besteht die Hoffnung, daß hierdurch das „latente" photographische Bild veranlaßt wird, seine Verborgenheit aufzugeben.

Alle bisher beschriebenen Erscheinungen wurden an festen Schichten beobachtet. Wie sich feuchte Gallerten verändern, in denen der neue Effekt auch auftritt, muß die weitere quantitative dichrometrische Untersuchung zeigen. In flüssigen Systemen wurden sie bis jetzt noch nicht aufgefunden, wie aus folgenden orientierenden Versuchen hervorgeht.

In diesen Fällen war ein dauernd gerichteter Effekt von vornherein nicht zu erwarten, dagegen konnte ein dichroitischer Momentaneffekt auftreten. Um diesen beobachten zu können,

wurde eine Küvette mit einer absorbierenden Lösung im Dichrometer selbst mit intensivem linear polarisiertem Licht bestrahlt, welches seitlich unter 45° einfiel, so daß die Schwingungsrichtung des Lichtes senkrecht zur Blickrichtung im Dichrometer lag. Falls die absorbierende Flüssigkeit dadurch dichroitisch wird, müßte die optische Achse unter 45° zur Schwingungsrichtung des Polarisators des Halbschattenapparates liegen. Der Dichroismus ließe sich also durch eine Drehung der Polarisationsebene feststellen.

Zur Untersuchung kamen einige fluoreszierende und nicht fluoreszierende Farbstoffe mit und ohne Gelatinezusatz. Es konnte aber bis jetzt in keinem Fall ein dichroitischer Effekt beobachtet werden, trotzdem die Empfindlichkeit der Apparatur auch während der Bestrahlung noch so groß war, daß eine Veränderung der Analysatorrichtung um 0,02° noch erkannt wurde.

Es ist beabsichtigt, eine Methode von hoher Empfindlichkeit auszubilden, um nach Absorptionsverschiebungen, die durch einfallendes natürliches Licht bewirkt werden, zu suchen. Es ist zu erwarten, daß dadurch eine Reihe photochemischer Probleme gefördert werden. Dasselbe gilt für Fragen über die Veränderlichkeit der Absorption, unter denen nur die häufige Ungültigkeit des Beerschen Gesetzes erwähnt sei.

Die vorstehenden Ausführungen bezwecken in erster Linie eine Mitteilung der neuen Beobachtungen. Nur kurz wurde an wenigen Stellen auf eine Deutung eingegangen. Es soll hierfür auf die Diskussionen in der dritten Mitteilung (a. a. O.) verwiesen werden.[1]) Eine Erklärung der Beobachtungen auf chemischem Wege scheint nach der Auffindung der inversen Effekte, und bei dem quantitativen Verlauf der ganzen Erscheinung kaum mehr möglich. Dagegen gelingt bei Annahme von mechanischen Veränderungen der Systeme, die durch Verschiebungen elektrischer Ladungen hervorgerufen werden, eine Deutung zwanglos mittels zusammenhängender Komplexe, welche in allen Farben absorbieren. Andeutungen über die Art, wie man sich solche Komplexe vorstellen kann, und wie sie sich photokinetisch verändern, wurden schon in den früheren Mitteilungen gemacht. Über die speziellen Eigenschaften dieser Gebilde, welche scheinbar häufig bei photochemischen Vorgängen

1) Vgl. Anm. am Schluß.

auftreten und welche in Beziehung zur Morphologie der Kolloide stehen, soll an anderer Stelle ausführlich eingegangen werden.

X. Zusammenfassung.

Die wesentlichen Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung lassen sich in folgender Weise zusammenfassen.

1. Die Methoden zur qualitativen Untersuchung der Wirkung linear polarisierten Lichtes auf lichtempfindliche Schichten wurden verbessert. Sie wurden speziell zur Kenntnis der Veränderung von Photochloridschichten in Gelatine angewandt.

2. Die Wirkung von zirkular polarisiertem Licht wurde als gleichartig mit der Wirkung natürlichen Lichtes erkannt. Beim Vergleich von Bestrahlungen mit linear und zirkular polarisiertem Licht gleicher Stärke ergaben sich Unterschiede der Farbennuance, welche mit bloßem Auge festgestellt werden konnten. Dies entspricht dem früher beschriebenen indirekten Nachweis der spezifischen Wirkung linear polarisierten Lichtes.

3. Es wurde eine Anordnung zur Beobachtung eines Transversaleffektes senkrecht zur Bestrahlungsrichtung beschrieben.

4. Durch die Transversalbeobachtung wurde festgestellt, daß nur dann die lichtempfindliche Schicht dichroitisch und anisotrop wird, wenn der elektrische Vektor der erregenden Strahlung eine Komponente in der Schichtebene hat.

5. Die optische Achse der durch die Bestrahlung entstehenden neuen anisotropen Gebilde liegt in der Richtung des elektrischen Vektors. Wenn man diese Richtung in der Schicht als die *e*-Richtung, die dazu senkrechte als die *m*-Richtung bezeichnet, schwingt der außerordentliche Strahl in der *e*-Richtung.

6. Durch seitliche Belichtung der Schichten mit natürlichem Licht erhalten sie dauernd anisotrope Eigenschaften. Dies Resultat war nach 4. vorauszusehen.

7. Bei der natürlichen farbigen Erregung von Photochloridschichten und bei der nachfolgenden Beobachtung in den verschiedenen Farben wurde festgestellt, daß regelmäßig eine Aufhellung eintrat, wenn Erregungs- und Beobachtungsfarbe übereinstimmen, eine Verdunklung, wenn sie verschieden sind (Absorption-Verschiebungsregel).

8. Dieses Resultat wurde für Rot, Grün und Blau subjektiv, photographisch und spektrophotometrisch bestätigt.

9. Bei der Bestrahlung von Photochloridschichten mit farbigem linear polarisiertem Licht wurden in der Erregungsfarbe normale oder positive dichroitische Effekte, in anderen Farben, besonders im Blau, inverse oder negative dichroitische Effekte subjektiv und photographisch festgestellt. Der Dichroismus ist positiv, wenn der in der *e*-Richtung schwingende Strahl schwächer absorbiert wird, als der in der *m*-Richtung schwingende.

10. Zur quantitativen Beobachtung des Dichroismus wurde eine neue dichrometrische Methode auf Grund eines Halbschattenprinzips ausgearbeitet, welche noch Helligkeitsunterschiede von weniger als 0,1 Proz. zu messen gestattet. Die gewöhnlichen subjektiven photometrischen Methoden werden dadurch an Genauigkeit um das Zehn- bis Hundertfache übertroffen.

11. Die quantitativen dichrometrischen Messungen zeigten, daß der Verlauf des Dichroismus mit zunehmender Erregungsdauer für die verschiedenen Erregungs- und Meßfarben ein ganz spezifischer war.

12. Es ergab sich das allgemeine Resultat, daß der Dichroismus stets positiv war, wenn Erregungs- und Meßfarbe übereinstimmten. Im Anfang der Erregung war er für alle erregungsfremden Farben negativ. Bei länger dauernden Bestrahlungen können sich die inversen Effekte in normale und im Blau der normale Effekt in einen inversen umkehren.

13. Schon bei Belichtungszeiten von weniger als 0,04 Sek. lassen sich im Dichrometer Veränderungen der Schicht feststellen. Es ist dies eine Empfindlichkeit, welche in der Größenordnung der photographischen liegt.

14. Die Veränderung der Doppelbrechung mit der Bestrahlungsdauer wurde mit einem Kompensator gemessen. Sie ist für die verschiedenen Farben eine verschiedene. Es können ähnlich wie beim Dichroismus Umkehrungen des Vorzeichens des Charakters der Doppelbrechung auftreten. Wenn der kleinere Brechungsexponent in der *e*-Richtung liegt, ist der Charakter negativ.

15. Die Babinetsche Regel über den Zusammenhang zwischen Dichroismus und Doppelbrechung gilt nur für die Meßfarben Rot und Blau.

16. Es wurden schwache Veränderungen des Dichroismus

und der Doppelbrechung nach der Belichtung als Nachwirkungen im Dunkeln festgestellt.

17. Auf Grund der dichrometrischen Messungen und der quantitativen Beobachtungen konnten einige Farbenveränderungen belichteter Photochloridschichten gedeutet werden. Es sind dies die bekannten Farbenanpassungen, die verschiedenen Farbennuancen beim indirekten Effekt und die verschiedenen Farben bei der Beobachtung der belichteten Schichten im Polarisationsmikroskop.

18. Es wurde auf einige Einzelversuche hingewiesen, welche eine Übertragung der Beobachtungen an Photochloriden auf andere wichtige photochemische Prozesse aussichtsreich erscheinen lassen.

Meinem Assistenten Hrn. Dr. Pohle sage ich an dieser Stelle für seine verständnisvolle Hilfe bei den Versuchen meinen Dank.

Leipzig, Physikalisch-chemisches Institut der Universität.

(Eingegangen 6. Mai 1920.)

Anmerkung bei der Korrektur: Während der Drucklegung der vorliegenden Mitteilung ergaben sich einige weitere experimentelle Resultate, welche die Farbenveränderungen bei der Erregung durch farbiges Licht auf die Farbenverschiedenheiten in kolloiden Metallen zurückzuführen erlauben. Hierbei boten die näher studierten Veränderungen des Dichroismus bei verschiedenen Nachbehandlungen der polarisiert erregten Schichten wertvolle Anhaltspunkte. Die in der III. Mitteilung vorgeschlagene Deutung der Effekte konnte so auf bekannte Erscheinungen zurückgeführt werden. Hierüber soll in kurzer Zeit berichtet werden.

Die im Text auf S. 717 diskutierte Möglichkeit der brauchbaren Farbenwiedergabe mittels farbenempfindlicher Photochloride ist bei der Abbildung eines Spektrums mit polarisiertem Licht und Betrachtung der erregten Stelle im Polarisationsmikroskop zwischen gekreuzten Nikols praktisch erreichbar. Die nicht erregten isotropen Teile der Schicht sind dann dunkel und das Spektrum erscheint in leuchtenden Farben auf dunklem Grund. Es liegt hier im Prinzip eine neue Methode zur Photographie in natürlichen Farben vor.

2. *Die Aufrechterhaltung der negativen Erdladung, das Grundproblem der luftelektrischen Forschung. (Bemerkungen zur gleichbetitelten Arbeit des Hrn. R. Seeliger*[1]*);*

von E. Schweidler.

Inhaltsübersicht: 1. Einleitung. 2. Eberts Theorie. 3. Die Hypothese negativer Korpuskularstrahlung und ihre experimentelle Prüfung. 4. Korpuskularstrahlung und Ionisierung der Atmosphäre. 5. Vereinfachtes Schema der Typen möglicher Theorien. 6. Experimentelle Wege zur Klärung des Problemes.

1. Einleitung.

In der genannten Arbeit geht Seeliger davon aus, daß das Grundproblem der luftelektrischen Forschung, die Erklärung des „*Gegenstromes*", d. i. des Vorganges, durch den die negative Ladung der Erde und damit das elektrische Feld der Atmosphäre trotz des Bestehens des die felderzeugenden Ladungen ausgleichenden Leitungsstromes aufrecht erhalten wird, bisher ungelöst ist, ja daß den bis jetzt vorliegenden Lösungsversuchen derartige Bedenken gegenüberstehen, daß vielleicht sogar prinzipiell neue, derzeit noch unbekannte Naturvorgänge als Ursachen heranzuziehen wären. Um sich in seiner Kritik nicht auf die zufällig von verschiedenen Autoren bisher vertretenen Hypothesen beschränken zu müssen, stellt Seeliger ein wesentlich von geometrischen Gesichtspunkten ausgehendes Schema der *überhaupt denkbaren Theorien* auf und gelangt so zunächst zu 21 möglichen „einfachen" Theorien, zu denen noch 8 „Kombinations"theorien hinzukommen. Die Diskussion der physikalischen Zulässigkeit, d. i. Vereinbarkeit mit bereits empirisch festgestellten Tatsachen, führt ihn dann zum Ergebnis, daß von den 21 einfachen Theorien bloß noch *drei* in Betracht kommen: nämlich die in

1) R. Seeliger, Ann. d. Phys. **62**. S. 464 1920.

seinem Schema mit I 3*p* (oder für gewisse Gebiete mit II 3*p*) bezeichnete, die im wesentlichen der Ebertschen Theorie eines Konvektionsstromes positiver Elektrizität infolge aufsteigender Luftbewegung entspricht, sowie die beiden Formen II 13 *pn* und II 13 *nn*, die eine Zufuhr negativer Ladungen zur Erde an ausgezeichneten Stellen (in den Polargebieten) durch negative Korpuskularstrahlen annehmen und damit entweder eine Zufuhr positiver Ladung durch positive Korpuskularstrahlen zu den höchsten Schichten der Atmosphäre oder eine Elektronenabgabe dieser Schichten nach außen verbunden denken. Alle anderen Formen werden abgelehnt, speziell die Korpuskularstrahlentheorien der Type I und zwar diese hauptsächlich auf Grund der negativen Ergebnisse von Versuchen, die ich[1]) zur Prüfung dieser Hypothese angestellt hatte. Analoge Versuche im Polargebiete wären nach Seeliger ein „experimentum crucis" dafür, ob eine der beiden Formen II 13 *pn* oder II 13 *nn* tatsächlich die Lösung des Problemes bringt.

Die formale Gruppierung Seeligers erscheint mir nun sehr zweckmäßig, da sie wirklich alle denkbaren Formen theoretischer Erklärungsversuche umfaßt und übersichtlich ordnet; in sachlicher Beziehung, insbesondere bezüglich der Unterscheidung von schon jetzt abzulehnenden und von derzeit noch zulässigen Theorien möchte ich aber im folgenden einen teilweise abweichenden Standpunkt vertreten.

2. Eberts Theorie.

Bezüglich dieser Theorie gibt Seeliger zu, daß das Produkt ϱv aus räumlicher Ladungsdichte ϱ und vertikaler Geschwindigkeit v nach aufwärts in *höheren* Luftschichten unmöglich den Wert annehmen könne, der zur Deckung des normalen vertikalen Leitungsstromes (etwa $7 \cdot 10^{-7}$ stat. Einh. pro qcm) notwendig wäre. Für die tieferen Luftschichten hält er aber einen zwingenden Gegenbeweis als noch nicht erbracht und bezeichnet speziell Gegengründe allgemeiner Natur, die Swann angeführt hatte, als nicht bindend.

Nun lassen sich aber die quantitativen Verhältnisse beim vertikalen Konvektionsstrom viel schärfer fassen, als es bisher

1) E. v. Schweidler, Wien. Ber. 127. S. 515. 1918.

geschehen ist, wenn man eine von W. Schmidt[1]) eingeführte Größe, den sogenannten „*Austausch*“ darauf anwendet.

Bezeichnet nämlich s die in der Masseneinheit Luft enthaltene Menge irgendeines Quantums (materielle Beimengung, Energie, elektrische Ladung, Bewegungsgröße usw.), das an der Luft haftet und mit ihr sich bewegt, ds/dz den Differentialquotienten nach der aufwärts gerichteten z-Koordinate, dann läßt sich nach Schmidt die Dichte $\mathfrak{S}$ des aufwärts gerichteten Konvektionsstromes darstellen durch:

$$\mathfrak{S} = -A\frac{ds}{dz},$$

worin A eine nur von der Luftbewegung abhängige Größe von der Dimension $[m\,l^{-1}\,t^{-1}]$ ist, die als „*Austausch*“ bezeichnet wird. Aus verschiedenen meteorologischen Daten (z. B. der vertikalen Verteilung der Windgeschwindigkeit oder der Temperatur) leitet Schmidt ab, daß in den uns zugänglichen Atmosphärenschichten der numerische Wert von A zwischen etwa 50 und 100 g cm^{-1} sec^{-1} liegt und nur in unmittelbarer Bodennähe (etwa bis 10 m) auf die Größenordnung 1 sinkt. In guter Übereinstimmung damit stehen die Ergebnisse über die vertikale Verteilung radioaktiver Zerfallsprodukte in der Atmosphäre nach den Berechnungen von Schmidt und Hess.[2])

Führt man statt s, des Gehaltes der Masseneinheit, die Raumdichte ϱ ein, so tritt an Stelle von A der Zahlenwert 800 A. Für den Ebertschen Konvektionsstrom erhält man daraus folgendes numerische Resultat — bei absichtlich günstigen Annahmen:

In der Schichte von $z = 0$ bis $z = 1{,}5 \cdot 10^5$ cm kann die mittlere Raumdichte der positiven Ladung auf Grund von Ballonbeobachtungen des Potentialgefälles rund $\bar{\varrho} = 1{,}3 \cdot 10^{-9}$ stat. Einh./cm^3 gesetzt werden.[3]) Wird zunächst *lineares* Dichtengefälle angenommen und ϱ_1 in der Höhe $z = 1{,}5$ km gegen ϱ_0 vernachlässigt, so wird $\varrho_0 = 2\bar{\varrho}$ und $\frac{d\varrho}{dz} = -1{,}7 \cdot 10^{-14}$;

1) W. Schmidt, Wien. Ber. 126. S. 757. 1917; vgl. auch W. Schmidt und F. V. Hess, Phys. Ztschr. 19. S. 109. 1918.

2) a. a. O.

3) Vgl. E. v. Schweidler und K. W. F. Kohlrausch, Handbuch der Elektr. von L. Graetz, III. Band. S. 253.

mit dem oberen Grenzwerte $A = 100$ berechnet sich daraus $\mathfrak{S} = 1{,}4 \cdot 10^{-9}$ stat. Einh./cm³

Bei Annahme *nichtlinearen* Dichtegefälles wird das Resultat nur ungünstiger, da bei gegebenem $\bar{\varrho}$ der Differentialquotient $d\varrho/dz$ notwendig in dem einen Höhenbereich erniedrigt werden muß, wenn er im andern erhöht eingesetzt wird.

Selbst in der untersten $1^1/_2$ km hohen Luftschichte ist also der Ebertsche Strom ($\leqq 1{,}4 \cdot 10^{-9}$) klein gegen den Leitungsstrom (rund $7 \cdot 10^{-7}$); noch weit größer wird die Abweichung für die höheren Schichten. Damit scheidet die Ebertsche Theorie für alle Höhen, die größer als nur wenige hundert Meter sind, gänzlich aus.

3. Die Hypothese negativer Korpuskularstrahlung und ihre experimentelle Prüfung.

Wie schon erwähnt, lehnt Seeliger derartige Hypothesen für *unsere Breiten* ab wegen der negativen Ergebnisse meiner Versuche. Deren Prinzip ist das folgende: ein Luftkondensator besteht aus einer massiven Innenbelegung, die isoliert und mit einem Elektrometer verbunden ist, und einer dünnen Außenbelegung, die auf konstantes Potential $\pm E$ geladen wird. Über den Sättigungsstrom $\pm i_s$, der infolge dieses elektrischen Feldes und der natürlichen Ionisierung im Luftzwischenraum zur Innenelektrode fließt, lagert sich der hypothetische Korpuskularstrom $-y$, entsprechend dem in der Innenelektrode *absorbierten* Betrage der Strahlung. Meinen experimentellen Befund, der für y keinen die Beobachtungsfehler übersteigenden Wert lieferte, möchte ich nicht für so bindend halten, als dies Seeliger annimmt; das Nichtvorhandensein einer negativen Korpuskularstrahlung konnte ich nur mit zwei Einschränkungen folgern, nämlich: 1. die hypothetische Strahlung besitzt einen Massenabsorptionskoeffizienten μ/ϱ, der entweder so groß ist, daß die dünne Außenbelegung, bzw. Fensterglas und gleichartige Hindernisse die Strahlung bis zur Unmerklichkeit abschwächen, oder so klein ist ($\mu/\varrho < 3 \cdot 10^{-4}$ cm²/g), daß der absorbierte Betrag unmerklich bleibt; 2. es wird vorausgesetzt, daß die negative Aufladung der Innenbelegung durch die absorbierte Strahlung nicht etwa zufällig kompensiert wird durch eine an ihr erregte sekundäre Elektronenemission. Die experi-

mentelle Begründung dieser Voraussetzung (durch einige Versuchsreihen mit verschieden dicker Innenbelegung) ist wohl kaum ausreichend für ein abschließendes Urteil.

Dementsprechend erscheint mir das Resultat vom rein experimentellen Standpunkt aus als noch kein endgültiges; Wiederholung der Versuche mit verbesserter Anordnung (siehe weiteres hierüber in Abschnitt 6) wäre abzuwarten. Ebenso würde mir daher auch bei negativem Ausfall ähnlicher Versuche in Polargebieten dies noch nicht als ein gegen die von Seeliger vorläufig zugelassenen Theorien der Typen II 13 *pn* und II 13 *nn* entscheidendes „experimentum crucis" gelten.

4. Korpuskularstrahlung und Ionisierung der Atmosphäre.

Während mir nach den vorstehenden Ausführungen das *unmittelbare Versuchsergebnis* nicht genügend beweiskräftig für das Nichtvorhandensein einer negativen Korpuskularstrahlung in mittleren Breiten zu sein scheint, finde ich in den Konsequenzen, zu denen diese Hypothese in bezug auf die Ionisierung der Atmosphäre führt, eine unüberwindliche Schwierigkeit, die *weder in niederen noch in hohen Breiten* die Existenz einer solchen Strahlung als möglich erscheinen läßt.

Zur Deckung des normalen Leitungsstromes müßten nämlich rund 1500 Elektronen pro qcm und sec eine horizontale Fläche in Bodennähe durchsetzen und es erhebt sich die Frage, ob ein so starker Korpuskularstrom ohne *sehr große* Ionisierung der Luft denkbar ist. In der früher erwähnten Arbeit[1]) habe ich diese Bedenken bereits erwähnt und dazu angewandt, den Bereich, innerhalb dessen die Massenabsorption der hypothetischen Strahlung noch liegen könnte, noch weiter einzuschränken als auf Grund der experimentellen Ergebnisse. Ich kann aber heute die dort ausgeführten Überlegungen in dieser Form nicht mehr aufrecht erhalten, da ich zugeben muß, mich der von Lenard[2]) beanstandeten Unklarheit in der Fassung des Absorptionsbegriffes ebenfalls schuldig gemacht zu haben. Mit der auf Grund der Darstellung Lenards ge-

1) E. v. Schweidler, a. a. O., Abschn. 4.

2) P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten, Heidelberg 1918.

klärteren Auffassung komme ich aber zu keinem besser befriedigenden Ergebnis.

Bezeichnet man mit Lenard[1]) durch s die Zahl der von einem bewegten Elektron auf der Längeneinheit seiner Bahn in Luft normaler Dichte erzeugten Ionenpaare („*summarische differentiale Sekundärstrahlung*" bei Lenard), so ist auf Grund mehrerer übereinstimmender Versuchsergebnisse[1]) für schnelle β-Strahlen s etwa von der Größenordnung 50 cm^{-1}. Trennt man s in zwei Bestandteile: s' („*reine differentiale Sekundärstrahlung*") und s'' (Tertiärstrahlung), so ist nach Lenard[2]) mit großer Wahrscheinlichkeit anzunehmen, daß bei Annäherung an volle Lichtgeschwindigkeit die Größe s' (bzw. der „sekundärstrahlende Querschnitt" einer Luftmolekel) auf den Wert Null abnimmt, dagegen die mittlere Geschwindigkeit der Sekundärstrahlen und damit die Tertiärstrahlung derart anwächst, daß die Größe s einem Grenzwert von etwa 40 cm^{-1}) zustrebt. Während man also für die *Absorption* einen beliebig kleinen Wert erhält durch die Annahme einer der LG hinreichend nahekommenden Strahlgeschwindigkeit[3]), läßt sich auf Grund der

1) P. Lenard, a. a. O., Taf. VII.

2) Ebenda, S. 145. 173. 181.

3) Lenard vermeidet absichtlich alle Extrapolationen auf Grund empirischer Formeln oder theoretischer Voraussetzungen. Will man aber notgedrungen zu diesem Auskunftsmittel für hypothetische Strahlen eines bisher unbekannten Geschwindigkeitsbereiches greifen, so bietet die Tatsache einen Anhaltspunkt, daß bei den schnellsten beobachteten Strahlen (von etwa 0,8—0,99 LG) das Produkt $P^{3/2} Q_a$ (wobei P die Voltgeschwindigkeit und Q_a der absorbierende Querschnitt in Einheiten des gaskinetischen Querschnittes ist) leidlich konstant bleibt, etwa mit dem Werte 130. Daraus berechnet sich folgende Tabelle, die einen Überblick gibt über die Eigenschaften, welche eine von außen eindringende oder von hohen Atmosphärenschichten ausgehende Strahlung besitzen müßte, damit sie die Erdatmosphäre ohne zu große Schwächung und das magnetische Erdfeld ohne zu große Ablenkung durchdringen könnte.

Geschwindigkeit	Voltgeschw.	Massenabs. a/ϱ	Halbier. dicke in Luft u. Dichte	$\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{R}$
$1-10^{-4}$	$3{,}6 \cdot 10^7$ V.	$15 \cdot 10^{-3}$ cm^2/g	0,36 km	120000 $\Gamma \cdot cm$
$1-10^{-5}$	$1{,}1 \cdot 10^8$ „	$2{,}4 \cdot 10^{-3}$ „	2,25 „	380000 „
$1-10^{-6}$	$3{,}6 \cdot 10^8$ „	$4{,}8 \cdot 10^{-4}$ „	11,2 „	$1{,}2 \cdot 10^6$ „
$1-10^{-7}$	$1{,}1 \cdot 10^9$ „	$8{,}5 \cdot 10^{-5}$ „	63 „	$3{,}8 \cdot 10^6$ „
$1-10^{-8}$	$3{,}6 \cdot 10^9$ „	$1{,}5 \cdot 10^{-5}$ „	360 „	$1{,}2 \cdot 10^7$ „

Lenardschen Auffassung bei der *Ionisierungsfähigkeit eine gegebene untere Grenze nicht überschreiten.*

Ebensowenig führt eine rein theoretische Betrachtung zu einem günstigeren Resultat. Bei hinreichender Annäherung der Strahlgeschwindigkeit an die Lichtgeschwindigkeit wird zwar in bekannter Weise die Masse und die kinetische Energie des bewegten Teilchens unendlich groß; der beim Passieren eines ruhenden Elektrons auf dieses übertragene Energiebetrag bleibt aber endlich, wenn man den von J. J. Thomson[1]) aufgestellten und von C. G. Darwin[2]) und N Bohr[3]) weiter benützten Ansatz beibehält. Bezeichnen nämlich e und e' die Ladungen eines bewegten und eines ruhenden Teilchens, m und m' ihre Massen, v die Geschwindigkeit und p den Abstand des ruhenden Teilchens von der ungestörten Bahn, so ist hiernach die übertragene Energie:

$$\Delta E = \frac{2m' m^2 v^2}{(m+m')^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{p^2 v^4}{e^2 e'^2}\left(\frac{m m'}{m+m'}\right)^2}.$$

Die Berücksichtigung der Deformation des elektrischen Feldes einer schnell bewegten Ladung ändert hieran nichts. Von diesem Standpunkte aus würde also — im Gegensatz zur Auffassung Lenards — nicht einmal die *primäre* Ionisierung (*reine* differentiale Sekundärstrahlung Lenards) sich ändern, wenn die Geschwindigkeit der LG sehr nahe kommt.

Ich möchte die Aufmerksamkeit der Theoretiker auf dem Gebiete der Elektronik auf diesen Punkt lenken und sie bitten, sich zu der Frage zu äußern:

Sind die Vorgänge der Energieübertragung bei der Durchquerung eines Atomes durch äußerst schnelle Elktronen wirklich bereits theoretisch sichergestellt oder ist es doch denkbar, daß bei Berücksichtigung anderer (z. B. magnetischer) Kräfte neben den elektrostatischen oder allenfalls bei der Annahme eines diskreten Feldes eines Elektrons (Einzelkraftlinien im Sinne Lenards) der mittlere Betrag der an das Atom über-

1) J. J. Thomson, Phil. Mag. (6) 23. S. 449. 1912.
2) C. G. Darwin, Phil. Mag. (6) 23. S. 901. 1912.
3) N. Bohr, Phil. Mag. (6) 25. S. 10. 1913.

tragenen Energie verschwindet, wenn die Geschwindigkeit des durchquerenden Elektrons die Lichtgeschwindigkeit erreicht?

Bleibt das oben dargestellte theoretische Ergebnis aufrecht erhalten, dann führt jede Korpuskulartheorie des Gegenstromes (auch solche, die positive Strahlen aufwärts annehmen) zur Konsequenz, daß an den Stellen, wo die Strahlung die bodennahen Luftschichten durchsetzt, eine Ionisierungsstärke von mindestens 60000 Ionenpaaren pro cm^3 sec herrschen muß, gegenüber dem Werte 1—2, der auf Grund direkter Beobachtungen (teilweise auch in Polargebieten!) für die Wirkung einer sehr durchdringenden Strahlung verfügbar bleibt.

5. Vereinfachtes Schema der Typen möglicher Theorien.

Auf Grund der Ausführungen in den vorhergehenden Abschnitten ist gegenüber den Anschauungen Seeligers die Aussicht der theoretischen Erklärung noch verschlechtert, da auch die wenigen von ihm als derzeit noch zulässig bezeichneten Theorien ausscheiden und somit eigentlich gar keine Erklärungsmöglichkeit übrig bleibt. Da nun bei Seeligers mehr geometrischem Einteilungsprinzip die Ablehnung einer bestimmten Type bisweilen nur eine physikalisch spezialisierte Form betrifft und daher in ihrer allgemeinen Gültigkeit zweifelhaft bleiben könnte, soll für einen *vorläufigen* Überblick über logisch und physikalisch zulässige Theorien ein *vereinfachtes* Schema aufgestellt werden.

Die Hauptgruppen, die Seeliger als I und II unterscheidet („dreieckige" und „viereckige" Stromschleife) und die ich seinerzeit als Unterabteilungen A und B („an Ort" und „an entfernter Stelle") eingeführt hatte, sollen nicht getrennt werden; wir wollen einfach fragen nach der Natur des Gegenstromes an den Stellen, wo er eben wirklich vorhanden ist, also uns auf Gruppe I (bzw. A) beschränken. Ebenso werde die feinere Unterscheidung Seeligers in die Typen I 1, I 2, I 3 — je nach der Lage des Gebietes P, von dem aus die Stromlinien des Gegenstromes zur Atmosphäre A und zum Erdboden E verlaufen, vorläufig zurückgestellt. Nur das *Vorzeichen* der Träger auf der Strecke PE werde zur Teilung in Hauptgruppen verwendet, die dann wie bei Seeliger durch p und n bezeichnet werden. Daneben werde aber die *physikalische* Natur des Vor-

ganges, d. h. die *treibenden Kräfte* in den Vordergrund gestellt. Als mögliche Triebkräfte sollen angenommen werden: a) elektrisches Feld; b) Trägheitsbewegung; c) Gravitation; d) selektive Kräfte, die speziell auf die Ladungsträger des Gegenstromes wirken (z. B. Strahlungsdruck); e) mechanische Konvektion durch Luftbewegung. Sogenannte „Kombinations"-theorien sollen als gleichzeitig gültige einfache Theorien aufgefaßt und daher nicht weiter unterschieden werden.

Man erhält also das Schema:

Triebkraft	Ladung der Träger	
	positiv	negativ
a) Elektrisches Feld .	ap	an
b) Trägheit	bp	bn
c) Gravitation . . .	—	cn
d) Selektive Kraft . .	dp	dn
e) Konvektion . . .	ep	—

Bei a) ist natürlich ap und an gleichzeitig erfüllt; bei c) ist wegen der gegebenen Richtung nur cn möglich, bei e) wegen des empirisch festgestellten positiven Vorzeichens der Raumladung nur ep.

Von bereits bekannten Theorien entspricht $(ap + an)$ der Hypothese, daß der gestörte Leitungsstrom in Gebieten negativen Potentialgefälles den normalen kompensiere; bn den verschiedenen Formen der Korpuskularstrahltheorien (Simpson, Swann, Schweidler, Seeliger); unter cn wäre die Gerdiensche Theorie des negativen Niederschlages einzureihen und unter ep die Ebertsche Theorie.

Eine Diskussion der physikalischen Zulässigkeit der im Schema angeführten Typen — ohne Beschränkung auf die bisher von verschiedenen Autoren wirklich vertretenen — führt dann zu folgendem Ergebnis:

Gegen $(ap + an)$ spricht die Statistik über Häufigkeit und Größe umgekehrt gerichteten Erdfeldes [Simpson[1]] an allen luftelektrischen Stationen, mit längeren Beobachtungsreihen;

1) G. C. Simpson, Met. Zeitschr. 30. S. 235. 1913; vgl. auch E. v. Schweidler, Enzykl. d. math. Wiss. VI 1. 9. S. 260.

immerhin wäre eine genauere und ausgedehntere Statistik der „Störungen" wünschenswert.

Gegen bp und bn sprechen vorläufig vor allem die theoretischen Bedenken, die in Abschnitt 4 ausführlich behandelt sind. Für alle Theorien der Typen cn und dn kann folgende Bedingungsgleichung abgeleitet werden:

Es bezeichne N die in der Volumeinheit enthaltene Ladung (gemessen in Elementarquanten) der negativen Träger des Gegenstromes, V ihre mittlere Vertikalgeschwindigkeit abwärts, n_1 und n_2 die Zahlen der positiven und negativen Ionen und v ihre mittlere wahre Geschwindigkeit im Erdfeld; dann muß einerseits $NV = (n_1 + n_2)v$ sein, da letztere Größe den vertikalen Leitungsstrom darstellt; andererseits muß, da erfahrungsgemäß die Raumdichte der Ladung in der Atmosphäre positiv ist, die Ungleichung $N < (n_1 - n_2)$ gelten. Daraus folgt

$$V > v,$$

d. h. die Sinkgeschwindigkeit der Träger muß groß gegen die absolute Geschwindigkeit der Luftionen sein, die bei einer Beweglichkeit von rund 1 $\frac{\text{cm}^2}{\text{Volt} \cdot \text{sec}}$ und einem Feld von durchschnittlich 100 V/m von der Größenordnung 1 $\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ ist.

Dieser Bedingung genügt z. B. die Gerdiensche Theorie mit fallenden Regentropfen als Trägern — die aber bekanntlich durch den empirischen Nachweis des Überwiegens positiver Regenladungen widerlegt wurde — alle eventuell denkbaren Theorien, die durch seine Schwere sich senkenden oder durch Strahlungsdruck getriebenen kosmischen Staub oder durch Ionenadsorption negativ geladenen tellurischen Staub als Träger annehmen sollten, werden aber durch diese Bedingung unhaltbar. Bei der Type dp, der bisher keine klar formulierte Annahme entspricht, läßt sich allgemein kaum etwas dafür oder dagegen aussagen. Für ep gelten allgemein (auch wenn man andere Träger als die gewöhnlichen Luftionen voraussetzen wollte) die in Abschnitt 2 ausführlich entwickelten Gegengründe.

6. Experimentelle Wege zur Klärung des Problemes.

Auf Grund der vorstehenden Darlegungen kann ich die Anschauung Seeligers nicht teilen, daß ein angebbares, ver-

hältnismäßig einfaches „experimentum crucis“ die Entscheidung bringen soll, vielmehr erscheinen mir noch zahlreiche, vorläufig mehr oder minder tastende Versuche und Beobachtungen nötig, um der Lösung allmählich näher zu kommen. Als solche kommen die im folgenden genannten in Betracht.

Zunächst wäre, wie schon erwähnt, zur Prüfung der Theorien vom Typus *a* eine genauere Statistik über Größe und Häufigkeit des gestörten Leitungsstromes wichtig. Die vielfach noch übliche Beschränkung luftelektrischer Messungen auf „störungsfreie“ Tage entspricht nicht mehr den Bedürfnissen der Forschung bei den gegenwärtig im Vordergrund stehenden Problemen.

Für Type *b* wären Versuche zum Nachweis einer sehr durchdringenden Korpuskularstrahlung mit verbesserter Versuchsanordnung fortzusetzen, besonders auch — wie Seeliger hervorhebt — in *Polargegenden* oder wenigstens hohen Breiten. Als Verbesserungen wären zu nennen: erhöhte Ladungsempfindlichkeit des Elektrometers, *größere Masse* der Innenbelegung, Versuche mit Kondensatoren, deren Hohlraum mit *stark verdünnter* Luft erfüllt ist, damit der durch die natürliche Ionisation bedingte Leitungsstrom herabgesetzt wird; vielleicht wäre dann auch das von mir[1]) als „Methode des Endpotentiales“ bezeichnete Verfahren aussichtsreich, bei dem die äußere Belegung dauernd geerdet bleibt und unmittelbar die Aufladung der Innenbelegung gemessen wird.

Außer solchen Versuchen mit dem „*Absorptionskondensator*“ wie man kurz sagen könnte, sind aber noch andere experimentelle Wege zum Nachweis einer Korpuskularstrahlung denkbar. Nehmen wir z. B. mit Swann an, daß die Luft selbst eine sehr harte β-Strahlung aussendet (sei es eine primäre infolge einer spezifischen Radioaktivität, sei es eine sekundäre, durch einfallende kosmische γ-Strahlen erregte), so ergibt sich die Konsequenz: der lufterfüllte Hohlraum eines Gefäßes verliert negative Ladung in Form der ausgesandten Elektronen, welche die Gefäßwand durchsetzen, und nimmt daher eine positive Raumladung an bis zu einem Betrage, bei dem das

1) E. v. Schweidler, Wien. Ber. 127. S. 515. 1918.

erzeugte radiale Feld einen zur Wand gerichteten positiven Ionenstrom erzeugt, der den Korpuskularstrom gerade kompensiert. Ist eine etwa drahtförmige Innenelektrode vorhanden, so wird bei plötzlicher Einschaltung eines starken Feldes zwischen ihr und der geerdeten Hülle eine Entionisierung des Gasinhaltes stattfinden und zwar wird wegen der positiven Raumladung die an der Innenelektrode abgeschiedene Elektrizitätsmenge größer sein, wenn jene Kathode ist, kleiner, wenn sie Anode ist, also $Q_A > Q_K$. Analog wäre der Sättigungsstrom bei dauernd angelegter Spannung verschieden, nämlich $i_K = i + y$, $i_A = -i$, wenn i den der gewöhnlichen Ionisierung entsprechenden Strom, y den Korpuskularstrom nach außen bezeichnet.

In der Tat erwähnt A. Gockel[1]), daß nach seinen Beobachtungen an Wulfschen γ-Strahlelektrometern in der Regel $i_K > i_A$ sei; analog hatte ich[2]) bei Messungen, die zu anderen Zwecken (Untersuchung der Wiedervereinigung von Ionen) erfolgten, ein Überwiegen von Q_K gefunden. Derzeit noch unveröffentlichte Messungen von Dauerströmen unter variierten Versuchsbedingungen gaben öfters $i_K > i_A$, bisweilen aber auch das entgegengesetzte Resultat. Übrigens glaube ich, wie demnächst an anderer Stelle gezeigt werden soll, daß diese Effekte keineswegs im hier besprochenen Sinne zu deuten sind, sondern als Asymmetrie der Ionenleitung; ich wollte aber auf die prinzipielle Möglichkeit aufmerksam machen, das Vorhandensein dieser Korpuskularstrahlung auf anderem Wege als zuerst besprochen festzustellen.

Endlich kämen noch Anordnungen in Betracht, die durch Stoßionisierung verstärkte Wirkung der hypothetischen Strahlen untersuchen, speziell solche, wie sie V. F. Hess und R. W. Lawson[3]) zur Zählung der „natürlichen Stöße" angewandt haben.

Ergänzend zu solchen direkten Versuchen zum Nachweis einer Korpuskularstrahlung wären Messungen der Ionisierungs-

---

1) A. Gockel, Neue Denkschr. d. Schweiz. Naturf. Ges. **54**. Abt. 1. 1917 (speziell S. 57).

2) E. v. Schweidler, Wien. Ber. **127**. S 953. 1818.

3) V. F. Hess u. R. W. Lawson, Wien. Ber. **125**. S. 285. 1916.

stärke anzustellen, insbesondere in *Polargebieten* und in großer Höhe, da die *„Hesssche Strahlung“* voraussichtlich in enger Beziehung zu den gesuchten Strahlen steht, falls diese überhaupt existieren. Die Bedeutung *rein theortischer* Ergebnisse über die Ionisierungsfähigkeit sehr schneller Korpuskularstrahlen für unser Problem wurde bereits im Abschnitt 4 ausführlich erörtert.

Um die Ablehnung der Gerdienschen sowie der Ebertschen Theorie bindend zu machen, bleiben natürlich weitere Feststellungen über die Niederschlagselektrizität sowie über die Raumladung der Atmosphäre und über die Größe des „Austausches“ von Bedeutung.

Ohne Rücksicht auf bestimmte Typen der Theorien wären noch wichtig Untersuchungen über die *Abhängigkeit des vertikalen Leitstroms von der Höhe*, worüber bisher nur verhältnismäßig dürftiges Material vorliegt, sowie über *Erdströme*, die ja den Ausgleich zwischen den vom Gegenstrom getroffenen und nicht getroffenen Gebieten herstellen; dabei wäre auf die Größe und Richtung des *konstanten* Teiles das Hauptgewicht zu legen, während bisher im Zusammenhang mit erdmagnetischen Untersuchungen mehr die Änderungen im Vordergrunde standen.

Das experimentelle Programm ist somit ein recht reichhaltiges und wäre am besten von einer berufenen Organisation (z. B. den kartellierten Akademien) auszugestalten und durchzuführen.

Innsbruck, Physikal. Inst. der Univ., im Mai 1920.

(Eingegangen 5. Juni 1920.)

3. *Über die Temperaturabhängigkeit der elektrischen Doppelbrechung;* *von Nikolaus Lyon und Fritz Wolfram.*

Zur Erklärung der elektrischen Doppelbrechung hat Langevin[1]) die zuerst von Larmor[2]) aufgestellte Hypothese der molekularen Orientierung unter der Annahme durchgerechnet, daß die Moleküle in optischer und elektrischer Beziehung die Symmetrie eines Rotationsellipsoides besitzen. Enderle[3]) hat gezeigt, daß die wesentlichen Folgerungen Langevins auch Gültigkeit behalten in dem allgemeineren Falle der Annahme von dreiachsigen Ellipsoiden. Die von ihm erhaltenen Formeln bieten die Möglichkeit einer experimentellen Prüfung der Hypothese und zwar nach verschiedenen Richtungen.

Aus jenen Formeln ergibt sich für das Verhältnis der absoluten Verzögerung bzw. Beschleunigung des außerordentlichen und ordentlichen Strahles $\frac{n_a - n}{n_0 - n}$ der Wert -2. Aeckerlein[4]) hat nun in der Tat bei Versuchen mit Nitrobenzol, bei denen er das elektrische Feld durch elektrische Schwingungen erregte, diesen Wert gefunden, doch Voigt[5]) hat schon darauf aufmerksam gemacht, daß diese Versuche um des Willen nicht beweisend sind, weil bei ihnen der Einfluß der Elektrostriktion auf die beobachtete elektrische Doppelbrechung nicht berücksichtigt ist. In der Tat fand denn auch Himstedt[6]) bei Schwefelkohlenstoff und anderen gut isolierenden Flüssigkeiten, bei denen er mit konstantem elektrischem Felde arbeiten konnte, den Wert -4 und wies zugleich darauf hin,

1) P. Langevin, Le Radium 7. S. 249. 1910.
2) J. Larmor, Phil. Trans. A S. 190, 236. 1898.
3) Enderle, Zur Theorie der elektrischen und magnetischen Doppelbrechung von Flüssigkeiten. Diss. Freiburg i. B. 1912.
4) G. Aeckerlein, Phys. Zeitschr. 7. S. 811. 1906.
5) E. Voigt, Phys. Zeitschr. 7. S. 811. 1906.
6) F. Himstedt, Ann. d. Phys. 48. S. 1016. 1915.

daß eine Entscheidung auf diesem Wege erst dann möglich sein würde, wenn es gelänge, den Einfluß der Elektrostriktion auf die Doppelbrechung für sich zu bestimmen, da derselbe von derselben Größenordnung wie der Kerreffekt ist.

Eine zweite Möglichkeit, die Hypothese der molekularen Orientierung zu prüfen, geben die Langevinschen Formeln dadurch, daß sie zu den Havelockschen[1]) Formeln führen,

$$C = \frac{B \cdot \lambda \cdot n}{(n^2 - 1)^2},$$

durch welche die Dispersion der elektrischen Doppelbrechung in Beziehung gesetzt wird zu der Dispersion der Brechung.

Lyon[2]) hat es unternommen, hierüber Versuche anzustellen, indem er die Kerrsche Konstante für verschiedene Wellenlängen bestimmte. Er fand hierbei die obige Gleichung recht gut erfüllt bei solchen Substanzen, die starke optische Dispersion und starke Dispersion der elektrischen Doppelbrechung zeigten, dagegen nicht bei Äther, bei dem beide Dispersionen nur klein sind. Aber selbst, wenn man von diesem letzten Punkte absieht, der noch weiterer Untersuchungen bedarf, wird man aus diesen Versuchen nur schließen können, daß die Ergebnisse nicht gegen die Langevinsche Theorie sprechen, denn wie Enderle gezeigt hat, führen auch die Theorien von Havelock und von Voigt auf dieselbe Gleichung.

Die dritte Möglichkeit, die Langevinsche Theorie zu prüfen, bietet der Einfluß der Temperatur auf die Kerrkonstante.

Nach Langevin und Enderle kann man für die Kerrkonstante den Ausdruck ableiten

$$B = \text{const} \frac{(k + 2)^2 (n^2 + 2)^2}{T \cdot n} \cdot d,$$

wo k die Dielektrizitätskonstante, n der Brechungsexponent, d die Dichte, T die absolute Temperatur ist und in der Konstanten alle von T unabhängigen Größen zusammengefaßt sind.

---

1) T. H. Havelock, Proc. of the Roy. Soc. of London A 28. S. 80. 1908.

2) N. Lyon, Über die Dispersion der elektrischen Doppelbrechung. Ann. d. Phys. 46. S. 753. 1915.

Zur Prüfung dieser Gleichung haben wir es unternommen, die Kerrkonstante für eine Reihe von Flüssigkeiten bei verschiedenen Temperaturen zu bestimmen.

Die Versuche wurden im Sommer 1914 angefangen. Durch den Krieg wurde ihr Abschluß bis jetzt verzögert, da wir von August 1914 bis zum Waffenstillstand im Felde waren.

Inzwischen ist eine Untersuchung von Bergholm[1]) über den gleichen Gegenstand erschienen. Wir haben aber trotzdem geglaubt, unsere Versuchsreihe zu Ende führen zu sollen, einmal weil Bergholm nur zwischen 0° C und 40° bzw. 50° C beobachtet hat, unsere Versuche sich aber auf den Bereich von $-78°$ bis $+18°$ C bezogen, der Einfluß der Temperaturen sich also im Verhältnis 1,5 zu 1,15 stärker bemerkbar machen müsste, dann aber auch, weil inzwischen eine sehr beachtenswerte Arbeit von Born[2]) erschienen ist, der den Versuch gemacht hat, die von Reinganum u. Debye[3]) in die Theorie der Dielektrika eingeführte Vorstellung von den Dipolen zur Erklärung der elektrischen Doppelbrechung heranzuziehen. Aus den Bornschen Rechnungen ergibt sich die Kerrkonstante

$$B_1 = \frac{\text{const}\,(k+2)^2(n^2+2)^2}{n} \cdot \left(\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{R} \cdot T} + \frac{M^2}{\mathfrak{R}^2 T^2}\right),$$

wobei wieder alle von T unabhängigen Größen in dem konstanten Faktor zusammengefaßt sind.

$\mathfrak{R}$ ist die Boltzmannsche Konstante $\mathfrak{R} = 1{,}34 \cdot 10^{-16}$, M bedeutet das Moment eines Dipols und für $M = 0$ geht B_1 in den Langevinschen Wert B über.

Schreiben wir B_1 in der Form:

$$B_1 = \text{const}\,\frac{(k+2)^2(n^2+2)^2}{n}\,\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{R} \cdot T} \cdot \left(1 + \frac{M^2}{\mathfrak{R} \cdot T \cdot \mathfrak{B}}\right),$$

so kann man schreiben

$$B_1 = B \cdot \left(1 + \frac{M^2}{\mathfrak{R} \cdot T \cdot \mathfrak{B}}\right),$$

d. h. der aus der Bornschen Theorie folgende Wert der Kerrkonstante B_1 ergibt sich aus dem von Langevin gefundenen B durch Multiplikation mit der obigen Klammergröße. Das Glied

$$\frac{M^2}{\mathfrak{R} \cdot T \cdot \mathfrak{B}}$$

1) C. Bergholm, Ann. d. Phys. **51**. S. 414. 1916.
2) M. Born, Ann. d. Phys. **55**. S. 177. 1918.
3) P. Debye, Phys. Zeitschr. **13**. S. 97. 1912.

stellt also den möglichen Einfluß der Dipole auf die elektrische Doppelbrechung dar. Dieses Glied ist stets positiv, d. h. B_1 stets $> B$. Die Werte müssen um so mehr voneinander abweichen, je kleiner T ist und es erschien deshalb aussichtsreich, durch Versuche bei tieferen Temperaturen eine Entscheidung zwischen der Langevinschen und Bornschen Theorie herbeiführen zu können.

Die Untersuchungen wurden nach der relativen Methode nach Lyon durchgeführt. Die optische Anordnung ergibt sich aus Fig. 1.

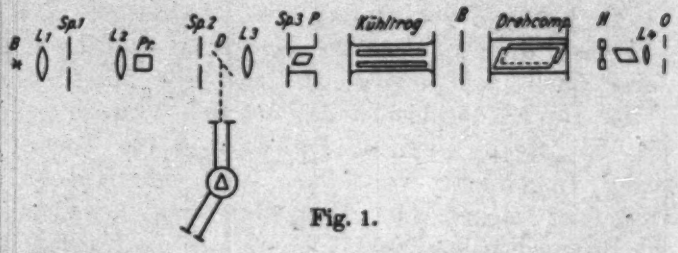


Fig. 1.

Das durch ein System von Linsen, Spalten und ein Prisma parallel und monochromatisch gemachte Licht einer Bogenlampe mit gelben Effektkohlen durchsetzt nacheinander Polarisator, Kühltrog, Drehkompensator und ein Leisersches Halbschattensystem[1]) mit Analysator.

Nach längeren Vorversuchen wurde der folgende Kühltrog gebaut. Ein 12 cm langes Messingrohr von 3 cm Durchmesser wurde in einem Blechkasten, der die Kühlflüssigkeit aufnahm, eingelötet. In die Enden des Rohres paßten Messingverschlüsse (Fig. 2, *IV*), die durch mit Rollermasse aufgekittete Deckgläser verschlossen waren. Zur Abdichtung wurden in Rollermasse getauchte Gummiringe verwendet. Diese in Druckereien erhältliche Masse blieb auch bei tiefen Temperaturen genügend elastisch, um Spannungen der Gläser zu vermeiden. Auf die Messingverschlüsse wurden Vorkammern (Fig. 2, *V*) aufgeschraubt, die zur Wärmeisolation aus Vulkanfiber bestanden und mit Calciumcarbid versehen wurden, um ein Beschlagen der Deckgläser zu vermeiden. Diese trugen je

1) H. Leiser, Elektrische Doppelbrechung der Kohlenstoffverbindungen. Habilitationsschrift. Karlsruhe 1910.

noch eine Vorkammer aus Kork, die ebenfalls etwas Calciumcarbid enthielt. Der obere Teil des Kühltroges enthielt 3 Rohransätze. *I* zur Aufnahme des Thermoelementes, auf *II* paßte ein mit Hahn versehener, eingeschliffener Scheidetrichter durch *III* wurde die Spannung angeschlossen. Unten befand sich ein Ansatz zum Ablassen der Flüssigkeiten. In dem Rohr befanden sich die beiden Elektroden. Die isolierte Platte wurde durch zwei Glasplättchen in der Mitte des Rohres

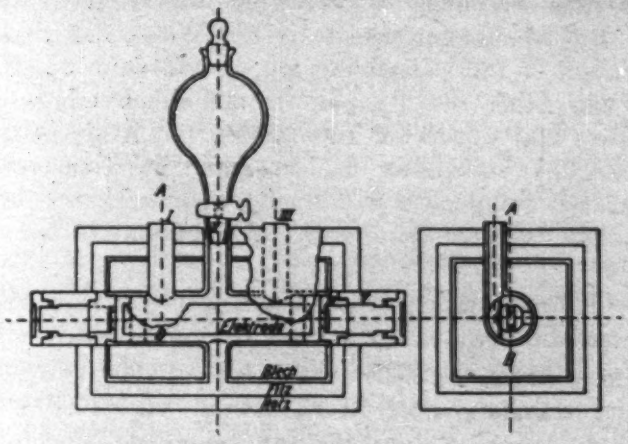


Fig. 2.

fixiert. Die andere wurde durch zwei Messingkeile mit der Rohrwand leitend verbunden und gegen die isolierte gepreßt. Zwischen den Elektroden befanden sich vier gleich dicke Glasplättchen, die den konstanten Abstand bewirkten. Die ganze Vorrichtung befand sich in einem mit Filz ausgeschlagenem Holzkasten.

Bei den Vorversuchen zeigte es sich, daß, wenn die untersuchten Flüssigkeiten auch nur eine Spur Wasser enthielten, bei der Abkühlung auf tiefere Temperaturen eine Trübung eintrat, so daß ein Beobachten erschwert ja unmöglich gemacht wurde. Die sorgfältig nach Gattermann[1]) gereinigten und mehrmals destillierten Flüssigkeiten wurden durch reichlich Chlorcalcium getrocknet. Da schon eine kurze Berührung mit der Laboratoriumsluft genügte, um bei der Abkühlung

1) L. Gattermann, Praxis des organischen Chemikers.

eine Trübung zu erhalten, so wurde die Trocknung in einem Scheidetrichter vorgenommen, der mittels Schliff in den mittleren Ansatz des Zylinders paßte. Über dem Hahn befand sich ein Wattefilter.

Die Füllung des Kühltroges geschah nun in der Weise, daß zunächst durch den Trog getrocknete Luft gesaugt, dann der Hahn geöffnet und die Flüssigkeit eingesaugt wurde, ohne daß sie mit der Laboratoriumsluft in Berührung kam.

Als Kältemischung verwendeten wir Kohlensäure und Äther. Die Abkühlung erfolgte in der Weise, daß einmal der Trog bis auf $-78{,}5^0$ abgekühlt wurde und dann durch Nachgießen von Äther die Temperatur allmählich erhöht wurde. Das andere Mal wurde der Blechkasten mit Äther gefüllt und durch Zugabe von fester Kohlensäure die Temperatur erniedrigt. Die Temperatur wurde mittels eines Thermoelementes festgestellt, das dauernd durch einige Fixpunkte kontrolliert wurde.[1])

Die Wärmeisolation genügte, um während einer Meßreihe die Temperaturen auf einige zehntel Grad konstant zu erhalten.

Zum Aufladen der Zellen wurde ein auf 7000 Volt Effektivspannung transformierter Wechselstrom von 1000 Perioden verwendet, den eine dem Institut gehörende Hochfrequenzmaschine lieferte.

Es wurde gelboranges Licht von $\lambda = 608\ \mu\mu$ verwendet, für das unsere Augen am empfindlichsten waren.

Bei Toluol und Schwefelkohlenstoff trat zwischen -50^0 und -60^0 schwache remanente Doppelbrechung auf, deren Maximum bei etwa -55^0 lag. Bei längerem Anlegen der Spannung und weiterer Abkühlung verschwand diese Erscheinung. Erwärmten wir von -78^0 aus, so trat diese remanente Doppelbrechnung nicht auf. Eine Trübung der Flüssigkeit war nicht zu erkennen. Wir glauben diese remanente Doppelbrechung darauf zurückführen zu sollen, daß bei dieser Temperatur die letzten Spuren von Wasser, welche trotz aller Sorgfalt noch von der Flüssigkeit zurückgehalten wurden, bei -55^0 C sich ausscheiden und dann langsam aus dem Gesichtsfelde durch Aufsteigen oder Niedersinken verschwinden.

---

1) G. Gehlhoff, Bericht der Deutsch. Phys. Gesellschaft S. 201. 1919.

Um eine möglichst große Meßgenauigkeit zu erzielen, andererseits um mit den Dimensionen des Drehkompensators auszukommen, wurden die die Elektroden trennenden Glasplättchen den einzelnen Substanzen angepaßt. Sie betrugen für Äther 3,031 mm, Toluol 2,60 mm, Schwefelkohlenstoff 3,51 mm. Zur Verwendung kam ein Glas von möglichst geringem Ausdehnungskoeffizienten. Der Plattenabstand verringerte sich infolge der Abkühlung auf die tiefere Versuchstemperatur um etwa $^1/_2$ Promille und wurde deshalb vernachlässigt.

Äthyläther.

Als erste Substanz wurde Äthyläther untersucht. Einmal weil wir auf Grund der starken Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante eine starke Temperaturabhängigkeit der elektrischen Doppelbrechung erwarten durften, sodann aber auch, weil diese starke Temperaturabhängigkeit nach der Debyeschen Theorie das Vorhandensein von Dipolen sehr wahrscheinlich macht, wir also hoffen konnten, deren Einfluß hier auffinden und dadurch eine Entscheidung zwischen den Theorien herbeiführen zu können.

Die folgende Tab. I und Fig. 3 zeigt die Ergebnisse der Messungen. Die einzelnen Resultate sind Mittelwerte aus je 30 Messungen, die drei voneinander unabhängigen Meßreihen angehören. Die Werte der einzelnen Meßreihen weichen nur um $2‰$ voneinander ab.

Um $Bt°/B_{18°}$ nach Born berechnen zu können, mußte der für diesen Bruch nach der Langevinschen Formel berechnete Wert mit

$$\frac{1+p_{t°}}{1+p_{18°}}$$

multipliziert werden, wo

$$p = \frac{M^2}{\mathfrak{R} \cdot T \cdot \mathfrak{B}}.$$

Den Wert von M haben wir aus der Arbeit von Debye entnommen. $M = 11{,}8 \cdot 10^{-19}$. Der Wert von $\mathfrak{B}$ läßt sich nach Born nur schätzungsweise berechnen aus

$$\mathfrak{B} = \frac{3}{2} \frac{\mu}{d \cdot N},$$

wo μ = Molekulargewicht, d = Dichte, N = Avogadrosche Zahl $= 6 \cdot 10^{23}$ ist.

Tabelle I.

Äthyläther.

Temp. $t°$	K	n	d	$\frac{B_{t°}}{B_{18°}}$ ber. nach Langevin	$\frac{B_{t°}}{B_{18°}}$ ber. nach Born	$\frac{B_{t°}}{B_{18°}}$ beobachtet
18°	4,37	1,355	0,716	1,000	1,000	1,000
0°	4,68	1,365	0,736	1,213	1,227	1,220
− 21,7°	5,15	1,378	0,765	1,583	1,629	1,547
− 38,9°	5,61	1,387	0,789	1,998	2,087	1,927
− 60,5°	6,31	1,399	0,821	2,755	2,947	2,707
− 78,5°	7,00	1,408	0,848	3,669	4,014	3,880

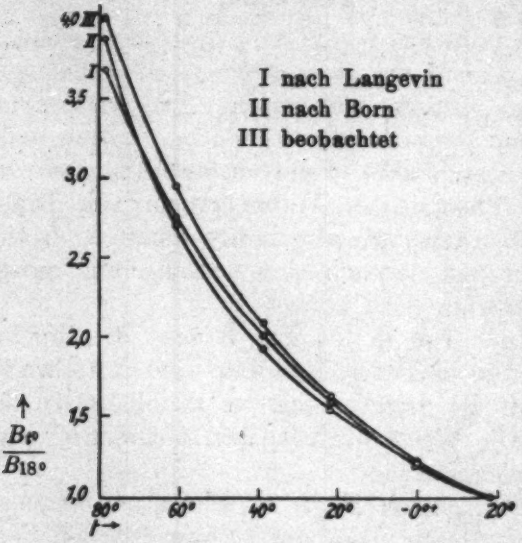


Fig. 3.

Die Werte K der Dielektrizitätskonstante wurden aus den Werten interpoliert, die in den phys.-chem. Tabellen von Landolt und Börnstein angegeben sind. Die Werte n des Brechungskoeffizienten wurden für die bei den Messungen verwendete Wellenlänge $\lambda = 603\ \mu\mu$ aus einer Kurve interpoliert, die nach den bei Landolt und Börnstein angegebenen Werten gezeichnet war. Die so erhaltenen Werte wurden dann für die tiefen Temperaturen nach Kuçera und Forch[1]) interpoliert und teilweise extrapoliert. Die Dichten d wurden nach Landolt und Börnstein inter- bezüglich extrapoliert.

1) B. Kuçera u. C. Forch, Phys. Zeitschr. 8. S. 132. 1902.

Die beobachteten und nach Langevins Formeln berechneten Werte stimmen so gut überein, wie das bei der Unsicherheit der durch Interpolation, zum Teil sogar durch Extrapolation gewonnenen Werte der Dielektrizitätskonstanten und der Brechungsexponenten überhaupt nur erwartet werden kann, besonders wenn man bedenkt, daß n in der dritten Potenz in die Rechnung eingeht. Die nach Born berechneten Werte sind ausnahmslos zu groß. Da nun gerade Äther zu den Substanzen gehört, bei denen nach Debye am ehesten mit dem Vorhandensein von Dipolen gerechnet werden müßte, so sprechen diese Resultate gegen die Bornsche Hypothese.

Zur sicheren Entscheidung wäre es aber sehr erwünscht, wenn demnächst Präzisionsmessungen des Brechungskoeffizienten und der Dichten der in dieser Arbeit verwendeten Substanzen bei tiefen Temperaturen ausgeführt würden.

Schwefelkohlenstoff.

Als zweite Substanz wurde Schwefelkohlenstoff untersucht. CS_2 stellt die Normalsubstanz fast aller bisherigen Untersuchungen der elektrischen Doppelbrechung dar. Keine andere Substanz ist so oft und so genau untersucht worden.

CS_2 weist daneben als Gegenstück zu Äther eine nur schwache Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante auf. Wir hofften daher, durch dessen Untersuchung festzustellen, ob auch für diese sowohl in optischer als elektrischer Beziehung von Äther durchaus verschiedenen Substanz die Langevinsche Beziehung gilt.

Die folgende Tab. II und Fig. 4 zeigt die Ergebnisse der auf etwa 3‰ genauen Messungen.

Tabelle II.

Schwefelkohlenstoff.

Temp. $t°$	K	n	d	$\frac{B_t}{B_{18°}}$ ber. nach Langevin	$\frac{B_t}{B_{18°}}$ beobachtet
18°	2,64	1,627	1,265	1,000	1,000
0°	2,70	1,641	1,291	1,129	1,089
− 18,5°	2,75	1,656	1,323	1,282	1,205
− 37,7°	2,78	1,671	1,355	1,455	1,397
− 47,3°	2,79	1,679	1,369	1,549	1,497
− 68,3°	2,80	1,696	1,412	1,794	1,708
− 78,5°	2,81	1,704	1,431	1,934	1,819

Die Werte n des Brechungskoeffizienten wurden wie bei Äther nach Landolt und Börnstein für die bei den Messungen verwendete Wellenlänge $\lambda = 608\ \mu\mu$ interpoliert und nach Kuçera und Forch für die tiefen Temperaturen extrapoliert. Die Dichten wurden extrapoliert.

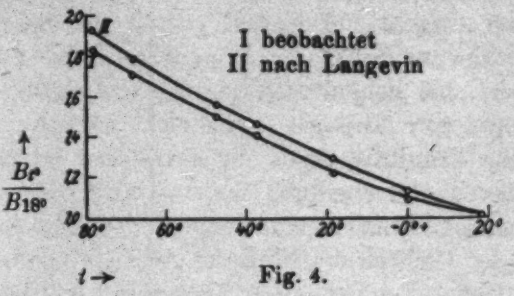


Fig. 4.

Für die Dielektrizitätskonstante k standen die Werte von Dewar und Fleming[1]) zur Verfügung, nach denen k zwischen $-74{,}2°$ und $+20°$ konstant und $= 2{,}64$ sein sollte. Andererseits war dies Resultat nach den Messungen von Tangl[2]) äußerst unwahrscheinlich. Zur Prüfung der Langevinschen Theorie mußte daher die Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante neuerdings gemessen werden.

Der bei den Messungen der elektrischen Doppelbrechung verwendete Trog war für eine Absolutbestimmung der Dielektrizitätskonstante ungeeignet, da die Kapazität viel zu gering war. Nach der folgenden Methode, die für kleine Änderungen der Dielektrizitätskonstante geeignet ist, konnten aber Relativwerte, und nur auf diese kommt es bei der Prüfung der Langevinschen Theorie an, mit hinreichender Genauigkeit bestimmt werden.

Kreis *I*, Fig. 5 bestand aus einem 10 Watt Röhrensender in der üblichen Schaltung mit magnetischer Rückkoppelung. Lose gekoppelt mit *I* war der Meßkreis *II*, der zwei Kapazitäten in Reihe enthielt. *Cm* war der Meßtrog, der abgekühlt wurde, *Cd* war ein Drehkondensator von etwa 2200 cm maximaler Kapazität, der auf etwa 5 Proz. genau geeicht war.

1) J. Dewar u. J. A. Fleming, Proc. Royal Soc. London S. 358. 1897.

2) K. Tangl, Ann. d. Phys. 10. S. 748. 1903.

II wirkte in loser Koppelung auf den Detektorkreis *III* mit kurzschwingendem Galvanometer von 10^{-6} Amp. Empfindlichkeit.

Es wurde in folgender Weise vorgegangen.

II wurde (*Cm* bei Zimmertemperatur) durch Variieren des Drehkondensators *Cd* auf *I* abgestimmt. Während nun die Wellenlänge von *I* konstant blieb, wurde *Cm* abgekühlt. Um *II* wieder auf Resonnanz zu bringen, mußte *Cd* verkleinert werden. Die Gesamtkapazität von *II* blieb dann im Falle der Resonnanz also konstant, d. h.

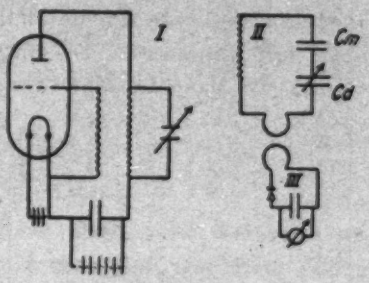


Fig. 5.

$$\frac{1}{Cm_{18°}} + \frac{1}{Cd_{18°}} = \frac{1}{Cm_{t°}} + \frac{1}{Cd_{t°}}$$

oder

$$\frac{1}{Cm_{t°}} = \frac{1}{Cm_{18°}} + \frac{1}{Cd_{18°}} - \frac{1}{Cd_{t°}} .$$

Cd war etwa 10—20 mal größer als *Cm*. Infolgedessen gehen deren fünfprozentige Eichfehler auch nur mit dem zehnten Teil, d. h. mit etwa $5‰$, in die Meßgenauigkeit ein. Wie eingangs erwähnt, war *Cm* für eine Absolutbestimmung zu klein, daher wurde für 18° C nach Landolt und Börnstein der Wert $k = 2{,}64$ angenommen.

Dann ist

$$k_{t°} = 2{,}64 \cdot \frac{Cm_{t°}}{Cm_{18°}} .$$

Die Konstanz der Wellenlänge, die an sich schon gewährleistet war, wurde vor und nach jeder Messung mit einem empfindlichen Wellenmesser kontrolliert. Sie betrug, um bei der kleinen Kapazität von *Cm* eine möglichst hohe Meßgenauigkeit zu erzielen, $\lambda = 160$ m. Es wurden natürlich die beim Messen von kleinen Kapazitäten unbedingt notwendigen Vorsichtsmaßregeln getroffen, so zum Beispiel Fernsteuerung des Drehkondensators usw.

Die zweite Spalte der Tab. II enthält die so gewonnenen Werte *k* der Dielektrizitätskonstante.

Präzisionsmessungen der Dielektrizitätskonstanten der in dieser Arbeit untersuchten Substanzen werden nach einer

neuen sehr empfindlichen Schwebungsmethode ausgeführt, deren Resultate einer späteren Veröffentlichung vorbehalten sind.

Wie Tangl[1]) gezeigt hat und sich aus unseren Werten ergibt, nimmt die Dielektrizitätskonstante von Schwefelkohlenstoff mit abnehmender Temperatur schwächer zu als nach der Clausius-Mosottischen Beziehung

$$\frac{k-1}{k+2} \cdot \frac{1}{a} = \text{const}$$

zu erwarten ist. Nach Debye dürfen wir daher dieser Substanz keine permanenten Dipole zusprechen und infolgedessen auch den Bornschen Ansatz nicht zur Anwendung bringen. Würde man aber eine solche Korrektur anbringen wollen, so würde die Übereinstimmung zwischen der Beobachtung und Berechnung weniger gut werden.

Die Werte n des Brechungskoeffizienten sind von -60^0 an extrapoliert. Die Dichten sind, da in Landolt und Börnstein nur für 18^0 angegeben, ganz extrapoliert.

Die größten Abweichungen zwischen den beobachteten und den nach Langevin berechneten Werten betragen nur etwa 5 Proz., so daß die Übereinstimmung bei der Unsicherheit der in Langevins Formel eingehenden Faktoren eine gute genannt werden muß.

Ein Vergleich mit Bergholm und Leiser ist nicht möglich, einmal weil sie bei anderen Temperaturen, dann aber auch mit Licht von anderer Wellenlänge gearbeitet haben.

Toluol.

Als letzte Substanz wurde Toluol untersucht, das zur Kategorie von Flüssigkeiten vom Typus des Schwefelkohlenstoffs mit nur schwach ausgeprägter Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante gehört. Die folgende Tab. III und Fig. 6 zeigt die Ergebnisse der auf 3‰ genauen Messungen.

---

1) K. Tangl, Ann. d. Phys. 10. S. 748. 1903.

Tabelle III.

Toluol.

Temp. t^0	k	n	d	$\frac{B_t}{B_{18}}$ ber. nach Langevin	$\frac{B_t}{B_{18}}$ ber. nach Born	$\frac{B_t}{B_{18}}$ beobachtet
18°	2,33	1,497	0,890	1,000	1,000	1,000
– 0,4°	2,37	1,506	0,908	1,113	1,116	1,086
– 18,9°	2,39	1,516	0,927	1,243	1,251	1,213
– 40,4°	2,43	1,528	0,950	1,431	1,443	1,353
– 60,5°	2,47	1,542	0,973	1,651	1,673	1,518
– 78,5°	2,50	1,555	0,995	1,888	1,921	1,719

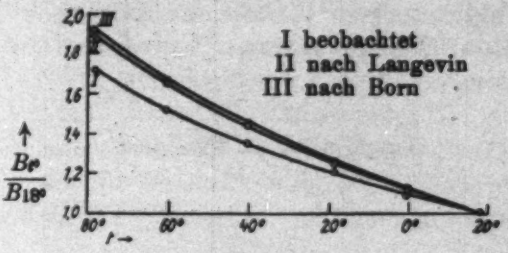


Fig. 6.

Die Werte für n und d der Tab. III wurden wie bei Äther und Schwefelkohlenstoff gewonnen. Es gelten für die berechneten Werte infolgedessen auch dieselben Vorbehalte bezüglich ihrer Genauigkeit. Die Dielektrizitätskonstanten wurden nach derselben Methode wie bei Schwefelkohlenstoff gemessen, sie erwiesen sich als identisch mit den Werten von Tangl, die in der zweiten Spalte niedergelegt sind. Die größte Abweichung zwischen den gemessenen und nach Langevin berechneten Werten beträgt 10 Proz. Die Beobachtungen ergeben, daß die Kerrkonstante schwächer zunimmt, als wir nach Langevin erwarten durften. Bringen wir den Bornschen Ansatz zur Anwendung, so wird die Übereinstimmung schlechter. Groß ist allerdings der Unterschied nicht, denn die maximale Korrektur nach Born beträgt etwa 1,8 Proz.

Zusammenfassung der Resultate.

Es wurde die Temperaturabhängigkeit der elektrischen Doppelbrechung an Äther, Schwefelkohlenstoff und Toluol für mehrere Temperaturen zwischen + 18° und — 78,5° C untersucht. Die beobachteten Werte wurden verglichen mit den-

jenigen, die sich aus der Langevinschen und Bornschen Theorie ergeben.

Die Übereinstimmung zwischen dem beobachteten und nach Langevin berechneten Werten ist eine gute. Die Unterschiede halten sich innerhalb der Grenzen, die durch die Unsicherheit der in die Langevinsche Formel eingehenden Konstanten bedingt ist.

Die nach den Bornschen Formeln berechneten Werte sind ausnahmslos größer als die beobachteten. Da schon die nach Langevin berechneten Werte mit einer einzigen Ausnahme etwas größer sind als die beobachteten Werte, die nach Born an den Langevinschen Werten anzubringende Korrektion aber eine Vergrößerung verlangt, so scheint die nicht berechtigt zu sein.

(Eingegangen 26. März 1920.)

4. *Die Rolle des Kristallwassers und die Struktur der Alaune. (Antwort an Hrn. Cl. Schaefer und Frl. M. Schubert);* *von L. Vegard.*

Erst vor kurzem bin ich auf die Antwort, welche Hr. Schaefer und Frl. Schubert[1]) auf meine früheren Erwiderungen[2]) gegen ihren Prioritätsanspruch, betreffs die Rolle der Kristallwassers, gegeben haben, aufmerksam geworden.

Sie suchen noch ihren Prioritätsanspruch aufrecht zu halten und außerdem haben sie einige Untersuchungen des Hrn. Niggli[3]) herangezogen, um für die Auffassung, daß das von Schelderup und mir[4]) gefundene Alaungitter „falsch" ist, eine Stütze zu finden.

Da ich mich ihrer Auffassung und Folgerung nicht anschließen kann, finde ich mich leider dazu genötigt, nochmals auf die Frage zurückzukommen.

Die Ergebnisse der Nigglischen Untersuchungen.

Niggli hat von dem allgemeinen Gesichtspunkte der Symmetrieeigenschaften vom Punktsysteme aus das gefundene Alaungitter einer eingehenden und interessanten Diskussion unterworfen.

Er findet, daß das gefundene Gitter alle Folgerungen aus der Symmetriegruppe richtig erfüllt; er macht aber darauf aufmerksam, daß die zugehörige Symmetriegruppe eine größere Zahl von Parametern, als in unserem Alaungitter vorhanden ist, zuläßt.

Er stellt die allgemeinen Gleichungen auf und macht darauf aufmerksam, daß unser Gleichungssystem als ein Spezialfall der allgemeinen Gleichungen zu betrachten ist. Da wir

1) Cl. Schaefer u. M. Schubert, Ann. d. Phys. 59. S. 583. 1919.
2) L. Vegard, Ann. d. Phys. 58. S. 291. 1919.
3) P. Niggli, Phys. Zeitschr. 19. S. 225. 1918.
4) L. Vegard u. H. Schelderup, Ann. d. Phys. 54. S. 146. (Eingegangen 11. Sept. 1917.)

in der Tat durch unsere Gleichungen und die benutzten Parameterwerte die beobachteten Intensitätsverteilungen der Beugungsmaxima in befriedigender Weise herleiten können, *ist unsere Lösung gleichzeitig als Lösung des allgemeinen Gleichungssystems zu betrachten.*

Wenn Hr. Niggli unsere Lösung als eine solche erster Annäherung bezeichnet, so hat er natürlich gewissermaßen darin recht. Denn erstens sind die Intensitätsmessungen mit Fehlern behaftet, zweitens kennt man nicht genau den theoretischen Ausdruck für die Intensitäten der verschiedenen Ordnungen unter die Versuchsbedingungen, welche dem Braggschen Verfahren entsprechen.

Glücklicherweise ist es so, daß verhältnismäßig geringe Änderungen der Parameterwerte ganz große Änderungen der berechneten Intensitätsverteilung verursachen, so daß sehr bedeutende Änderungen der gefundenen Parameterwerte nicht möglich sind.

Ein gutes Kriterium für die Richtigkeit unseres Gitters hat man auch darin, daß man nur mit geringen Änderungen der Parameterwerte für die *verschiedenen Alaune* die richtige Intensitätsverteilung ableitet.

Die Tatsache, daß unser Gitter nur vier Parameter enthält, während elf möglich sind, spricht an sich auch für die Richtigkeit unseres Gitters. Denn mit nur vier Parametern wird unser Gleichungssystem für die Parameterbestimmung in hohem Grade überbestimmt und eine bedeutende Zahl von Kontrollgleichungen sind also gleichzeitig erfüllt.

Die Natur hat ja eine Neigung nach Einfachheit und die Atome suchen ausgezeichnete Lagen, wodurch die Parameterzahl erniedrigt wird.

Es zeigt sich demnach — daß, soweit Hr. Niggli die Rechnungen geführt hat — er nur die Richtigkeit unseres Alaungitters bestätigen konnte, und *er hat also nicht, wie Hr. Schaefer und Frl. Schubert behaupten, die Unrichtigkeit des Gitters nachgewiesen.* Wie die beiden Forscher aus der Nigglischen Arbeit diesen Schluß haben ziehen können, ist mir unverständlich.

Übrigens hat diese von Niggli aufgeworfene Frage betreffs den Genauigkeitsgrad der Parameterbestimmung mit der Prioritätsfrage über die Rolle des Kristallwassers nichts zu tun.

Chemische Konstitution und Kristallstruktur.

Es ist natürlich, daß man in der Kristallstruktur nach ausgezeichneten, den chemischen Konstitutionsformeln entsprechenden Atomgruppierungen sucht. Es ist aber nicht richtig daß eine solche Koordination überall durchführbar ist, und die Forderung aufzustellen, daß die Geometrie der Kristallgitter einen Ausdruck für die chemische Konstitution geben sollte, hieße die Sache auf den Kopf stellen. Denn die Verbindung zwischen chemischer Konstitution und Atomlagerung in Kristallen kennt man eben nicht, sondern dies wichtiges Problem soll gerade durch die röntgenometrische Bestimmung der Raumgitter gelöst werden.

In einer früheren Abhandlung[1]) habe ich in Verbindung mit der Bestimmung des Xenotim- und Zirkongitters diese Frage ausführlicher behandelt und ich muß auf diese Arbeit hinweisen.

Es zeigt sich hier, *daß chemisch verschiedene Substanzen genau dieselbe Raumgitteranordnung besitzen können. Hieraus folgt, daß in gewissen Fällen die chemische Konstitutionsformel in der geometrischen Atomanordnung nicht zum Ausdruck kommt.*

Sowohl Hr. Niggli als Hr. Schaefer und Frl. Schubert wollen aus der chemischen Konstitution auf die Existenz einer ausgeprägten SO_4-Gruppe im Alaungitter schließen. Aus dem, was wir gesagt haben, erkennt man, daß ein solcher Schluß nicht erlaubt ist.

Der Einwand gegen die Richtigkeit des gefundenen Alaungitters, welcher sich auf die chemische Konstitution stützt, fällt damit fort.

Die Deutung der Reststrahlenversuche.

Auch nicht die Ergebnisse der Reststrahlenversuche zwingt uns zu der Annahme einer ausgesprochenen SO_4-Gruppe, denn dazu ist die Deutung dieser Versuche bis jetzt zu unsicher und kompliziert. Es ist in dieser Verbindung von besonderem Interesse, daß Hr. Schaefer und Frl. Schubert ihre Deutung der Reststrahlenversuche auch nicht mit den Braggschen Angaben über das Salpetergitter in Einklang bringen können.[2])

1) L. Vegard, Results of Crystal Analysis IV. Phil. Mag. 33. S. 395. 1917.

2) C. Schaefer u. Frl. Schubert, Ann. d. Phys. 55. S. 588. 1918.

Es wäre natürlich verfrüht, auf Grund der jetzt vorliegenden Gitterbestimmungen die ganze Frage erledigen zu wollen, aber für die weitere Beurteilung muß man nicht von der Deutung des Hrn. Schaefer und Frl. Schubert als etwas Gegebenes ausgehen.

Vielmehr muß sich die Fragestellung folgendermaßen gestalten:

Durch die Röntgenanalyse bestimmt man die Raumgitter möglichst vieler Substanzen, und mit Hilfe der so bestimmten Gitter hat man die Grundlage für eine sichere Deutung der Reststrahlenversuche gewonnen.

In ihrer Antwort haben Hr. Schaefer und Frl. Schubert darauf aufmerksam gemacht, daß sie die Schwingungen der verschiedenen Radikale (SO_4, CO_3 usw.) als „innere" Schwingungen betrachten. Sie haben jedoch diese „inneren" Schwingungen nicht näher präzisiert. Wenn sie sich aber innere Schwingungen denken, verschwindet gewissermaßen der Unterschied zwischen ihrer Annahme und derjenigen von Aschkinass, denn Sauerstoffschwingungen sind ja als „innere" Schwingungen der Atomgruppe zu betrachten.

Ich verstehe deshalb nicht, warum die beiden Forscher so ernsthaft die Annahme von Sauerstoffschwingungen bekämpfen, denn dann bekämpfen sie ja gleichzeitig ihre eigene Annahme. Wie ich schon in meiner ersten Antwort erwähnt habe, sprechen viele Tatsachen zugunsten der Auffassung, daß das Sauerstoff für die Schwingungen eine wesentliche Rolle spielt, und daß sie sich vielleicht am besten als Sauerstoffschwingungen deuten lassen.

In dieser Verbindung möchte ich erwähnen, daß meine Anführungen über die mittleren Frequenzen der polarisierten Komponenten nicht von mir als ein „Beweis" für die Richtigkeit der Auffassung von Aschkinass angesehen sind, ich habe nur auf eine interessante, *tatsächlich vorhandene Beziehung* aufmerksam gemacht, welche vielleicht für die Deutung der Reststrahlenversuche von Interesse sein kann und welche für die Annahme von Sauerstoffschwingungen spricht. Das abweichende Verhalten der Nitrate den Carbonaten gegenüber ist eine andere interessante Tatsache, welche mir damals nicht bekannt war. Das verschiedene Verhalten der Nitrate darf

aber nicht gegen die Auffassung sprechen, daß die Schwingungen von den Sauerstoffatomen stammen, denn es ist ja an sich zu erwarten, daß die Schwingungen des Sauerstoffs sich mit der Bindungsart ändern.

Übrigens wird wohl erst die Gitterbestimmung die Schwingungsart klarlegen können.

Die Rolle des Kristallwassers.

Mit Rücksicht auf die Rolle des Kristallwassers und den Prioritätsanspruch haben Hr. Schaefer und Frl. Schubert nichts angeführt, was die Auffassung, welche ich in meiner ersten Antwort geltend gemacht habe, ändert oder widerlegt. Sie haben nur auf Grund der Messungen von Brieger[1]) — die übrigens ein Jahr später als die Veröffentlichung von Schelderup und mir eingegangen sind — angeführt, daß sie den anisotropen Charakter des Kristallwassers in nicht regulären Kristallen als bewiesen ansehen dürfen.

Die Verschiebung der Lage der Intensitätsmaxima beim Übergang von dem parallel- zu dem senkrecht polarisierten Licht ist auch bei den Messungen von Brieger sehr gering, und die Lage eines Maximumpunktes läßt sich gewöhnlich nicht mit großer Genauigkeit bestimmen. Da ich mich aber mit derartigen Versuchen nicht beschäftigt habe, kann ich über die erreichbare Genauigkeit kein sicheres Urteil bilden.

Wie ich aber auch in meiner ersten Antwort ausdrücklich betont habe, ist die Prioritätsfrage von der Frage über die Realität dieses Effekts ganz unabhängig. Die Sachlage ist nämlich unter dieser Voraussetzung die folgende:

Es hat sich gezeigt, daß das Kristallwasser dem reinen Wasser gegenüber gewisse geringe Änderungen der Reflexionsmaxima aufweist. Dies aber beweist nicht, daß das Wasser in derselben Weise wie die übrigen Bestandteile des Salzes in Gittergerüste hineingeht. Wegen der Kleinheit der Änderungen wäre die entgegengesetzte Deutung ebenso naheliegend, denn — wie ich schon in meiner ersten Antwort betont habe — ist es ja klar, „daß, in welcher Weise das Wasser auch eintritt, es im Kristalle nicht mit den mechanischen und physi-

1) Käthe Brieger, Ann. d. Phys. 57. S. 287. 1918. (Eingegangen 17. Aug. 1918.)

kalischen Eigenschaften des gewöhnlichen Wassers auftritt, sondern die Wassermoleküle müssen mehr oder weniger vereinzelt in das Salz eingelagert sein, und es ist wohl zu erwarten, daß das Wasser, in einer anisotropen Substanz eingebettet, auch selbst in gewissem Grade anisotrope Eigenschaften zeigen kann, ohne daß die Wasseratome in der üblichen Weise in das Salzgitter eintreten".

Wenn überhaupt in regulären Kristallen ein Einfluß da ist, muß man an und für sich in nicht regulären Kristallen eine anisotrope Beeinflussung erwarten. Die Existenz einer Abänderung der Reflexionsverhältnisse gestattet nicht den von Hrn. Schaefer und Frl. Schubert gezogenen Schluß, denn wie ich schon in meiner ersten Antwort erwähnt habe, kann man Einflüsse auch in Flüssigkeiten beobachten, wo also ein Raumgitter nicht vorhanden ist.

Zusammenfassung.

1. Die Untersuchungen Nigglis, soweit sie geführt sind, haben die Richtigkeit des von Schelderup und mir gefundenen Alaungitters vollkommen bestätigt.

2. Man darf nicht ohne weiteres aus den chemischen Konstitutionsformeln oder aus den Ergebnissen der Reststrahlenversuche auf die Geometrie der Atomlagerung im Raumgitter schließen. Man muß vielmehr die Verbindung zwischen chemischer Konstitution und Kristallstruktur sowohl als die Mechanismus der Reststrahlenschwingungen durch Bestimmungen der Raumgitter festlegen.

3. Es ist nicht erlaubt, aus den Versuchen des Hrn. Schaefer und Frl. Schubert den Schluß zu ziehen, daß das Kristallwasser in derselben Weise wie die übrigen Bestandteile des Salzes in das Gittergerüst eintritt. Man könnte ebensogut den entgegengesetzten Schluß ziehen.

Der Prioritätsanspruch des Hrn. Schaefer und Frl. Schubert muß deshalb als unberechtigt zurückgewiesen werden. Durch die Bestimmung der Alaungitter ist zum erstenmal die Rolle des Kristallwassers im Kristallgebäude klargelegt.

Christiania, Physikalisches Institut.

(Eingegangen 26. Juli 1920.)

5. *Verdampfung und Stabilisierung kleiner Quecksilberkugeln;* *von Ernst Ric.*

Bei den Versuchen zur experimentellen Bestimmung des Elektrons wurden öfters Quecksilberkugeln von der Größenordnung 10^{-5} cm benützt.[1]) Dabei haben Ehrenhaft, Konstantinowsky und Parankiewicz kein nennenswertes Verdampfen der Quecksilberkugeln festgestellt, während andere Beobachter, wie Schidlof und Targonski, verhältnismäßig rasche Verdampfung beobachteten. Hier soll untersucht werden, ob und wie weit die klassische Thermodynamik und Oberflächenspannungstheorie die Verdampfungserscheinungen an Quecksilber beschreibt ohne Hinzuziehung anderer Annahmen, wie sie z. B. Targonski benützt.[2]) Die Quecksilberkugeln können entweder durch Verdampfung im Lichtbogen nach der Methode F. Ehrenhafts oder durch mechanische Zerstäubung (vgl. z. B. Targonski a. a. O.) oder durch Verdampfen in einer Quarzröhre mit Hilfe des Bunsenbrenners (nach Ehrenhaft) erzeugt werden. Bei allen diesen Methoden entstehen gleichzeitig Quecksilberkugeln verschiedener Größe. Infolge der Oberflächenspannung ist der Dampfdruck an der Oberfläche einer kleinen Flüssigkeitskugel größer als an einer

1) Ehrenhaft, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. **15.** Nr. 22. 1913; Sitzungsber. d. Wiener Akad. **123.** (IIa) S. 55. 1914; Ann. d. Phys. **44.** S. 657. 1914; Physik. Zeitschr. S. 955. 1914; Physik. Zeitschr. S. 227. 1915; Konstantinowsky, Sitzungsber. d. Wiener Akad. **123.** (IIa) S. 1697. 1914; Ann. d. Phys. **46.** S. 261. 1915; J. Parankiewicz, Physik. Zeitschr. S. 567. 1917; Millikan, Phys. Rev. **32.** (4) S. 389. 1911; Ann. d. Phys. **50.** S. 729. 1916; Phys. Rev. **8.** S. 595. 1916; Schidlof u. Karpovicz, Compt. rend. **158.** S. 199. 1914; Arch. sc. phys. nat. Geneve. **41.** Februar 1916; Schidlof u. Targonski, Physik. Zeitschr. S. 376. 1916; Targonski, Arch. sc. phys. nat. Geneve. **41.** März 1916.

2) Targonski erklärt die Verdampfung durch die zerstörende Wirkung des Anpralls der Gasmoleküle gegen die Quecksilberoberfläche.

ebenen Oberfläche.[1]) Der Überdruck, der an einer Quecksilberkugel vom Radius r herrscht, ist nach W. Thomson:

$$dp_0 = \frac{2S\varrho}{(d-\varrho)r} = 4{,}9 \times 10^{-7}\frac{1}{r}.$$

S = Oberflächenspannung, 400 absolute Einheiten[2]) (sämtliche Größen sind im cgs-System gemessen);

ϱ = Dichte des Quecksilberdampfes

$$= \frac{p_0 M}{RT} = 8{,}3 \times 10^{-9}\,\frac{g}{cm^3};$$

d = Dichte der Flüssigkeit 13,5 g;

p_0 = Dampfdruck des Quecksilbers bei 15,8°

$$= 1{,}086\ \mathrm{dyn/cm^2};^3)$$

M = Molekulargewicht des Quecksilbers = 200;

R = universelle Gaskonstante = $8{,}315 \cdot 10^7$;[4])

T = absolute Temperatur = 273 + 15,8.

An Kugeln vom Radius 10^{-5} cm herrscht also ein um 5 Proz. größerer Dampfdruck als an einer ebenen Quecksilberoberfläche. Infolge dieses Dampfdruckunterschiedes müssen die kleineren Quecksilberkugeln so lange gegen die größeren verdampfen, bis entweder eine große Kugel alle kleineren aufgesaugt hat oder nur mehr gleich große Kugeln übrig geblieben sind, die alle den gleichen Dampfdruck haben; letzteres ist unwahrscheinlich.

Ehrenhaft[5]) verwendet neuerdings Quecksilber, in dem etwas Blei gelöst ist. Diese stabilisierten Quecksilberkugeln können überhaupt nicht verdampfen, wie auch aus der Thermodynamik zwanglos folgt. Das gelöste Blei bewirkt nach van t'Hoff[6]) eine Dampfdruckerniedrigung, die der durch die Oberflächenspannung bewirkten Dampfdruckerhöhung entgegenwirkt. Im Kondensator, in dem die Beobachtung erfolgt, sind jetzt verschieden große Quecksilberkugeln stabil, die

1) W. Thomson, Edinburgh, Proc. Roy. Soc. 7. (1870).

2) Da der Kugelradius groß gegen die Kapillarschichtdicke ist, ist die Oberflächenspannung von derselben Größe, wie an einer annähernd ebenen Oberfläche; vgl. Jäger, Ber. d. Wiener Akad. 122. (IIa) S. 969. 1913.

3) Knudsen, Ann. d. Phys. 47. S. 699. 1915.

4) Planck, Vorlesung über Thermodynamik. Gl. 13a. 1917.

5) F. Ehrenhaft u. D. Konstantinowsky, Ann. d. Phys. 63. S. 773. 1920.

6) Vgl. z. B. Planck, a. a. O. Formel 234.

kleineren enthalten prozentuell mehr Blei als die größeren. Die dritte Kolonne folgender Tabelle gibt die nach der van t'Hoffschen Formel

$$\frac{dp}{p} = \frac{n_1}{n_0} = \frac{\text{Zahl der gelösten Moleküle}}{\text{Zahl der Molekülen Lösungsmittel}}$$

berechneten Gewichtsprozente Blei an, die dieselbe Dampfdruckänderung (vgl. Kolonne II) bewirken wie die Oberflächenspannung bei Kugeln mit dem in Kolonne I angegebenen Radius. Dabei wurde angenommen, daß sich das Blei in Molekülen, die je ein Atom Blei enthalten, in Lösung befindet.[1])

Tabelle I.

r = Radius	$dp_0 = {}^0/_0 p$ = Dampfdruckerhöhung	Gewichtsproz. Blei
10^{-3} cm	0,049 %	0,052 %
10^{-4}	0,49	0,52
10^{-5}	4,9	5,2

Soll die Amalgamkugel denselben Dampfdruck haben wie das am Gefäßboden liegende annähernd ebene Amalgam, so muß sie so viele Prozente Blei mehr enthalten als dieses, wie Kolonne III es angibt. Enthält die Kugel mehr Blei als zur Stabilität erforderlich ist, so muß sich Quecksilber auf ihr niederschlagen. Enthält sie weniger Blei, so muß etwas Quecksilber von ihrer Oberfläche verdampfen. Folgende Rechnung zeigt, daß das Gleichgewicht stabil ist: Da im Ehrenhaftschen Kondensator auch einige größere Kugeln vorhanden sind, bei denen die Oberflächenspannung keinen nennenswerten Einfluß auf den Dampfdruck hat, herrscht in ihm ein Gleichgewichtsdampfdruck P, der kleiner ist als der Dampfdruck über einer reinen ebenen Quecksilberoberfläche p_0. Betrachten wir einen Tropfen, an dessen Oberfläche der Druck P herrscht.

$$P = p_0 - \frac{n_1}{n_0} p_0 + \frac{2 S \varrho}{(d-\varrho) r} .$$

Wenn die äußerste Kugelschale des Tropfens verdampft, ändert sich in dieser Formel n_0, r, P, da vom gelösten Blei nichts verdampft und die Änderung des spez. Gewichtes

1) Gmelin-Kraut, Handb. d. anorg. Chem. 5. (2) S. 408. 1914.

minimal ist. n_0 wird zu

$$n_0' = n_0 \frac{\frac{4\pi}{3} r^3 - 4\pi r^2 dr}{\frac{4\pi}{3} \cdot r^3},$$

r wird zu $r' = r - dr$, P zu P',

$$P' = p_0 - \frac{n_1}{n_0} \cdot \frac{r}{r - 3dr} \cdot p_0 + \frac{2S}{r - dr} \cdot \frac{\varrho}{d - \varrho},$$

$$P' = P - \frac{dr}{r} 3p_0 \cdot \frac{n_1}{n_0} + \frac{dr}{r^3} \cdot \frac{2S\varrho}{d - \varrho}.$$

Da $P < p_0$, ist $p_0 \frac{n_1}{n_0} > \frac{2S\varrho}{(d - \varrho)r}$

und $\frac{dr}{r} 3p_0 \frac{n_1}{n_0} > \frac{dr}{r} \cdot \frac{2S\varrho}{(d - \varrho)r}$.

Folglich ist P', der Druck an der Kugeloberfläche kleiner als P, der Gleichgewichtsdruck des Kondensators. Es muß sich daher auf den Tropfen so lange Quecksilber niederschlagen, bis der Druck P und somit der ursprüngliche Tropfenradius erreicht ist. Da sich nach einer virtuellen Verschiebung der ursprüngliche Zustand automatisch wieder herstellt, ist nachgewiesen, daß das Gleichgewicht stabil ist.[1])

Die Verdampfungsgeschwindigkeit kann nach Stefans Diffusionstheorie[2]) berechnet werden. Da der Luftdruck etwa 1000000mal größer ist als der Dampfdruck des Quecksilbers, darf man die gewöhnliche Diffusionsgleichung

$$k\left[\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial z^2}\right] = \frac{\partial \varrho}{\partial t};$$

(k = Diffusionskoeffizient, ϱ = Dichte des Dampfes; x, y, z = Koordinaten; t = Zeit) verwenden. Wäre der Dampfdruck nicht viel kleiner als der äußere Luftdruck, so müßte man, wie Stefan a. a. O. gezeigt hat, die Gegendiffusion der Luft berücksichtigen.

---

1) Bisher wurde vorausgesetzt, daß das Quecksilber in sauerstofffreiem inertem Gas verdampft wird. Kommt es nämlich mit Sauerstoff in Berührung, so oxydiert sich das in ihm enthaltene Blei und bildet an der Oberfläche eine Schichte, die schon bei geringer Dichte für Quecksilberdämpfe undurchdringlich ist. (Moissan, Traite de chimie. 5. S. 200.)

2) Wiener Akad. Ber. 98. (II) S. 1418. 1889.

Um die Lösung der Diffusionsgleichung zu erleichtern, wurden folgende Annahmen gemacht. In der Mitte des parallelepipedischen Kondensators (Kantenlänge $2a = 2b = 1$ cm), schwebt eine kleine Kugel A ($r = 10^{-5}$ cm), in der Mitte des Bodens liegt ein größerer Tropfen B ($r = 10^{-2}$ cm). An der Kugel B herrscht praktisch normaler Dampfdruck der betreffenden Temperatur ($p_0 = 1{,}086$ dyn/cm^2), an der Kugel A herrscht ein um 5 Proz. höherer Druck (vgl. Tab. I) $p_0 + dp_0$. Zum Drucke p_0 gehört eine Dichte des Quecksilberdampfes $\varrho_0 = 8{,}3 \cdot 10^{-9}$ g/cm, zu $p_0 + dp_0$ gehört eine Dichte $1{,}05\,\varrho_0$. Die Grenzbedingung an den Kondensatorwänden ist $\partial\varrho/\partial n = 0$ (n ist die Richtung normal auf die Kondensatorwand). Da die Grenzbedingungen von der Zeit unabhängig sind, wird die Diffusionsgleichung zur Laplacegleichung

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial z^2} = 0 .$$

Das Diffusionsproblem kann auf folgende Art nach elektrostatischer Analogie[1]) gelöst werden: An der Stelle der Kugeloberfläche bei A befindet sich eine elektrostatische Niveaufläche vom Potential $\varrho_0 + d\varrho_0$, bei B eine solche vom Potential ϱ_0. Sämtliche Kraftlinien, die von der Kugel A ausgehen, münden in die Kugel B. Keine einzige darf die Kondensatorwände schneiden ($\partial\varrho/\partial n = 0$). Man kann das Problem mit Hilfe von unendlich vielen Spiegelungen lösen. Das Potential des so definierten Feldes erfüllt die Randbedingungen. Die Äquipotentialflächen bei A und B haben allerdings nicht genau Kugelgestalt. Die Annäherung an diese ist sehr groß, da der Kugelradius (10^{-5} cm) klein gegen die Kondensatordimensionen ist. Die allgemeinen Koordinaten eines Bildpunktes sind:

x	y	z	Ladung
$[2m+1]a$	$[2n+1]b$	$2pa$	$-e$
$[2m+1]a$	$4nb$	$2pa$	$+2e$

m, n, p durchlaufen die ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$.

1) Ein ähnliches Problem ist bei H. Mache, Physik. Zeitschr. 7. S. 316. 1906 behandelt.

Das Potential des elektrischen Bildes im Punkte x, y, z, ist:

$$\varrho(x, y, z) - C = e\left[\sum_{-\infty}^{+\infty} m, n, p \cdot \frac{+2}{\sqrt{[x-(2m+1)a]^2+[y-4nb]^2+[z-2pa]^2}} - \sum_{-\infty}^{+\infty} m, n, p \cdot \frac{1}{\sqrt{[x-(2m+1)a]^2+[y-(2n+1)b]^2+(z-2pa)^2}}\right].$$

Dieser Ausdruck enthält zwei willkürliche Konstanten e und C. An zwei Punkten kann daher das Potential beliebig angenommen werden. Als solche Punkte wählen wir je einen Punkt auf der Kugel A (Potential $\varrho_0 + d\varrho_0$) und einen auf der Kugel B, (Potential ϱ_0). Die von der Kugel A verdampfende Quecksilbermenge ist

$$\frac{dm}{dt} = \int_0 k \frac{\partial \varrho}{\partial r} do,$$

integriert über die Kugeloberfläche bei A, $= -4\pi ke$, Diffusionskoeffizient mal Kraftlinienzahl. Zur Bestimmung von e muß obiger Ausdruck für das Potential zahlenmäßig ausgewertet werden. Dies läßt sich nach einem von Madelung[1]) angegebenen Verfahren bewerkstelligen. Die Rechnung zeigt daß die Bildpunkte und somit die Randbedingungen die Ladung e von A nicht nennenswert beeinflussen, da sie abwechselnd positiv und negativ geladen sind und ihre Entfernung groß gegen die des Kugelmittelpunktes von der betrachteten Kugelfläche ist. e ergibt sich zu ungefähr $4 \cdot 10^{-15}$, die Verdampfungsgeschwindigkeit dm/dt zu $4\pi ke = 5{,}10^{-14}k$. Die Masse der Quecksilberkugel A ist $5{,}6 \cdot 10^{-14}$ g. Würde die Diffusionsgleichung die Verdampfungsgeschwindigkeit regeln, so wären die kleinen Quecksilberkugeln in wenigen Sekunden verschwunden, falls man annimmt, daß der Diffusionskoeffizient von Quecksilberdampf in Luft in dieselbe Größenordnung fällt wie die bis jetzt gemessenen Diffusionskoeffizienten. Diese fallen alle in die Größenordnung 10^{-1} absolute Einheiten.

Ehrenhaft, Konstantinowsky, Parankiewiz, Targonski und andere haben experimentell nachgewiesen, daß

1) Physik. Zeitschr. 19, S. 524, 1918.

sich reine Quecksilberkugeln von der Größenordnung 10^{-5} cm durch längere Zeit (nach Ehrenhaft durch Stunden, nach Targonski 10—15 Minuten) beobachten lassen. Bei diesen Versuchen wurde daher die Verdampfungsgeschwindigkeit nicht durch die Diffusionsgeschwindigkeit bestimmt, sondern es kam die eigentliche Verdampfungsgeschwindigkeit ins Vakuum wesentlich in Betracht.[1])

Zusammenfassung.

Die Theorie ergibt, daß Quecksilberkugeln mit einem Radius von 10^{-5} cm in dem gegenüber großen Kugeln gesättigten Dampf verdampfen. Stefans Diffusionstheorie ergibt eine Verdampfungsgeschwindigkeit, die nicht nur bedeutend größer ist, als die von Ehrenhaft und seinen Mitarbeitern beobachtete, sondern auch als die von Schidlof[2]) und seinen Mitarbeitern beobachtete Verdampfungsgeschwindigkeit. Im Quecksilber gelöste fremde Metalle halten die Verdampfung auf.

Wien, im Juni 1920. I. Physikalisches Institut.

1) Man könnte gegen die eben durchgeführte Rechnung einwenden, daß am Boden des Kondensators außer den großen auch kleine Kugeln liegen und daß diese den Diffusionsvorgang vermöge ihres höheren Dampfdruckes wesentlich verzögern. Aber einerseits müssen diese kleinen Kugeln infolge der großen Nähe der Kugel *B* selbst rascher verdampfen als die im Kondensator schwebende Kugel *A*, andererseits können sie den Dampfdruck in der Umgebung der Kugel *A*, auf den es bei der Rechnung ankommt, nur wenig beeinflussen. Denn der Überdruck, der an den kleinen Kugeln herrscht, nimmt wesentlich verkehrt proportional mit der Entfernung ab. Wenn die Kugel im Kondensator bewegt wird, müßte die Verdampfungsgeschwindigkeit nach der Diffusionstheorie größer sein als an der ruhenden Kugel.

2) Hierzu ist zu bemerken, daß Ehrenhaft in der Physik. Zeitschr. 1915, a. a. O. darauf hinwies, daß Schidlof mit seiner optischen Ausrüstung keine so kleine Quecksilberkugeln sehen konnte.

(Eingegangen 5. Juli 1920.)

6. *Methoden zur Beobachtung des Effektes des elektrischen Feldes auf Spektrallinien; von F. Tuczek und W. Heuck.*

1. *Problemstellung.*] Bei Untersuchungen über den Starkeffekt wurde bisher immer Gleichstrom zum Betrieb der Entladungsröhre und Gleichspannung zur Erzeugung des zerlegenden Feldes benutzt, und zwar sowohl bei der Kanalstrahlenmethode wie bei der Methode der ersten Kathodenschicht. Zur ersten dieser beiden Methoden verwendete man zudem zwei getrennte Hochspannungsquellen, eine für die Stromerzeugung, eine zweite, um das Feld herzustellen. Solche Untersuchungen konnten daher nur in Instituten gemacht werden, die über eine oder sogar zwei Erzeugungsanlagen für hochgespannten Gleichstrom verfügten. Dynamos und Sammlerbatterien für Hochspannung sind aber außerordentlich teuer und unter den heutigen Verhältnissen für Universitätsinstitute kaum noch zu beschaffen, Influenzmaschinen im Gebrauch unpraktisch wegen der schwierigen und besondere Sorgfalt erfordernden Behandlung, außerdem liefern sie für die meisten Untersuchungen zu wenig Strom.

Durch die vorliegende Arbeit sollte daher festgestellt werden, erstens ob man nicht auch bei der Kanalstrahlenmethode mit einer einzigen Gleichstromquelle auskommen kann, zweitens ob man bei beiden Methoden eine Wechselstromquelle und einen Induktor, die in den meisten Instituten vorhanden sind, benutzen kann, und welche besonderen Methoden hierbei anzuwenden sind. Da die gebräuchlichen Spannungsmesser nur den effektiven Mittelwert der Spannung anzeigen, die Spannungskurve aber im allgemeinen keine Sinuskurve sein wird, kann Wechselspannung nur für vergleichende Messungen in Frage kommen. Dieser Nachteil fällt aber für viele Untersuchungen nicht ins Gewicht und ist der Methode der ersten Kathodenschicht ohnedies eigentümlich.

2. *Untersuchungen nach der Kanalstrahlenmethode mit einer einzigen Gleichstromquelle.*

Eine wesentliche Vereinfachung der zum Arbeiten mit der Kanalstrahlenmethode erforderlichen Apparatur bedeutet

es schon, wenn man dieselbe Gleichstromquelle verwenden kann zum Erzeugen der Entladung und des Feldes, in dem die Strahlen hinter der Kathode verlaufen. Dies wurde auf Vorschlag von Hrn. Prof. Stark mit gutem Erfolg versucht. Man kann die hinter der durchlöcherten Kathode liegende Hilfskathode unmittelbar mit der Anode verbinden. Dann ist also die Spannung zwischen Hilfselektrode und Kathode immer gleich der Entladungsspannung. Bei den Aufnahmen wurde die Hilfselektrode durch einen besonderen Jodkadmiumwiderstand an den positiven Pol der Stromquelle (Dynamo von 3500 Volt und Sammlerbatterie von 900 Volt in Serie) gelegt. Der vorgeschaltete Widerstand hatte den Zweck, Lichtbogenbildung zwischen Hilfselektrode und Kathode zu verhindern. Diese Schaltung sollte bewirken, daß Schwankungen der Entladungsspannung infolge von Gasabgabe aus den noch nicht ganz reinen Elektroden nicht, oder wenigstens nur abgeschwächt, auf das zerlegende Feld sich übertrugen.

Die Feldstärke betrug bei diesen Versuchen, die wie alle in dieser Arbeit beschriebenen mit Wasserstoff gemacht wurden, 14600 Volt/cm. Kathode, Anode und Hilfselektrode der benutzten Röhre waren Kreisscheiben von etwa 5 cm Durchmesser. Kathode und Anode hatten einen Abstand von 7,3 cm, Kathode und Hilfselektrode waren ungefähr 2,5 mm von einander entfernt. Die Dispersion des verwendeten Gitterspektrographen betrug im Mittel 13,3 Å/mm. Der Spektrograph ist beschrieben in Ann. **48**. S. 195. 1915.

3. *Allgemeines über die Untersuchungen mit Stromquellen veränderlicher Spannung.*

Bringt man die lichtemittierenden Moleküle oder Ionen in ein Feld, dessen Größe zeitlich veränderlich ist, so wird auch die Zerlegung der emittierten Linien mit der Zeit schwanken, und man hätte auf der photographischen Platte die den verschiedenen Feldern entsprechenden Zerlegungen nebeneinander liegend, d. h. verwaschene Linien, zu erwarten, wenn nicht die im folgenden beschriebenen besonderen Verhältnisse vorlägen: Lenkt man im Vakuum Kathodenstrahlen, die mit einem Induktor erzeugt werden, magnetisch ab, so erhält man, wie Lenard[1]) hervorhebt, auf dem Fluoreszenzschirm einen scharf

1) P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten. Abhandl. d. Heidelberger Akad. d. W., math.-naturw. Klasse. 5. Abhandl. S. 24. 1918.

begrenzten, sehr intensiven Fleck, begleitet von einem matten ablenkbareren Schwanz. Diese Tatsache ist so zu deuten:

Da die Charakteristik der Entladungsröhre keine Hysteresis zeigt, entspricht jedem Momentanwert der Entladungsspannung ein ganz bestimmter durch die Gleichstromcharakteristik gegebener Wert der Stromstärke, der im allgemeinen um so größer ist, je höher die Entladungsspannung ist. Die meisten Elektronen und Ionen sind also in den Zeiten der größten Entladungsspannung vorhanden, und dies um so mehr, je steiler die Stromstärke bei großen Spannungen anwächst. Daher hat die Mehrzahl der Elektronen den größten überhaupt vorkommenden Wert der Geschwindigkeit. Übertragen wir diese Erfahrungen auf die Betrachtung des aus dem leuchtenden Spannungsfeld austretenden Lichtes, so ergibt sich, daß bei weitem die größte Lichtintensität zu Zeiten der größten Entladungsspannung ausgesandt wird, und wenn die zerlegende Feldstärke in jedem Augenblick dieser proportional ist, auch zu Zeiten der größten Feldstärke. Um die Verhältnisse möglichst günstig zu gestalten, wird man bemüht sein, die Strom- und Spannungskurve so zu beeinflussen, daß sie möglichst steil ansteigt und abfällt und ein breites Maximum hat, also einem Rechteck möglichst angenähert wird.

Um einen Einblick in die hier vorliegenden Verhältnisse zu bekommen, wurde die Stromkurve durch magnetische Ablenkung des Kathodenstrahles einer Braunschen Röhre untersucht. Zum Auseinanderziehen des auf dem Fluoreszenzschirm entstehenden Lichtbandes diente ein rotierender Spiegel oder auch, um die Kurve photographieren zu können, ein sinusförmig schwankendes magnetisches Querfeld.

4. *Notwendigkeit einer Ventilröhre und Konstruktion der benutzten Ventilröhren.*

In der Phase, während deren der Strom in umgekehrter Richtung durch die Röhre geht, Kathode und Anode in ihrer Funktion also vertauscht sind, wird aus dem Gebiet, dessen Lichtemission untersucht werden soll, in großer Intensität das Viellinienspektrum des Wasserstoffs ausgesandt. Diese Linien können auf der Platte so stark auftreten, daß sie die zerlegten Balmerlinien störend überdecken. Um diesen Übelstand zu vermeiden, schaltet man zweckmäßig eine Ventilröhre ein. Das hat auch den Vorteil, daß die Erwärmung der Entladungsröhre nicht unnötig groß wird. Dafür kann man

die Belastung in der gewünschten Stromrichtung zugunsten einer kleineren Belichtungsdauer steigern.

Bei den Aufnahmen wurde eine Ventilröhre von Gundelach benützt, deren Ventilwirkung durch verschieden große Oberflächen der Elektroden erzielt wird. Ihr Gasinhalt konnte regeneriert werden, indem man Entladung durch ein Nebenröhrchen gehen ließ, das mit gasabgebendem Material gefüllt war. Eine wesentliche Eigenschaft dieser Ventilröhre ist die, daß sie in beiden Richtungen Strom hindurchläßt, nur in einer Richtung mehr. Das Verhältnis beider Stromstärken, also die Güte der Ventilwirkung, hängt in hohem Maße vom Vakuum ab.

Es wurden dann noch Versuche mit selbst angefertigten Glühkathoden-Ventilröhren gemacht. Das Charakteristische einer solchen Ventilröhre ist, daß die Stromleitung ohne Beteiligung des Gasinhaltes ausschließlich von den aus dem glühenden Draht austretenden Elektronen übernommen wird. Die Ventilwirkung ist daher vollkommen, da aus der kalten Elektrode keine Elektronen abgegeben werden. 6 cm Wolframdraht von 0,1 oder 0,15 mm Durchmesser wurden zu einer engen Spirale aufgewunden und diese möglichst achsial in einem Zylinder aus Eisenblech von 2 cm Durchmesser als Anode befestigt. Der Abstand zwischen den Elektroden mußte so klein gewählt werden, damit der Gasinhalt sich nicht an der Stromleitung beteiligte, auch bei dem verhältnismäßig schlechten Vakuum, wie es die Gaedesche rotierende Quecksilberpumpe ohne besondere Vorsichtsmaßregeln liefert. Es konnte sogar die Ventilröhre an derselben Pumpleitung angeschlossen bleiben, durch die der Wasserstoff während der Entladung durchgesaugt wurde.

5. *Methode der ersten Kathodenschicht.*

Es wurde die in der Veröffentlichung von Stark, Hardtke und Liebert, Ann. d. Phys. **56**. S. 569. 1918 beschriebene Entladungsröhre benützt. Die Versuche wurden mit 50-periodigem Wechselstrom und mit Gleichstrom ausgeführt, der durch einen Quecksilberstrahlunterbrecher etwa 50mal in der Sekunde zerhackt wurde. In beiden Fällen wurde derselbe Funkeninduktor verwandt, dessen Spulen eine Länge von 48 cm hatten, und die Gundelachsche Ventilröhre. In dem Kreis: Induktor, Ventilröhre, Entladungsröhre lag ein Jodkadmiumwiderstand,

Die erste Aufnahme mit Wechselstrom zeigte in großer Intensität das Viellinienspektrum und die unzerlegten Balmerlinien, die zerlegten Balmerlinien verhältnismäßig schwach, aber einigermaßen scharf. Die Betrachtung der Stromkurve lieferte die Erklärung. Sie stieg ziemlich schnell an und fiel ebenso ab, die Stromstärke in umgekehrter Richtung hatte aber auch einen beträchtlichen Wert, die Ventilwirkung war schlecht. Die Bandenlinien und die unzerlegten Balmerlinien entstammen den Zeiten, in denen der auf den Spektrographenspalt abgebildete Raum von positiver Säule erfüllt war. Um die ungewünschte Stromrichtung herabzudrücken, wurde vor die Entladungsröhre eine große Selbstinduktion (Sekundärspule eines kleinen Induktors) und beiden parallel eine Leidener Flasche (0,0033 MF.) geschaltet. Hierdurch wurde die ungewünschte Stromrichtung tatsächlich beseitigt, gleichzeitig aber verlief die eine Hälfte der Stromkurve flacher. Dementsprechend hatten auf einer neuen Aufnahme die Bandenlinien und die unzerlegte Balmerserie nicht mehr die große Intensität, die zerlegten Serienlinien waren aber etwas verwaschen. Bei größerer Härte der Ventilröhre, und damit besserer Ventilwirkung gelang es dann, ohne Selbstinduktion und Kapazität eine Aufnahme zu machen, die bezüglich der Schärfe der Linien und der Reinheit des Spektrums hinter einer Aufnahme mit Gleichstrom um nichts zurückstand, aber fast die dreifache Zerlegung aufwies, wie sie mit 4400 Volt Gleichspannung erzielt werden konnte. Die effektive Entladungsspannung betrug 6000 Volt, die Feldstärke berechnete sich aus der Zerlegung von H_β und H_γ zu 51000 Volt/cm. Normale Schwärzung war für H_β und H_γ in 2 Stunden erreicht.

Zwei Umstände erschwerten das Arbeiten bedeutend. Erstens gab die Einengung der Kathode durch das Quarzrohr der Entladungsröhre eine recht beträchtliche Ventilwirkung in schädlichem Sinne. Besonders bei hohem Vakuum, das für große Feldstärken nötig ist, machte sich dies störend bemerkbar. Durch eine andere Konstruktion der Entladungsröhre mit ebenfalls eingeengter Anode kann dieser Übelstand vielleicht beseitigt werden. Zweitens ist es schwer den Härtegrad der Gundelachschen Röhre richtig einzustellen, und unmöglich, ihn konstant zu halten. Durch die Selbstevakuation ändert sich die Härte, damit die Spannung an der Entladungsröhre und die Kurvenform, also auch die Größe des zerlegenden

Feldes. Noch stärker traten diese Unzuträglichkeiten in die Erscheinung bei unterbrochenem Gleichstrom. Hier ist die Stromkurve außerordentlich spitz, die Maximalspannung bei gleicher Effektivspannung größer. Die Entladung wurde leicht flackernd, indem sie in den Raum unter den die Kathode umgebenden Messingzylinder eintrat, vermutlich während der Phase mit umgekehrter Stromrichtung. Eine Aufnahme zeigte starkes Überwiegen der Bandenlinien. Man konnte die Entladung ruhiger machen, indem man eine Leidener Flasche dem Induktor parallel schaltete. Hierdurch wurde die sehr spitze Stromkurve flacher und breiter. Der Übelstand ließ sich aber nicht so weit beheben, daß einwandfreie Aufnahmen mit zerhacktem Gleichstrom möglich waren. Alle diese Nachteile werden sich mit einer Glühkathodenventilröhre vermeiden lassen, deren Ventilwirkung vollkommen, und über der der Spannungsabfall konstant ist.

Versuche mit der Glühkathodenröhre und der Methode der ersten Kathodenschicht wurden nicht gemacht. E. sei aber an dieser Stelle ein Ergebnis eingeschaltet, das mit der Kanalstrahlenmethode erhalten wurde. Macht man die Induktorspannung sehr groß, begrenzt aber die Stromstärke durch nicht zu starkes Heizen des Glühdrahtes, arbeitet also mit Sättigungsstrom, so bekommt die Stromkurve einen steileren Anstieg und Abfall und ein breites Maximum, wie es erstrebenswert ist. Es konnte leider keine Aufnahme mit der Glühkathodenröhre gemacht werden. Bei längerer Belastung wurde der Glühdraht zur Anode hingezogen und schloß die Röhre kurz. Im übrigen arbeitete die Ventilröhre aber befriedigend, so daß die Anwendung besser konstruierter Röhren guten Erfolg verspricht. Weitere Versuche, auch mit technisch hergestellten Glühkathodenröhren, sind in Aussicht genommen.

6. *Die Kanalstrahlenmethode mit veränderlicher Spannung.*

Da die hierfür benützten Entladungsröhren keine eigene Ventilwirkung haben, kommt es bei dieser Methode weniger auf eine vollkommene, natürlich aber ebenso auf eine zeitlich konstante Wirkung der Ventilröhre an. Indem man die Hilfselektrode mit der Anode verbindet, kann man gute Aufnahmen sowohl mit Wechselstrom wie mit unterbrochenem Gleichstrom erzielen. Im letzteren Falle war es wieder nötig, zur Beruhigung der Entladung eine Kapazität dem Induktor

parallel zu schalten. Mit Wechselstrom war normale Schwärzung für H_β und H_γ auf Hauffultrarapidplatten nach zehnstündiger Belichtungsdauer erreicht. (4000 Volt effektiv, 24600 Volt/cm). Mit unterbrochenem Gleichstrom war die Platte nach 9 Stdn. noch unterbelichtet. (4000 Volt eff., 24500 Volt/cm). Die maximale Stromstärke, gemessen mit der Braunschen Röhre, betrug 20—30 MA.

7. *Auftreten von Schwingungen.*

Es wurde häufig mit der Braunschen Röhre beobachtet, daß sich über die Stromkurve, hauptsächlich in der abzudrosselnden Phase, gedämpfte Schwingungen, etwa von der Frequenz 2000, überlagerten. Die Schwingungen erschienen nur, wenn die Ventilröhre eingeschaltet war, auch dann, wenn die Entladungsröhre kurz geschlossen wurde. Ihre Amplitude und ihre Verteilung über die Stromkurve änderte sich mit dem Zustand der Ventilröhre. Es ist einleuchtend, daß diese Schwingungen die Güte der Aufnahmen beeinträchtigen können, zumal ihre Stromamplitude manchmal hinter der Größe des Gesamtstromes wenig zurückblieb. Nähere Untersuchungen darüber sollen einer späteren Arbeit vorbehalten sein.

8. *Zusammenfassung.*

1. Bei der Kanalstrahlenmethode kann man mit einer einzigen Gleichstromquelle auskommen, indem man die Hilfselektrode mit der Anode verbindet.

2. Sowohl nach der Kanalstrahlenmethode wie nach der Methode der ersten Kathodenschicht kann man mit einer Stromquelle veränderlicher Spannung und einem Induktor Aufnahmen machen, die den Aufnahmen mit Gleichspannung gleichwertig sind.

3. Es wird zweckmäßig eine Ventilröhre eingeschaltet. Mit einer Gundelachschen Gasentladungsröhre konnten zwar gute Ergebnisse erzielt werden, das Arbeiten mit ihr ist aber schwierig. Für den weiteren Ausbau der Methode verspricht die Verwendung von Glühkathodenventilröhren mehr Erfolg.

Vorstehende Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Universität Greifswald ausgeführt. Hrn. Prof. Stark danken wir für die Anregung zu den Versuchen und ihre Förderung.

(Eingegangen 24. Juni 1920.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig

Fig. 1.

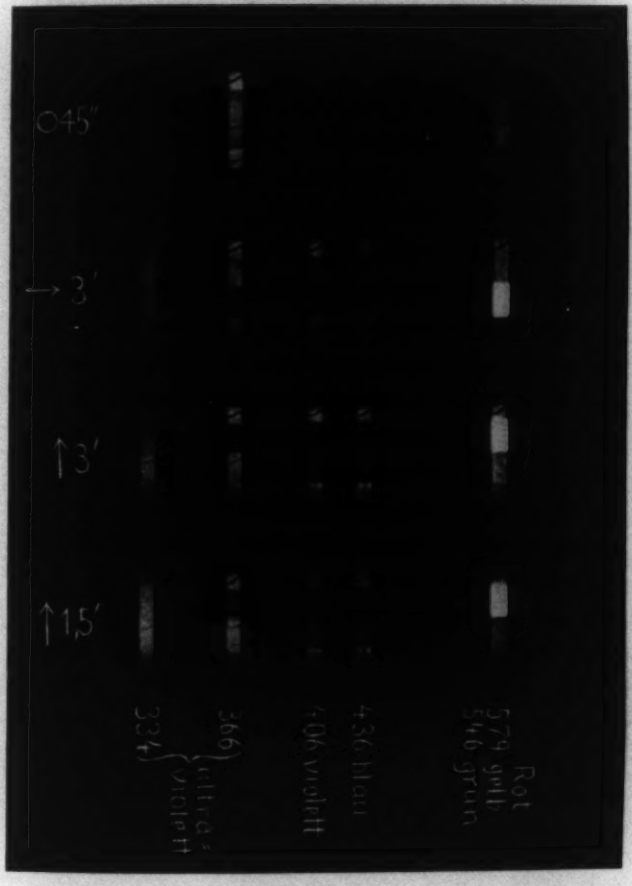


Fig. 8.

F. Weigert.

Inhalt.

Seite

1. S. Ehrenfest und D. S. Konstantinowsky. Adiabatisch-invariante Quantenzahlen. (Hierzu Tafel III.) 772

2. Hans Hergesell. Beiträge zur Kenntnis der Oberflächenschichten der Atmosphäre 816

3. G. Boeline. Bestimmung der Thomsonschen aus dem theoretischen Gleichgewicht an einer ausgedehnten Drahte . . . 845

4. O. v. Auwers. Über Hesselsches Logierungen. II. Teil. Allgemeinere Bemerkungen zu Hesselschen Absolution-Hanganformeln und Anwendungen derselben 867

5. Paul Fröhlich. Neuere Beobachtungen über die Polarisation bei der Totalreflexion teilweise Lichtes 900

Namenregister zum Jahrgang 1920 917

Die Redaktion der Annalen wird von den unterzeichneten Herren besorgt. Das geschäftliche Teil hat Herr Geh. Rat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: München, Leopoldstraße 91.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen nur kleine Zusätze für die verwendeten Lettern steht zu disponieren.

Für die Ausführung von Figurentafeln gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls [illegible] gewünscht werden, so muß die bei Rücksendung der Korrekturen geschehen. Auf die Deckblatt auf dessen erster Seite [illegible] Titel, Jahrgang, die Seitenzahlen beizufügen. Mitteilungen über [illegible] sind an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck für die Annalen bestimmter Abhandlungen oder Übersetzung derselben [illegible] der gesetzlichen Bestimmt ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Redaktionen sind in möglichst ausführlicher Ausführung der Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen [illegible] in den Manuskript selbst einzuschreiben. Die [illegible] Figuren [illegible] sind, [illegible] werden sollen, ist die Stelle im Manuskripte recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Blätter sind nur [illegible] oder neben auf den [illegible] des Manuskriptes [illegible] in dem Text [illegible] und zwar [illegible] in der in den Formeln [illegible] Reihenfolge [illegible] Anordnung der Buchstaben und Verweisungen [illegible]

1920. № 25.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 63.

1. *Radioaktivität und Elektrizität*[1]; *von F. Ehrenhaft und D. K. Konstantinowsky.*

(Hierzu Tafel III.)

Inhaltsverzeichnis.

Versuche mit radioaktiven Probekörpern. — Zweck der Versuche. — Der P. K. emittiert ein α-Partikel. — Der P. K. emittiert ein β-Partikel. — Versuch I. Konstanz der Masse der Probekörper. — Versuch II. Stabilität der Ladung der nichtradioaktiven Probekörper. — Versuch III. Homogenität des elektrischen Feldes im Kondensator. — Versuch IV. Konstanz der Beweglichkeit der Probekörper. — Versuch V. Das Widerstandsgesetz — Versuch VI. Der radioaktive Probekörper — Herstellung der Probekörper. — Einbringung und Messung der radioaktiven Probekörper. — Die Beobachtung der Umladungseffekte der radioaktiven Probekörper. — Messung der Ladungsänderung der radioaktiven Probekörper — Versuch VII. Isolationsmessung des Kondensators unter Verwendung eines nichtradioaktiven Probekörpers als Elektrometer. — Diskussion der Resultate. — Resultate. — Anhang. — Darstellung der Anordnung. — Schaltungsskizze. — Gasreinigung. — Beschreibung des Universalsupportes und der evakuierbaren Beobachtungskammer mit eingebautem Ringschnittkondensator. — Universalsupport. — Evakuierbare Beobachtungskammer mit eingebauten Ringschnittkondensator — Herstellung der radioaktiven Präparate. — Einführung der radioaktiven P. K. in den Kondensator. — Mikrophotographien von P. K.

Versuche mit radioaktiven Probekörpern. Zweck derselben.

Die im folgenden begonnene Untersuchung der Erscheinungen an radioaktiven Probekörpern der Größenordnung 10^{-4} bis 10^{-5} cm im Ehrenhaftschen Kondensator eröffnet einen neuen Weg zur Erforschung der radioaktiven Phänomene und unterscheidet sich von den bisher üblich gewesenen physikalischen Verfahren zur Untersuchung radioaktiver Substanzen in mehrfacher Hinsicht.

1) Vgl. betreffend die Methode: Die Naturwissenschaften, August 1919, S. 695.

1. Es wird auf diesem Wege, auf welchem der *einzelne* P. K.[1]) in einem Gasraume oder in einem gasverdünnten Raume in einem elektrischen Felde isoliert gehalten und im mikroskopischen Dunkelfelde beobachtet werden kann, möglich werden, die Ladungsänderungen der radioaktiven Körper selbst zu untersuchen. Allerdings muß man sich dabei von vornherein klar sein, daß eventuelle radioaktive Strahlungen und Umladungen der Probekörper (P. K.)[1]) nach den heute bekannten Erfahrungen Ionisierungen in der Umgebung des P. K. oder Ionisierungen des P. K. selbst hervorrufen können, welche auch bei der Wirksamkeit eines elektrischen Feldes Umladungen des P. K. hervorrufen können. Im Folgenden wird versucht werden, einen Weg zu Methoden und Schlußweisen klarzulegen, welche zu erkennen gestatten, daß die beobachtete Erscheinung von der Radioaktivität der P. K. selbst initiiert wird; die Abgrenzung der Anteilnahme von Gas und P. K. bleibt einer späteren Arbeit vorbehalten.

Im Gegensatz hierzu gingen die bisherigen Methoden hauptsächlich darauf aus, die Aufladungen oder Veränderungen der Umgebung der radioaktiven Körper (Szintillation oder Ionisierung im Gas) allein zu beobachten.

2. Die Verwendung kleiner definierter P. K. gestattet noch Ladungsänderungen der P. K. von einer Kleinheit (10^{-10}—10^{-11} e. st. E.) präzise zu messen, die sich bisher der Messung entzogen, da die bisherigen Meßanordnungen höchstens 10^{-7}—10^{-8} e. st. E. zu messen gestatteten.

3. Da es sich bei unseren P. K. ferner um Massenkomplexe mit außerordentlich kleinen radioaktiven Mengen handelt, sollten Ladungsschwankungen stärker hervortreten. Dies läßt erwarten, daß sich die Durchschnittswirkungen schwerer definieren lassen werden, daß aber die Einzelwirkungen, auf die es im folgenden ankommt, stark hervortreten müssen.

Der P. K. emittiert ein α-Partikel.

Wir wollen zunächst Idealfälle im Sinne der Theorie der Radioaktivität behandeln. Ein kugelförmiger radioaktiver P. K. definierten Materiales und bekannter Dichte, geladen

1) Im folgenden wird die Abkürzung „P. K." für „Probekörper" gebraucht werden.

mit der Momentanladung e, werde in einen absolut leeren Raum, der nach oben und unten durch parallele metallische Platten abgegrenzt ist (wie beim Ehrenhaftschen Kondensator) gebracht. Wird an die Platten Spannung angelegt, so wirken auf den P. K. einerseits sein Gewicht mg nach abwärts, anderseits bei der Feldstärke $\mathfrak{E}$ die elektrische Kraft $e \cdot \mathfrak{E}$ nach aufwärts. Die angelegte Spannung sei der Richtung und Größe nach so gewählt, daß sie dem Gewichte des P. K. das Gleichgewicht hält, so daß derselbe frei im Raum schwebe. Der P. K. strahle ein α-Partikel aus. Da nach der radioaktiven Theorie das α-Partikel zweiwertig positiv, mit zwei sogenannten Elementarquanten $4{,}7 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. geladen sein soll, müßte die Ladung des P. K. um ebensoviel abgenommen haben, wenn das Erhaltungsgesetz der Elektrizität erfüllt bleiben soll.[1]) Er würde sich also um die Ladung $2e$ negativ aufladen; dies müßte dadurch erkenntlich werden, daß der P. K. plötzlich zu schweben aufhört und sich in die Richtung der positiven Platte zu bewegen beginnt. Neuerliches Ausschweben durch Änderung des elektrischen Feldes würde diese Ladungsveränderung messen lassen.

Gleichzeitig mit der Emission des α-Partikels, welches nahezu mit Lichtgeschwindigkeit weggeschleudert werden soll, müßte ein zweiter Effekt auftreten. Nach dem Impulssatz der Mechanik müßte der P. K. beim Abschleudern des α-Partikels einen Rückstoß erleiden. Einer Selenkugel vom Radius $2 \cdot 10^{-5}$ cm würde z. B. eine Rückstoßgeschwindigkeit von etwa 0,1 cm/sek., einer Hg-Kugel von gleicher Größe eine solche von 0,03 cm/sek. erteilt werden. Auf Grund der Erfahrungen an α-Strahlern in üblicher Menge würde der P. K. jedoch

1) Die radioaktiven Methoden messen bekanntlich: erstens den von einer „größeren" radioaktiven Menge erzeugten Gesamtstrom $Z \cdot e$ (Z die Zahl der pro Zeiteinheit emittierten α-Partikel, e deren Ladung) elektrometrisch; zweitens an einem anderen mit dem ersten in Vergleich gebrachten Präparate die Zahl der pro Zeiteinheit emittierten α-Partikel (Szintillation, Stoßionisation usw.). Die Division ergibt den *Mittelwert* der Ladung der α-Partikel, welche mit zwei positiven Einheitsladungen identifiziert wird. Die Gleichheit der α-Partikel untereinander wird aus der Schärfe der im elektrischen und magnetischen Felde abgelenkten Strahlenbündel (e/m-Bestimmung) sowie aus dem Umstande, daß die α-Partikel geladene Heliumatome darstellen, beurteilt.

selbst bei dieser idealen Messung nicht negativ aufgeladen zurückbleiben, da man zur Erklärung der Tatsache, daß das Restmaterial nach α-Emissionen positiv geladen zurückbleibt, annahm, daß die Emission eines α-Teilchens aus einem radioaktiven Körper nicht allein erfolge, sondern daß gleichzeitig oder fast gleichzeitig negative Elektronenladungen (δ-Partikel) ausgeschleudert würden.[1])

Nach diesen Erfahrungen müßte demnach jedenfalls gefolgert werden, daß der P. K. im gasleeren Raume eine quantenhafte und momentane Umladung zeigen muß, die sich durch eine ruckweise Bewegungsänderung oder Inbewegungsetzung der P. K. im elektrischen Felde bemerkbar machen sollte.

Der P. K. kann aber, da ein gasleerer Raum nicht hergestellt werden kann, nur im gaserfüllten oder gasverdünnten Raume im elektrischen Felde beobachtet werden. Tritt nun ein α-Partikel aus, so überlagern sich über die vorhin erwähnten Effekte noch die folgenden: Die Erfahrung lehrt, daß bei der Emission eines α-Partikels längs seiner Bahn eine positive und eine negative Ladungsmenge von etwa $2 \cdot 10^{-5}$ e. st. E. pro Zentimeter Bahnlänge in Stickstoff von normalem Druck und Temperatur 0^0 freigemacht wird. Im Sinne der Elektronentheorie im Gase wären das unter der Annahme einer Elektronenladung von $4{,}7 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. etwa $4 \cdot 10^4$ Ionenpaare.

Dieselben werden in einem elektrischen Felde von der Stärke einer e. st. E. pro Zentimeter erfahrungsgemäß mit der Geschwindigkeit von der Größenordnung von 400 cm/sek. in die Richtung des Feldes fortgeführt. Dabei können sie den Probekörper auch treffen. Da alle diese Vorgänge in Zeiten unter 0,001 sek. stattfinden, würde der Beobachtung doch nur ein momentanes Umladen des P. K. durch dessen ruckweise Geschwindigkeitsänderung wahrnehmbar.

Nach der Emission dieses α-Partikels bzw. nach Ablauf der vorerwähnten Folgeeffekte, also nach Ablauf einer für die von uns später in Betracht kommenden Zeiten unmeßbar kleinen Zeit hat der P. K. wieder eine stabile Ladung, bis die

---

1) Würde der P. K. dagegen negativ geladen zurückbleiben (vgl. die Versuche von L. Wertenstein, Soc. Franc. Phys. Nr. 40, S. 5. 1913), dann würde sich die Annahme der δ-Partikel im gasleeren Raume möglicherweise erübrigen.

nächste Emission eines α-Teilchens erfolgt und der Vorgang sich wiederholt.

Bei der tatsächlichen Messung wird nun der P. K. zunächst in einem derartigen Felde $\mathfrak{E}_s$ beobachtet, daß er bei der von ihm getragenen Ladung e mit einer Geschwindigkeit v_s ansteigt, welche es gestattet, die Zeiten t_s zu registrieren, die er zum Zurücklegen von aufeinander folgenden gleichen Strecken L benötigt.

$$\text{(I)} \qquad e\mathfrak{E}_s - mg = \frac{v_s}{B} = \frac{L}{t_s} \cdot \frac{1}{B} \cdot \text{ [1]}$$

Hat der P. K. eine Zahl von solchen Strecken steigend durcheilt, so wird das Feld meßbar derart verringert, daß der P. K. nunmehr bei der anderen Feldstärke $\mathfrak{E}_f$ diese Strecken bequem meßbar fallend zurücklegt

$$\text{(II)} \qquad mg - e\mathfrak{E}_f = \frac{v_f}{B} = \frac{L}{t_f} \cdot \frac{1}{B} \text{ usf.}$$

Das Umschalten von der Fallfeldstärke auf die Steigfeldstärke wird derart bewerkstelligt, daß immer Spannung an den Platten des die Feldstärke erzeugenden Kondensators verbleibt [2]) (vgl. Schaltungsskizze 15, Anhang S. 806).

Man müßte also nachfolgendes beobachten: Solange der P. K. kein α-Partikel emittiert, also „Stabilität der Ladung" aufweist, legt er die aufeinander folgenden Strecken in gleichen Steigzeiten t_s bzw. in gleichen Fallzeiten t_f zurück. Erfolgt eine Emission z. B. gerade am Ende einer Wegstrecke, die steigend zurückgelegt wird, dann müssen die Steigzeiten bis zu dem Ende dieser Strecke den einen Wert t_s, von da an aber einen anderen t_s' aufweisen. Erfolgt dagegen die Umladung während einer Steigstrecke, dann müssen die Passageseiten t_s vor dieser Wegstrecke und diejenigen t_s' nach dieser Wegstrecke je untereinander gleich, für diese Wegstrecke selbst einen Mittelwert t_s^* aufweisen. Die Versuchsumstände sind überdies so eingerichtet, daß der Beobachter den durch Ladungsänderungen von der Größenordnung des sogenannten Elektrons auf dieser Wegstrecke hervorgerufenen sprungweisen Übergang in die geänderte Geschwindigkeit bemerken müßte.

1) B, die Beweglichkeit des P. K. ist nach diversen Verfahren bestimmbar. Vgl. z. B. F. Ehrenhaft, „Über die Teilbarkeit der Elektrizität". Ann. d. Phys. 56. S. 1. 1918.

2) Um den Kondensator immer ionenfrei zu erhalten.

Im gaserfüllten Raume erfolgt, wie eine einfache Berechnung zeigt, die Abbremsung der Bewegung unserer P. K. so rasch, daß eine Ortsveränderung infolge des Rückstoßes unmerkbar klein bleibt.[1])

Der P. K. emittiert ein β-Partikel.

Würde ein radioaktiver P. K. dieser Größenordnung in absolut leerem Raume ein β-Partikel emittieren, dann treten qualitativ die gleichen Effekte ein. Aus den bisherigen Erfahrungen ließ sich bekanntlich keine Ladungsbestimmung der β-Partikel durchführen, sondern bloß das Verhältnis der transportierten Ladung zur Masse der korpuskular aufgefaßten Träger ermitteln (e/m-Bestimmung). Solange eine Messung der Masse der β-Partikel allein oder der Ladung derselben allein noch aussteht, läßt sich über die Umladung und den Rückstoß der radioaktiv gemachten β-strahlenden P. K. unserer Größenordnung bei Emission *eines* β-Partikels nichts Bestimmtes aussagen. Nach dem heute allgemeinen Bilde jedoch, nach dem ein β-Partikel die Ladung eines Elektrons $4{,}7 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. trägt, müßte der P. K. um „ein Elektron" positiv aufgeladen zurückbleiben; der Rückstoß wäre in diesem Falle[2]) mindestens 100 mal schwächer als bei Ausstrahlung eines α-Partikels zu erwarten.

---

1) Nach der Bewegungsgleichung des P. K. im reibenden Medium muß (für beobachtbar große Wege)

$$m \frac{d^2 s}{d t^2} + \frac{d s}{d t} \frac{1}{B} = 0$$

sein, oder der zufolge eines einmaligen Impulses

$$I = m \left(\frac{d s}{d t}\right)_0 = m v_0$$

zurückgelgte Weg Δs:

$$\Delta s = v_0 \int_0^\infty e^{-\frac{t}{m B}} \cdot d t = v_0 m B = I \cdot B.$$

Da der Rückstoßimpuls eines α-Partikels von der Größenordnung $1{,}2 \cdot 10^{-14}$ Dyne-Sek. sein müßte, wäre für einen P. K. vom Radius $3 \cdot 10^{-5}$ cm ($B = 1{,}3 \cdot 10^{+7}$ cm/Dyne-Sek.) ein Rückstoßweg von $1{,}6 \cdot 10^{-7}$ cm in Stickstoff von normalem Drucke zu erwarten. Dieser liegt unter der Grenze jeder Beobachtungsmöglichkeit.

2) In Anbetracht der beim Mittelwerte der β-Partikel durchgeführten e/m-Bestimmung.

Im gaserfüllten Raume treten bei der Emission eines β-Partikels wieder Ionisierungen auf; das rasche Zuwandern der Ionen auf den P. K. im Felde (vgl. S. 790) läßt auch in diesem Falle über die Größe und den Sinn der Ladungsänderung nur voraussagen, daß alle Umladungen nach Vielfachen der Elementarladung $4{,}7 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. vor sich gehen und momentane, d. h. ruckweise Geschwindigkeitsänderungen beobachtet werden müßten. Die Beobachtung des Rückstoßes wäre auch hier nicht zu erwarten.

Bevor wir zu den tatsächlichen Versuchen an unseren P. K. übergehen, sollen die Voraussetzungen, welche den Versuchen zugrunde liegen, zunächst nochmals überprüft werden.

Versuch I. Konstanz der Masse der Probekörper.

Der P. K. soll seine Masse während der Dauer der Versuche nicht ändern. Die Selenprobekörper, welche man durch Verdampfen in reinem trockenen Stickstoffgase erhält, erfüllen diese Bedingung. Zu Quecksilber haben wir etwa ein Promille Blei vorsichtshalber zugesetzt, wodurch die Verdampfung verhindert wird, und uns auch von der Konstanz der Masse über so lange Zeiten, wie sie bei diesen Versuchen in Betracht kommen, überzeugt.

Zu diesem Zwecke wird zunächst die freie Fallzeit t_g eines P. K. über eine bestimmte Strecke L, d. h. die Fallzeit bei abgeschaltetem Felde, beliebig oft gemessen. Nach anderen Versuchen mit dem P. K. werden erneuerte freie Fallzeiten gemessen. Aus der Gleichheit der Fallzeiten vor und nachher folgt die Konstanz der Maße der P. K.

$$\text{(III)} \qquad m g = \frac{v_g}{B} = \frac{L}{t_g \cdot B} .$$

Bei radioaktiven Probekörpern konnten die Fallzeiten, nach (III) allerdings, wenn überhaupt, zumeist nur vor den eigentlichen Versuchen messen, da wir bei den sich ändernden Ladungsverhältnissen der P. K. diese oft verloren haben, wenn wir die Spannung abschalteten und uns damit der Übersicht über die Ladungsänderungen begaben. Doch folgt die Konstanz der Masse m mit der für das folgende notwendigen Ge-

nauigkeit auch ebenso gut aus Gleichung IV rechte Seite erschlossenen Daten für t_g[1]).

Versuch II. Stabilität der Ladung der nicht radioaktiven Probekörper.

Der nichtradioaktive P. K. behält seine Ladung andauernd bei[2]). Man beweist dies durch nachfolgende Versuche:

Die Feldstärke $\mathfrak{E}_f$ am Kondensator wird derart abgeglichen, daß der P. K. noch langsam fällt und dabei die Wegstrecke L in der Zeit t_f zurücklegt. Wird die Feldstärke auf $\mathfrak{E}_s$ erhöht, so steigt der P. K. in der Zeit t_s über die gleiche Strecke. Aus den Gleichungen (III) und (IV) läßt sich die jeweilige Ladung des P. K. errechnen.

$$\text{(IV)} \qquad e = \frac{1}{\mathfrak{E}_s}\left(1 + \frac{t_g}{t_s}\right) mg = \frac{1}{\mathfrak{E}_f}\left(1 - \frac{t_g}{t_f}\right) mg.$$

Die geraden Linien der Figg. 10—14, S. 797—800 geben die Konstanz der Ladung wieder. Im Hinblick auf die später zu ziehenden Schlüsse war es zweckmäßig, die Resultate an solchen Testprobekörpern konstanter Ladung mit den ermittelten Ladungen an radioaktiven P. K. in den Darstellungen zu vereinigen.

Versuch III. Homogenität des elektrischen Feldes im Kondensator.

Das elektrische Feld des Kondensators ist im Innern des Kondensators bis an die Platten heran vollkommen homogen. Als Sonde zur Ausmessung des Feldes benützen wir den P. K. stabiler Ladung selbst, dessen Dimension unendlich klein ist gegenüber der des Meßraumes (vgl. Kondensator S. 808—810 Anhang) und führen ihn im Felde von geeigneter

---

1) Hat sich nämlich die Ladung des P. K. zwischen aufeinanderfolgenden Steig- und Fallzeiten nicht geändert, so besteht wie für den nichtradioaktiven P. K. Gleichung (IV); in den graphischen Darstellungen kommt dies in einem Aneinanderschließen der aus den Steig- und Fallzeiten erschlossenen Ladungen zum Ausdruck.

2) Der nichtradioaktive Se-P. K. ist nach Herstellung durch Verdampfung fast ausschließlich ungeladen und mußte durch ein radioaktives Präparat von außen für die Versuche erst aufgeladen werden.

Stärke zwischen den Platten auf und ab, wobei es gelingt, $^{95}/_{100}$ der Distanz zwischen den Platten abzutasten. Da im Okularraster des Mikroskopes äquidistante Strecken erkenntlich gemacht sind, kann die Bewegung des P. K. auf diese bezogen werden. Aus der Relation

$$\mathfrak{E} = \frac{m\,g}{e}\left(1 + \frac{t_g}{t_s}\right) \quad \text{bzw.} \quad \frac{m\,g}{e}\left(1 - \frac{t_g}{t_f}\right)$$

ergibt sich für einen P. K. konstanter Ladung und Masse als Maß für die Feldstärke in einem Meßintervalle der Ausdruck

$$\left(1 + \frac{t_g}{t_s}\right) \quad \text{bzw.} \quad \left(1 - \frac{t_g}{t_f}\right)$$

für die verschiedenen Stellen des Raumes, indem dann der radioaktive P. K. bewegt werden wird. In Fig. 1 sind die aus

Als Ordinate ist die jeweils gemessene Feldstärke, als Abszisse der Abstand von der oberen Kondensatorplatte aufgetragen.
Fig. 1.

solchen Versuchen sich ergebenden Mittelwerte für die Feldstärken in willkürlichen Einheiten für die Bezirke des Kondensators „*F*" als Beispiel aufgetragen; innerhalb der experimentellen Fehlergrenzen ergibt sich keine Abweichung von der Homogenität des Feldes. Aus elektrostatischen Gründen muß dann auch die Richtung des Feldes überall parallel und

senkrecht zu den Platten verlaufen. Aus diesem Nachweis ergibt sich, daß die Stärke des zwischen den Platten gebildeten Feldes

$$\text{(VI)} \qquad \mathfrak{E} = \frac{V}{300\,d} \text{ e. st. E. pro cm}$$

ist, wenn V die an die Platten angelegte Potentialdifferenz in Volt, d der Abstand der Platten in Zentimeter bedeutet.

Versuch IV. Konstanz der Beweglichkeit der Probekörper.

Jede Bewegung eines P. K. im gaserfüllten oder verdünntem Raume erfolgt unter Einfluß einer konstanten Kraft in gleichförmiger Geschwindigkeit. Diese Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des P. K. ergibt sich der auf ihn wirkenden äußeren Kraft proportional.

$$\text{(VII)} \qquad \mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{v}}{B};$$

worin B die Beweglichkeit, die Geschwindigkeit für die treibende Kraft $\mathfrak{P}$ gleich 1 bedeutet. Die auf einen einzelnen derartigen P. K. im elektrischen Felde ausgeübte Kraft $\mathfrak{P}$ ist, wie bereits erwähnt, dem Produkte der Feldstärke $\mathfrak{E}$ und der Ladung e des P. K. gleich. Nun wird die Geschwindigkeit v_i eines P. K. vom Gewichte mg mit der Ladung e bei verschiedenen Feldstärken $\mathfrak{E}_i$ gemessen. Die ihn nach aufwärts treibende Kraft $e\,\mathfrak{E}_i - mg$ ist daher mit der Geschwindigkeit v_i durch die Relation

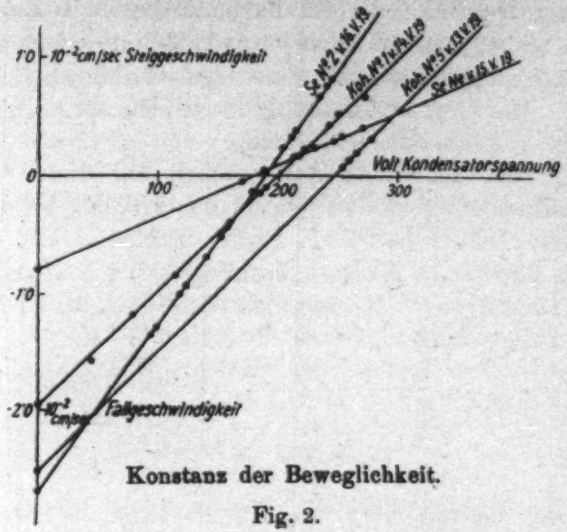
$$e\,\mathfrak{E}_i - mg = \frac{v_i}{B}$$

oder auch

$$\text{(VIII)} \qquad V_i = \frac{mg \cdot 300\,d}{e} + \frac{300\,d}{e}\,\frac{v_i}{B}$$

verbunden, so daß die an den Platten des Kondensators angelegten Spannungen V_i mit den beobachteten Fortführungsgeschwindigkeiten v_i des P. K. durch eine lineare Gleichung verbunden sein müßte, falls die Beweglichkeit B des P. K. für verschiedene angreifende Kräfte eine Konstante ist. Fig. 2 enthält einige Beispiele derartiger Meßreihen, welche die Konstanz der Beweglichkeit erweisen.[1])

1) Zugleich ist damit ein weiterer Beweis für die kugelige Form des P. K. gegeben.



Konstanz der Beweglichkeit.

Fig. 2.

Versuch V. Das Widerstandsgesetz.

Sind die hier verwendeten P. K. Kugeln der Dichte des Ausgangsmateriales, so ergibt sich ihre Beweglichkeit B zu

(IX) $$B = \frac{1}{6\pi\mu a}\left(1 + A\frac{l}{a}\right) \cdot$$ [1])

Bisher wurde die Einheitlichkeit der Dichte aller P. K. eines Materiales aus dem einheitlichen Zusammenhang zwischen der Fallgeschwindigkeit der P. K. und der Farbe derselben in abgebeugtem Lichte erschlossen[2]); bei P. K., welche über oder von der Dimension der Wellenlänge des Lichtes sind, kann man überdies bekanntlich bei Auflösung derselben mit Objektivsystemen genügender Apertur die Oberfläche des Ausgangsmateriales an der Eigenfarbe solcher P. K. erkennen. Vgl. überdies die Mikrophotographien des Se-P. K. im Anhang Tafel III. In den Berechnungen der Kugelgrößen aus der Fallgeschwindigkeit ist die Dichte der kompakten Massen vorausgesetzt. Die

1) Hierin bedeutet a den Radius des Kügelchens in cm, μ den Koeffizienten der inneren Reibung des Gases, l die mittlere Weglänge der Molekeln des Gases, A eine Konstante.

2) Bezgl. des Vergleiches zwischen optischer Größenbestimmung und Bestimmung aus dem Widerstandsgesetze für Selen vgl. die demnächst in den Wien. Ber. erscheinende Arbeit von J. Mattauch.

Berechnung der P. K. aus der Farbe enthalten solche Voraussetzungen nicht, sondern fußen nur auf den optischen Materialkonstanten, welche man den Messungen am molaren Materiale entnimmt. Die Übereinstimmung der beiden auf völlig anderen Grundlagen beruhenden Methoden der Größenbestimmung rechtfertigt die Annahme, daß es sich bei diesen P. K. in *inerten vollkommen trockenen* Gasen um Kugeln der betreffenden molaren Dichte handelt. Dieser Nachweis läßt sich nun neuerdings durch eine Methode bestätigen, die R. Bär[1]) gegeben hat. Die Dichte der P. K. läßt sich nämlich dadurch ermitteln, daß die Fallgeschwindigkeiten desselben P. K. bei verschiedenen Gasdrucken beobachtet werden. Wie man sich leicht überzeugen kann (vgl. a. a. O.) ist.

$$\frac{1}{t_v} = M + N\frac{1}{p},$$

worin t_v die Fallzeit über die Strecke L, p der Gasdruck in m/m Hg,

$$M = \frac{2}{9}\frac{sg}{\mu L}a^2 \quad \text{und} \quad N = \frac{2}{9}\frac{sg}{\mu L}(a p_0 l_0) A\,.\,^2)$$

Diese Versuche der Dichtebestimmung haben wir für Selenkugeln, welche durch Verdampfung in reinem trockenem Stickstoff (vgl. Anhang, S. 807) erzeugt wurden, überprüft.

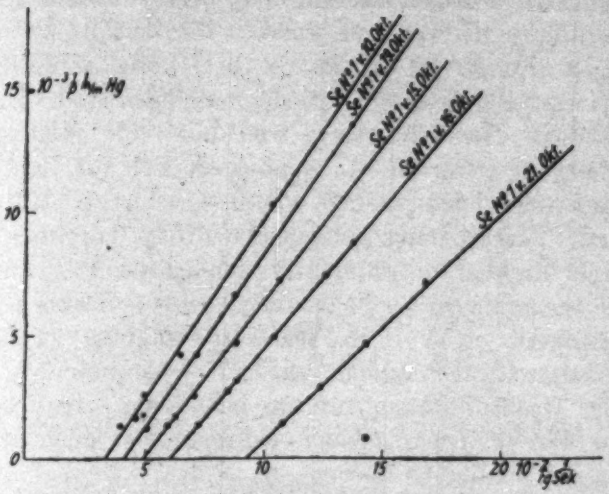
Fig. 3 gibt die erhaltenen Resultate graphisch wieder.[3]) Man entnimmt ihr, daß der Zusammenhang zwischen $1/tf$ und $1/p$ tatsächlich ein linearer ist. Die genaue Auswertung

1) R. Bär, Ann. d. Phys. **59**. S. 393. 1919.

2) Hierin bedeutet s das spezifische Gewicht des P. K., g die Schwerebeschleunigung, l_0 die Weglänge beim Drucke, $p_0 = 760$ mm Hg, A den Faktor des Widerstandsgesetzes, der von der Oberflächenbeschaffenheit des P. K. und vom reibenden Gase abhängt. Demnach sollte für ein und dasselbe Material $N^2/M = 2g\,p_0^2\,l_0^2/9\,\mu L \cdot A^2 s$ eine Konstante sein. Das Ergebnis derartiger Versuche ist demnach die Ermittlung der Größe $A^2 s$ und nicht eigentlich der Größe s. Auch übersieht man, daß eine geringe Abweichung in der Oberflächenbeschaffenheit des P. K. wegen des quadratischen Auftretens von A mehr ins Gewicht fällt als eine ebensolche in der Dichte des P. K.

3) Von den insgesamt vorgenommenen sieben Messungsreihen haben sich zwei als unbrauchbar erwiesen. Die eine enthält zu wenig Messungen, als daß das Fallzeitenmittel bei den verschiedenen Drucken definiert wäre. Bei der andern stellte sich heraus, daß ein Verbindungsschlauch im N-Wege bei der Erzeugung geplatzt war.

ergibt für A gleich 0,815 (ein Wert, der schon aus dem Vergleich mit den optischen Messungen ermittelt wurde), wurde für alle Kügelchen die Dichte des molaren Selens. Im übrigen



Dichtebestimmung.

Fig. 8.

sind unsere weiteren Auseinandersetzungen von diesem letzteren Nachweise in weiten Grenzen unabhängig[1]).

Somit ist auf Grund der Versuche I—V die jeweilige Ladung des P. K. an jeder Stelle des Kondensators durch die Gleichungen (III), (IV), (VI) und (IX) gegeben.

Versuch VI. Der radioaktive Probekörper.

Herstellung der P. K.

Es handelt sich zunächst darum, definierte P. K. von der Größenordnung 10^{-5} cm, welche radioaktiv sind, herzustellen. Hierzu sind wir von nichtradioaktivem Materiale ausgegangen. Die Wahl fiel auf Hg, andererseits insbesondere auf Selen.

---

1) *Anmerkung bei der Korrektur:* Nach Abschluß dieser Arbeit wurden von einem von uns weitere derartige Versuche ausgeführt, welche vielleicht auf das Vorhandensein mehrerer (dreier?) Sorten von von P. K. schließen lassen. Möglicherweise hängt das Auftreten der verschiedenen Sorten mit der Art der Erzeugung der P. K. zusammen. Vergl. hierzu überdies die zitierte Arbeit von J. Mattauch.

Auf das Ausgangsmaterial wurde ein radioaktiver Niederschlag von relativ starken radioaktiven Strahlern niedergeschlagen.[1]) In Verwendung traten hierfür einerseits Radiumemanation; wir erlangen also auf diese Weise einzelne P. K. der Größenordnung 10^{-5} cm, auf welchen die Zerfallsprodukte der Emanation (Ra A, Ra B, Ra C, Ra D) und somit Strahler aller drei Gattungen (α, β, γ) niedergeschlagen sind. Die Wahl fiel auf diese Herstellungsart, weil hier eine relativ starke α-Strahlung zu erwarten ist, wenngleich sich die Zahl der zu erwartenden Alphaemissionen kaum abschätzen läßt. Der später zur Beschreibung gelangende Effekt konnte im Falle der durch Emanation radioaktiv gemachten P. K. auf jede der drei Strahlungen (α, β, γ) zurückgehen. Daher schien es wünschenswert, einen P. K. reiner α-Strahlung zu isolieren. Wir realisierten dies, indem wir mit Polonium beschlagene P. K. der Größenordnung 10^{-5} cm behandeln. Hier läßt sich die Zahl der zu gewärtigenden α-Emissionen auch eher einschätzen.

Bezgl. der genauen Art der Herstellung solcher Präparate verweisen wir auf den Anhang S. 813.

Einbringung und Messung der radioaktiven P. K.

Wir legten zunächst Wert darauf, möglichst die ersten radioaktiven P. K., die in den Kondensator eintreten, der Messung zuzuführen. Um dies zu erreichen, verwendeten wir einen Kondensator, dessen obere Platte ein feines Loch hatte, welches den Kondensatorhohlraum mit einem kugelförmigen Gefäße (Fig. 4) mit drei Hahnauslässen verband. Die Verbindung konnte durch den Hahn *H* bewerkstelligt werden (vgl. Fig. 5). Das Vorratsgefäß wurde zunächst mit P. K. nichtradioaktiven Materiales unter stets gleichen Umständen gefüllt, sodann der Hahn *H* geöffnet und durch sorgfältige Versuche, bei welchen auch auf Temperaturgleichheit geachtet

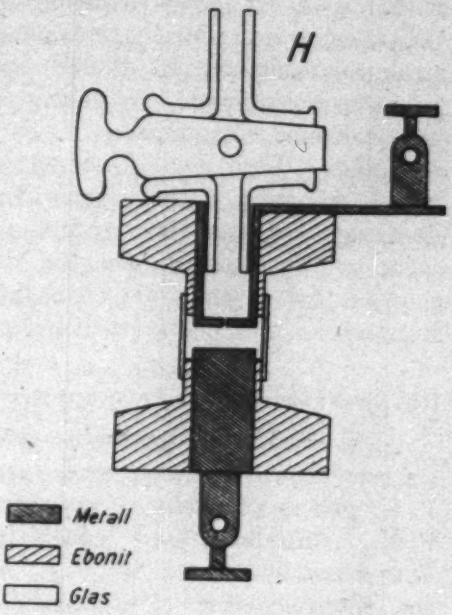
---

1) Wir danken den Herren Stefan Meyer und V. K. Hess herzlichst für die Ausführung der Stärkemessungen diverser Präparate, die sie in zuvorkommender Weise vornahmen. Die in dieser Arbeit zur Verwendung gelangten Präparate entstammen dem Radium-Institute der Wiener Akademie der Wissenschaften. Wir statten derselben hiermit unseren Dank ab.

wurde, eine Zeit gesucht, während welcher der Hahn geöffnet bleiben mußte, um bloß die ersten P. K. in den Kondensatorraum gelangen zu lassen. Der Eintritt jedes P. K. konnte dadurch festgestellt werden, daß das Loch in der oberen Platte

Im Maßstabe 7 : 2 verkleinert.

Fig. 4.



Im Maßstabe 9 : 10 verkleinert.

Fig. 5.

des Kondensators beleuchtet und mit dem Mikroskope anvisiert wurde. Sodann konnte der geladene P. K. durch Heben des Kondensators (Verwendung der Schraube *n* der Konstruktionszeichnung 16, Anhang S. 808) im Felde weiter verfolgt werden. Das gleiche Verfahren wurde mit radioaktivem Materiale wiederholt.[1]) Das Vorratsgefäß wurde samt allen Zuleitungen vorsichtshalber aus dem Meßzimmer entfernt und alle Abgase durch eigene Leitungen direkt ins Freie geführt.

Ein zweites Verfahren hat den Vorteil, weniger zeitraubend zu sein, und kann vor allem in einem Kondensator ausgeführt werden, dessen Feld auch in der nächsten Nähe

1) Nur wurde bei diesen Versuchen die obere Platte nicht mehr angeleuchtet.

der oberen Platte ungestört ist, da das Loch in dieser vermieden ist (vgl. Konstruktionszeichnung 16, Anhang S. 808).

Die Suspension der P. K. im Stickstoffgase wurde durch Einleiten in ein großes Vorratsgefäß schütter gemacht. Der Gasstrom wurde durch Bedienung der Hähne (vgl. Konstruktionszeichnung 16, S. 808) in kleinen Partien durch den Kondensator geleitet. So gelang es, die Zahl der in den Kondensatorraum eintretenden P. K. auf ein Minimum zu beschränken. Von der „Unverseuchtheit" des Kondensators haben wir uns durch eigene Versuche (vgl. Versuch VII) überzeugt. Unter der großen Anzahl vorgenommener Versuche wurden im übrigen für das Folgende nur jene ausgewählt, bei welchen die beobachteten Phänomene möglichst störungsfrei und doch deutlich hervortreten.

Die Beobachtung der Entladungseffekte der radioaktiven P.K.

Die subjektive Beobachtung ergab hie und da die erwartete durch scheinbar ruckweise Bewegungsänderungen der P. K. gekennzeichnete sprungweise Auf- oder Abladung des P. K. Auffallend sind jedoch häufig auftretende langsame Bewegungsänderungen der P. K. im konstanten Felde, welche den Eindruck einer kontinuierlichen Zu- oder Abnahme der Ladung machen. Zur Illustrierung des Eindruckes geben wir die Bemerkung des Originalprotokolles dreier Beobachter vom 9. I. 1919 wieder: „Die Umladungen machen den Eindruck kontinuierlicher Entladung, denn die Erscheinung zeigt z. B. stets langsamer werdende Steigbewegung und sodann Übergehen in kontinuierlich rascher werdende Fallbewegung."

Diese Phänomene sind auch an Probekörpern beobachtbar, deren Ladung unseren Erfahrungen gemäß in der Größenordnung des sogenannten Elementarquantums der Elektrizität stehen.

Auf Grund der Versuche I—V würden diese Beobachtungen nachfolgendes beibehalten: Sofort nach Eintritt des radioaktiven P. K. wurde zwischen den Platten des Kondensators das elektrische Feld hervorgerufen. Dieses setzt den P. K. in Steigbewegung, weil das Produkt der Ladung des P. K. in die Feldstärke größer ist als das Gewicht des P. K.

$$e\,\mathfrak{E} > m\,g.$$

Die Steigbewegung ist um so rascher, je größer

$$e\,\mathfrak{E} - m\,g$$

ist. Da die Feldstärke aber nach den in den Versuchen gemachten Erfahrungen konstant bleibt (Versuch III), und auch das Gewicht des P. K. sich nicht ändert (Versuch I u. II), würden sämtliche Änderungen der Steiggeschwindigkeit des P. K. auf die Änderung seiner Ladung e zurückgehen. Eine kontinuierliche Änderung der Geschwindigkeit würde somit eine ebensolche Änderung der Ladung der P. K. bedeuten. Ist der P. K. z. B. in kontinuierlich sich verändernden Geschwindigkeiten von der Steigbewegung in die Fallbewegung übergegangen, so würde dies bedeuten, daß er an Ladung kontinuierlich soviel verloren hat, daß nunmehr die nach oben wirkende Kraft kleiner geworden ist, als sein Gewicht

$$e\,\mathfrak{E} < m\,g\,.$$

Ebenso würde ein kontinuierlich rascheres Steigen des ursprünglich schwebenden P. K. nach den in den Vorversuchen gemachten Erfahrungen bedeuten, daß die Ladung desselben zunächst von einem Anfangswerte e_1, bei welchem

$$e_1\,\mathfrak{E} < m\,g$$

war, auf einen nunmehr höheren Betrag e_2

$$e_2 > \frac{m\,g}{\mathfrak{E}}$$

angewachsen war.

Wenn man die Erscheinung der kontinuierlichen Entladung radioaktiver P. K. vom Standpunkte einer Theorie der Elektrizität, welche auch Vorgänge nicht quantenhafter Struktur zuläßt, überdenkt, dann ist sie eine Selbstverständlichkeit.

Dagegen scheint sie auf den ersten Blick der atomistischen Theorie der Elektrizität, welche man für den Transport der Elektrizität im Innern einer Gasmasse erdachte und sodann für alle Naturerscheinungen generalisierte, und die nur Elektrizitätsatome von bestimmter Ladung, etwa $4{,}7 \cdot 10^{-10}$ st. e. E. zuläßt, zu widersprechen, und man muß versuchen, dieses einfache Phänomen der kontinuierlichen Entladung auch aus einem solchen Systeme heraus auszudeuten. Auch wir haben dies natürlich erwogen und die Möglichkeit einer solchen Auffassung durch weitere Erforschung der Tatsachen überprüft. Es scheint aber vorläufig, daß die Erscheinung entweder nur

durch die Vorstellung von Elektrizitätsatomen viel kleinerer Größenanordnung als man bisher angenommen hat, ausgedeutet werden kann oder dadurch, daß man zu den alten Anschauungen wieder zurückkehrt, welche die Elektrizität als Kontinuum auffaßte.[1])

---

1) Wollen wir zu diesem Behufe die Impulse abschätzen, welche durch ausgelöste Elektronen und Ionen im Felde hervorgebracht werden, und die Wirkung, welche die Übertragung dieser Bewegungsgröße auf den P. K. ausmacht, überschlagen.

Denken wir uns etwa, daß der P. K., welcher zwischen den Platten des Kondensators eben steigt, ein α-Partikel in die Vertikale aussendet. Diese löst nach den Modellen über Gasentladungen durch α-Strahlen auf jedem Zentimeter ihrer Bahn n-Ionenpaare aus, welche im elektrostatischen Felde mit den Geschwindigkeiten

$$u^+ = u_0^+ \frac{V}{d}$$

(u_0^+ die Ionenbeweglichkeit der positiven Ionen bei Atmosphärendruck, Zimmertemperatur und einem Felde von 1 Volt/cm, V die an die Platten angelegte Spannung in Volt, d die Distanz der Platten in Zentimeter) bzw.

$$u^- = u_0^- \frac{V}{d}$$

im Felde fortgeführt werden. Wenn die Geschwindigkeit der Ionen größer als ein bestimmter Minimalwert ist, d. h. wenn die Feldstärke V über einen bestimmten Betrag gewachsen ist, tritt erfahrungsgemäß die Auslösung größerer Ladungen auf, die durch Stoßionisation erklärt wird. Die Elektronenionen erreichen Geschwindigkeiten, welche sie befähigen, beim Zusammenstoße mit neutralen Molekülen diese in Ionenpaare zu zerspalten. Die auf solche Art freigemachten Ladungen können bei den hier in Betracht kommenden elektrischen Feldern nur bei entsprechend niedrigem Drucke (von 30 mm Hg abwärts) das mehrfache der ursprünglich erzeugten ausmachen. Bei normalem Druck (bei welchem unsere Beobachtungen vorgenommen wurden) kommt eine Verstärkung der Wirkung eines α-Strahles durch Stoßionisation nicht in Betracht. (H. E. Hurst, Phil. mag. VI, 11. S. 550. 1906.) Die so entstanden gedachten Ladungen beiderlei Sinnes können bei ihrer Bewegung im elektrischen Felde die Stickstoffmoleküle verschieden stark mitreißen und demzufolge einen einseitigen Impuls erzeugen, welcher sich auf den P. K. überträgt und eine Bewegungsänderung desselben erzeugt. Hat der P. K. von den vielen freien Ladungen zwei negative aufgenommen, so muß er, nachdem dieser Impuls zu wirken aufgehört hat, wieder in seinen ursprünglichen Bewegungszustand zurückkehren. Hat er jedoch eine andere Zahl oder keine von den Ionen aufgenommen, so müßte dies wieder in einer ruckweisen Bewegungsänderung des P. K. zum Ausdrucke kommen.

Messung der Ladungsänderungen der radioaktiven P. K.

Es handelt sich also nunmehr darum, einerseits dies Phänomen der kontinuierlichen Entladung des radioaktiven P. K. auch in registrierender Messung zahlenmäßig festzulegen, andererseits zu untersuchen, inwieweit Vorgänge in der Umgebung des P. K. daran beteiligt sein könnten.

Elektrische Ladungen können *nur* an den von ihnen ausgeübten ponderomotorischen Kräften erkannt und ihrer Größe nach nur durch die Messung der von ihnen ausgeübten ponderomotorischen Kräfte bestimmt werden. Diese lassen sich

---

Ein kontinuierliches Übergehen des ursprünglichen Ladungszustandes des P. K. in einen anderen wäre damit also nicht erklärbar. Es läßt sich aber auch auf Grund der bekannten Ionenbeweglichkeiten zeigen, daß die durch die Ionenbewegung freiwerdenden Impulse nicht hinreichen, um den P. K. eine beobachtbare Geschwindigkeitsänderung zu erteilen. Nehmen wir zu diesem Zwecke an, daß die erzeugten Ionen ihre Impulse nicht erst auf dem Umwege über die durch sie gestoßenen Gasmoleküle an dem P. K. abgeben, sondern direkt auf denselben stoßen könnten, dann wird der auf den P. K. übertragene Impuls, der sich auf Grund dieser Annahme errechnen läßt, sicher größer als der tatsächlich übertragene sein, da durch die Diffusion der Stickstoffmoleküle, sowie dadurch, daß nicht all' gestoßenen Stickstoffmoleküle ihre erhaltenen Impulse an den P. K. abgeben, ein wesentlicher Bruchteil von dem errechneten Impulse in Abzug zu bringen wäre. Da die beiden verschieden geladenen Ionenarten auf den P. K. in verschiedenen Richtungen auftreffen, und die von ihnen übertragenen Impulse daher einander entgegenwirken, kommt nur ein Bruchteil des von der Ionenart größeren Impulses übertragenen Impulses zur Geltung. Erfolgt ferner der Flug der α-Partikel nicht genau senkrecht nach oben oder unten, so würde auch dann, wenn keine Diffusion stattfindet, nur ein Bruchteil der erzeugten Ionen, nämlich diejenigen, welche in dem vertikalen Zylinder um den P. K. erzeugt werden, ihre Impulse an den P. K. abgeben. Der tatsächlich übertragene Impuls I wird daher nur ein Bruchteil desjenigen sein, der sich unter der Annahme errechnen läßt, daß sich der P. K. an der einen Platte befindet und einen α-Partikel senkrecht in die Richtung der anderen Platte entsendet. Unter den gemachten Annahmen werden aber $n\,d$-Ionenpaare erzeugt, die bei einer Masse μ (Masse der Stickstoffatome) einen Gesamtimpuls

$$n \cdot \mu \cdot u_0 V \geqslant I,$$

das ist $5{,}6 \cdot 10^{-16} \geqslant I$, übertragen.

Aus der Anmerkung 1) S. 778 geht hervor, daß der errechnete Impuls etwa eine Million mal zu klein ist, um einen P. K. von $3 \cdot 10^{-5}$ cm Radius um eine beobachtbare Strecke zu verschieben.

aber in der Relation (VII) jeweils angeben, wenn die Geschwindigkeit der Bewegung des P. K. gemessen werden kann.[1]) Am zweckmäßigsten wäre es, wenn die Geschwindigkeit des P. K. fortwährend oder vielmehr in möglichst kurzen Zeitabschnitten registriert werden könnte. Eine solche Messung wäre nur durch eine kinematographische Aufnahme ausführbar. Doch haben uns diesbezügliche Versuche gelehrt, daß die P. K. im Dunkelfelde weitaus zu lichtschwach sind, um Spuren auf der photographischen Platte zurückzulassen. Wir sind also zu einem anderen Verfahren übergegangen. Vielfach war die zeitweilige Änderung der Bewegungsgeschwindigkeit des P. K. so gering, daß es genügte, die mittlere Geschwindigkeit über aufeinanderfolgende Wegstrecken zu verfolgen. Zu diesem Behufe wurde ein Okularmikrometer mit acht aufeinanderfolgenden gleichen Partes verwendet. Die Zeiten, in welchen der seine Steiggeschwindigkeit kontinuierlich ändernde P. K. einige der aufeinanderfolgenden Partes des Okularrasters zurücklegte, wurden festgehalten. Unmittelbar darauf wurde die Feldstärke dahin abgeändert, daß der P. K. dieselben Partes fallend durcheilte. Sodann wurde er wieder durch Änderung der Feldstärke in Steigbewegung versetzt usf. Alle so erhaltene Passagezeiten wurden auf Präzisionsstoppuhren mit $^1/_{50}$ Sekunde Angabe, welche elektromagnetisch betätigt werden konnten, registriert.

Versuch VII. Isolationsmessung des Kondensators unter Verwendung eines nichtradioaktiven P. K. als Elektrometer.

Die Ausdeutung der erhaltenen Resultate erfolgte auf Grund der an radioaktiv ungebrauchtem Kondensator vorgefundenen Ergebnissen der Versuche I—V. Um aber rasch zu prüfen, wieweit die Verhältnisse in der Umgebung des P. K. sich durch die radioaktiven Messungen verändert haben könnten, hatten wir zwei Möglichkeiten.

Erstens kann man in einem bereits gebrauchten Kondensator einen nichtradioaktiven P. K. auf Stabilität seiner Ladung untersuchen. Wenn bei öfters für radioaktive Zwecke gebrauchten Kondensatoren Umladungen der nichtradioaktiven

1) Dabei sei eigens betont, daß die Messungen an P. K. vorgenommen wurden, die bereits so groß sind, daß die Reinheit der Erscheinung nicht mehr durch die Brownsche Bewegung gestört wird.

P. K. eintreten, dann ist der Kondensator verseucht und für radioaktive Messungen vorderhand nicht mehr brauchbar.

Zweitens kann man sich von der Brauchbarkeit des Kondensators überzeugen, indem man die Isolation des Kondensators, die bei Verseuchung gestört wäre, unter steter Kontrolle hält.

Solche Kontrollversuche wurden vor und nach der Messung radioaktiver P. K. vorgenommen.

Um die Isolation des Kondensators zu bestimmen, verwenden wir wieder einen nichtradioaktiven P. K. als Elektrometer.

Hierzu ist der Kondensator mit einer Platte an das geerdete Ende der konstanten Spannungsquelle, mit der anderen Platte an das andere Ende derselben angeschlossen. Diese zweite Verbindung kann durch einen elektromagnetisch bedienten Ausschalter (Fig. 15, *M*, *Hg*, *K*, S. 806) besonders guter Isolation gelöst werden.

Wir stellen nunmehr eine Spannungsdifferenz V zwischen den Platten her, bei der ein P. K. stabiler Ladung mit konstanter meßbarer Geschwindigkeit ansteigt. Die Steigzeiten t_s über die Distanzen L werden registriert. Nach (IV) und (VI) erhält man in

$$300\, d\, \frac{m\, g}{e} = \frac{V}{1 + \frac{t_g}{t_s}} = V_\Delta \tag{X}$$

eine für den P. K. charakteristische Konstante.[1]) Man kann daher auch umgekehrt aus einer anderen gemessenen Steigzeit t_i die am Kondensator anliegende Spannung V_i jederzeit zu

$$V_i = V_\Delta \left(1 + \frac{t_g}{t_i}\right) \tag{XI}$$

rechnen. Wird die Spannungsquelle durch den elektromagnetischen Ausschalter abgeschaltet, dann beobachtet man, daß die Steigbewegung des P. K. kontinuierlich immer langsamer wird. Er bleibt schließlich stehen, und geht sodann in immer rascher werdende Fallbewegung über, weil der Kondensator seine Ladung langsam verliert.

Denn es ist erstens ein Kriechstrom I_k zwischen dem

1) Die Kondensatorspannung, bei welcher der P. K. schwebend bleiben würde.

Ebonitgehäuse (vgl. Fig. 16), zweitens eine Entladung nach außen I_a, herrührend von den Zuleitungsdrähten usw. und drittens eine Entladung im Gase I_i zwischen den Kondensatorplatten möglich. Der Gesamtstrom ist demzufolge

$$I = I_k + I_i \text{ [1]} + I_a. \tag{XII}$$

Durch diese Ströme wird dem Kondensator in der Zeit ΔT_i eine Ladung

$$I \Delta T_i = - \Delta E \tag{XIII}$$

zugeführt. Dadurch vermindert sich die Potentialdifferenz V zwischen den beiden Platten um den Betrag

$$- \frac{C}{300} \Delta V = - \Delta E, \tag{XIV}$$

wenn C die Kapazität des Kondensators ist. Gleichsetzung der beiden Ausdrücke gibt unter Berücksichtigung von (XI):

$$- \frac{\Delta V_i}{\Delta T_i} = - \frac{V_\Delta \Delta \left(1 + \frac{t_g}{t_i}\right)}{\Delta T_i} = I \frac{1}{C} 300.$$

Nun zeigt sich, daß der Strom I wie ein Ohmscher Strom zu behandeln ist, daher läßt sich die Gleichung auch in der Form

$$\frac{- \Delta \left(1 + \frac{t_g}{t_i}\right)}{\Delta T_i} V_\Delta = \frac{V_i}{C W} = \frac{V_\Delta \left(1 + \frac{t_g}{t_i}\right)}{C W}$$

darstellen oder

$$\frac{\Delta \left(1 + \frac{t_g}{t_i}\right)}{1 + \frac{t_g}{t_i}} = - \frac{1}{C W} \Delta T_i. \text{ [2]} \tag{XVI}$$

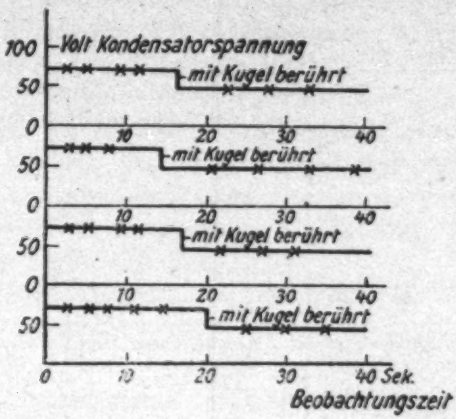
Die daraus folgende Auswertung des logarithmischen Abfalles ergibt bei bekannter Kapazität C[3] den Isolationswiderstand W

1) Aus der Tatsache allein, daß ein P. K. seine Ladung stundenlang behält, läßt sich bereits errechnen, daß der Anteil I_i gegenüber den beiden anderen Anteilen verschwindend klein ist.

2) Für die praktische Rechnung sind die t_i gegeben durch die Stoppzeiten über die aufeinander folgenden Distanzen L. ΔT_i, das ist die Zeit, welche zwischen zwei solchen Messungen verstreicht, gleich t_i. Bei Fallbewegung ist t_i selbstverständlich mit negativem Zeichen einzusetzen.

3) Diese kann errechnet oder durch Zuschalten einer vorher geerdeten Kugel (in unserem Falle von 4 cm Radius) und dem aus der Änderung der Geschwindigkeit des P. K. errechneten Spannungsabfall nach XI experimentell ermittelt werden (vgl. Fig. 6).

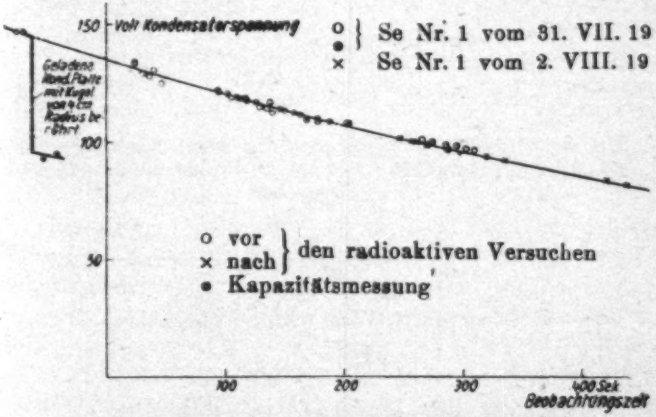
des Kondensators und mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes für jede am Kondensator anliegende Spannung den zugehörigen



Kapazitätsmessungen. Se Nr. 5b vom 22. V. Kondensator *V*.

Fig. 6.

Isolationsstrom *I*. Die Figg. 7 und 8 geben Beispiele des exponentiellen Abfalles der Kondensatorspannung wieder. So

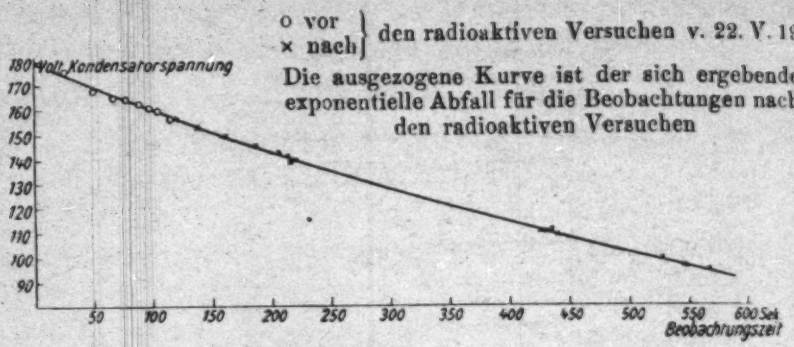


Kondensatorprobe zum Po-Probekörper.

Fig. 7.

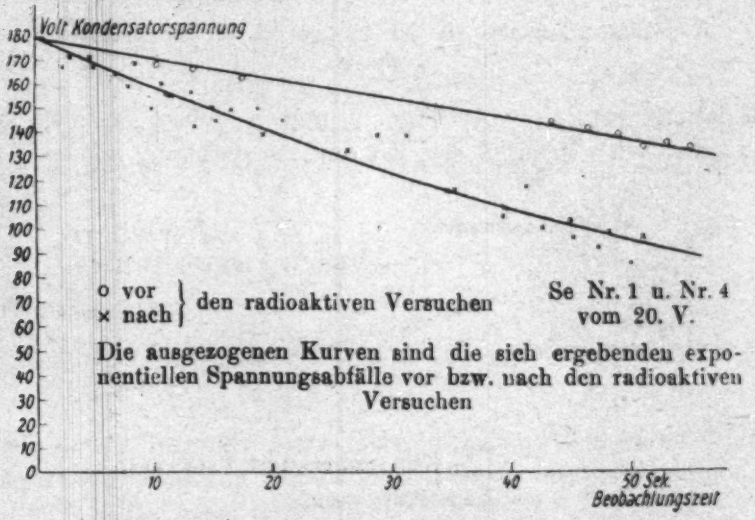
ergibt sich, daß der Kondensator benannt „*V*“ z. B. einen Isolationswiderstand von $1{,}1 \cdot 10^2$ statischen Einheiten vor der radioaktiven Messung und eine Kapazität samt Zuleitung von

etwa 8 cm[1]) aufweist. Nach der radioaktiven Messung ergab die Auswertung den gleichen Isolationswiderstand. Konden-



Kondensatorprobe. Kondensator nicht verseucht.

Fig. 8.



Kondensatorprobe. Verseuchter Kondensator.

Fig. 9.

sator „Z" zeigt vor der Messung des Polonium P. K. von Fig. 14 einen Isolationswiderstand von $6{,}8 \cdot 10^3$ e. st. E. bei

1) Der Rechnung nach wäre eine Kapazität von etwa 6,0 cm zu folgern. Vergl. jedoch F. Harms, Phys. Zeitschr. 5. S. 47. 1904. Da es uns bei diesen Messungen nicht auf den genauen Absolutwert der Isolationsströme ankam, wurde auf derartige Korrekturen keine Rücksicht genommen.

einer Kapazität von 12,5 cm, nach der Messung des Polonium P. K. wieder genau denselben Widerstand.[1])

Um überdies den Kontrast zwischen den verseuchten und unverseuchten Kondensatoren zu illustrieren, ist in Fig. 9 das Beispiel eines verseuchten Kondensators „*F*“ zur Anschauung gebracht. Der Isolationswiderstand vor der Verseuchung beträgt hier $2{,}0 \cdot 10^2$ e. st. E., nach der Verseuchung 0,9 e. st. E., das ist $8 \cdot 10^{13}$ Ohm, also weniger als die Hälfte des ursprünglichen.

Die Isolationsströme bei einer Feldstärke von 1 e. st. E. pro cm betragen für die Kondensatoren „*V*“ und „*Z*“ $1{,}6 \cdot 10^{-3}$ bzw. $0{,}3 \cdot 10^{-3}$ e. st. E. pro Sek.

Für den Kondensator „*F*“ im unverseuchten Zustande $0{,}92 \cdot 10^{-3}$ e. st. E. pro Sek. im verseuchten Zustande $2{,}1 \cdot 10^{-3}$ e. st. E. pro Sek.

Diskussion der Resultate.

In den Figg. 10 bis 14 S. 797 bis 800 sind in möglichst übersichtlicher Weise typische Entladungserscheinungen der

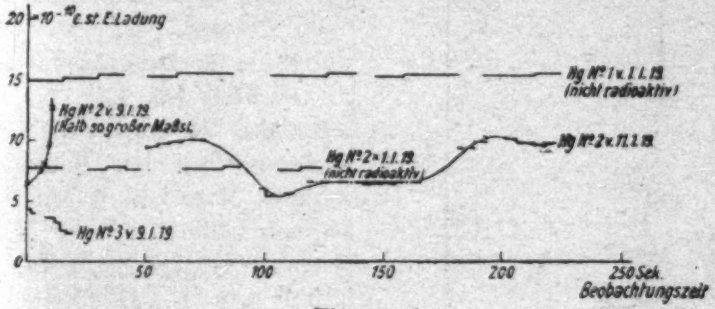


Fig. 10.

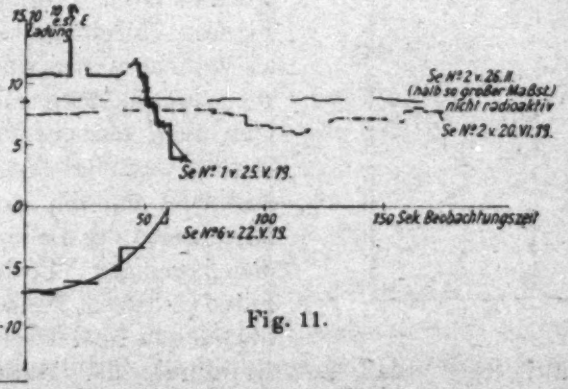


Fig. 11.

1) Der aus den Dimensionen des Kondensators ermittelte Isolationswiderstand ist von gleicher Größenordnung

radioaktiven P. K. dargestellt; sie sind dortselbst mit Testbeobachtungen an nichtradioaktiven P. K. konstanter Ladung zusammen dargestellt, welche in Größe der Ladungen, Dauer der Beobachtungen usw. einander möglichst entsprechen. Was zunächst die nichtradioaktiven P. K. anlangt, so entnimmt man aus ihnen die Tatsache, daß auch an so großen P. K. (Se Nr. 1 v. 15. V. 1919 mit Radius $3{,}4 \cdot 10^{-5}$ cm) Unterschreitungen der sogenannten Elementarladung in direkter Messung zu finden sind. Dichtebestimmungen haben wir zunächst nur an großen P. K. vorgenommen. An diesen ergaben sich aus dem Widerstandsgesetze (vgl. S. 783) durch die Evakuierungsmethode die Dichten 4,6, 4,49, 4,5, 4,4, 4,8, also in reeller Übereinstimmung mit den Dichten des molaren Materiales.[1]) Die zugehörigen Ladungen des P. K. betrugen 8,7, 27,8, 13,7, 15,2 —, $\cdot 10^{-10}$ e. st. E. Den Zeiten als Abszissen sind in vorangeführten Figuren Durchschnittsladungen als Ordinaten zugeordnet; denn wie schon S. 792 erwähnt, kann man nicht einzelne Punkte des zeitlich veränderlichen Ladungszustandes messen, sondern nur Mittelwerte der Ladungen über die jeweiligen Beobachtungszeiten (Steigzeit, Fallzeit). Ganz besonderen Nachdruck möchten wir darauf legen, daß zu der durch die Messung fest-

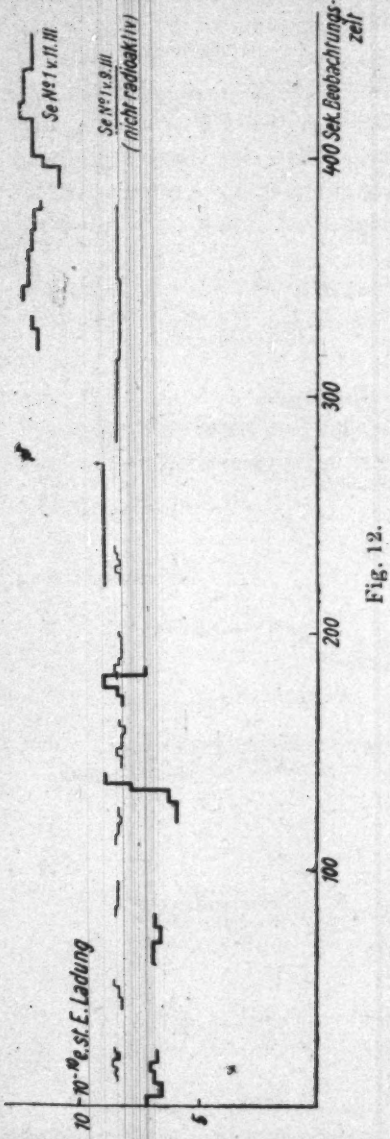


Fig. 12.

1) Vgl. jedoch die Fußnote S. 784.

gehaltenen Aussage noch die qualitative Wahrnehmung der Kontinuität des Vorganges kommt.[1]) Es wären also alle Treppenkurven durch kontinuierliche Kurvenzüge (oder durch Treppen

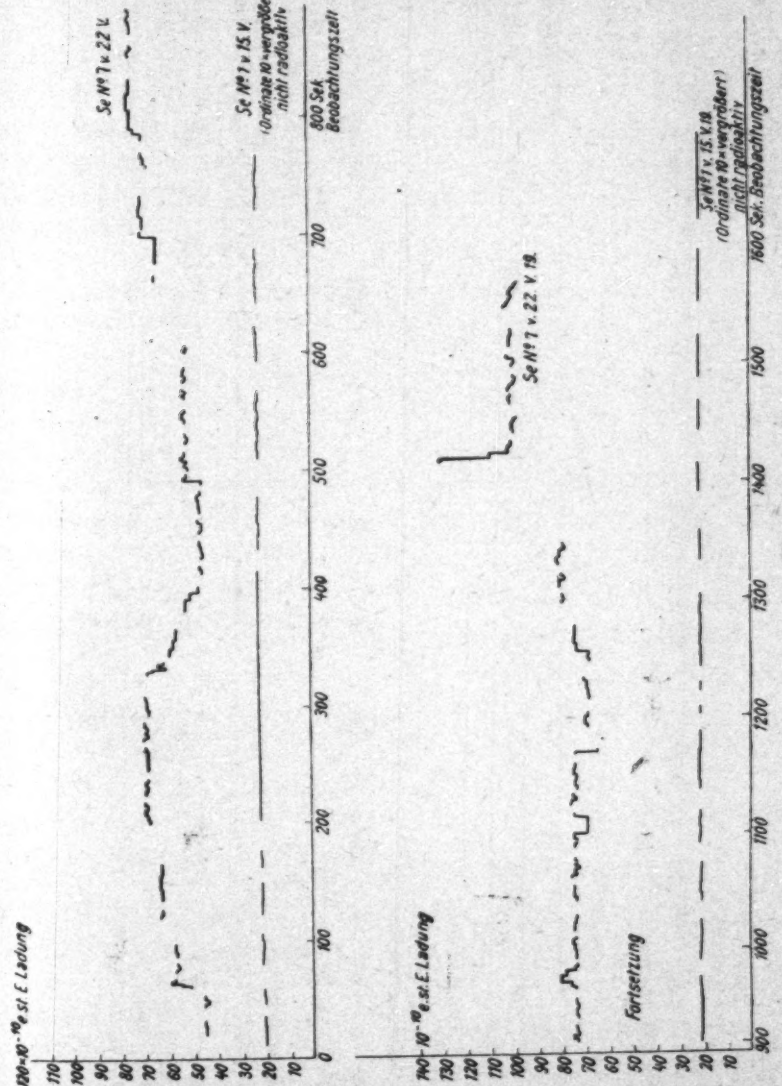


Fig. 13.

engerer Stufe) zu ersetzen; Unterbrechungen in den Kurvenzügen bedeuten Beobachtungspausen. In nachfolgender Tabelle sind überdies die markantesten Resultate jedes P. K. über-

1) Vgl. hierzu S. 792.

sichtlich angeführt. Die Protokolle der Messungen wurden wegen Platzmangel hier nicht zum Abdrucke gebracht.[1])

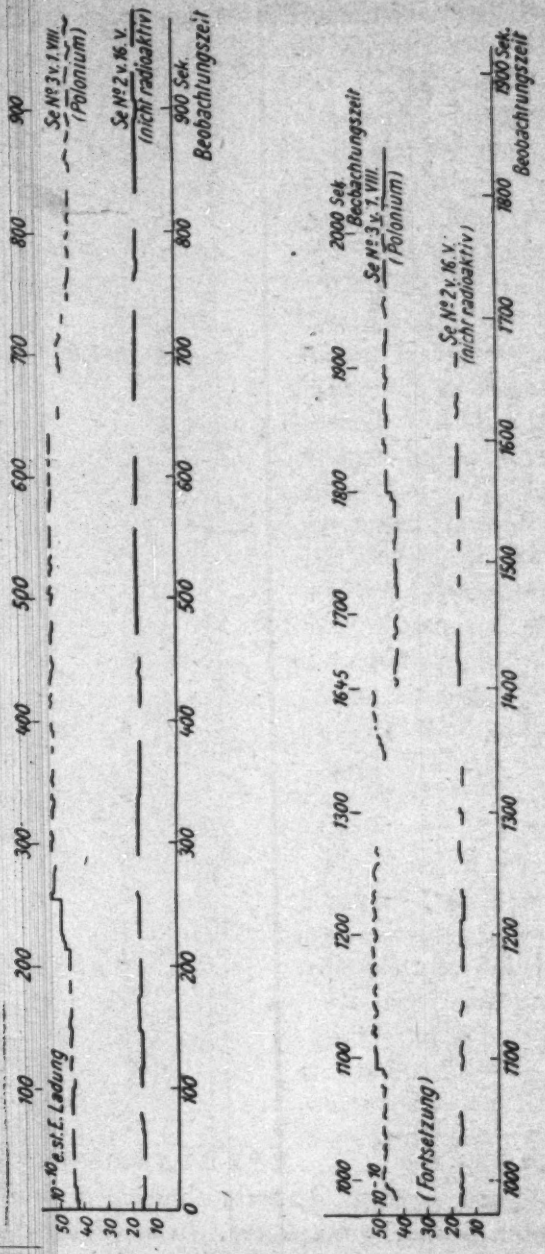


Fig. 14.

1) Wir hoffen dies an anderer Stelle nachzuholen und sind gern bereit, dieselben auf Wunsch Fachgenossen zur Einsicht zu übermitteln.

Bezeichnung der P. K.	Art des P. K.	Gesamtbeobachtungsdauer in Sek.	Kontinuierl. Ladungsveränderung von e. st. E.	Kontinuierl. Ladungsveränderung auf e. st. E.	Zeitdauer dieses Vorganges in Sek.	Zahl der gemessenen Zwischenmittelwertsladungen	Sichtbare Ladungssprünge von e. st. E.	Sichtbare Ladungssprünge auf e. st. E.	Anmerkung
Hg Nr. 1 v. 1. I. 1919	nicht radioaktiv, Test-P. K.	225	—	—	—	Radius $3{,}2 \cdot 10^{-5}$ cm	—	—	Das größte gemeinschaftliche Maß aller an diesem P. K. konstatierten Ladungen zufolge ihres Verhältnisses der Einengung 4 : 5 beträgt $3{,}8 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. Graphisch dargestellt das Vierfache
Hg Nr. 2 v. 1. I. 1919	nicht radioaktiv, Test-P. K.	125 mit Einengung 7200	—	—	—	Radius $3{,}1 \cdot 10^{-5}$ cm	—	—	Das größte gemeinschaftliche Maß aller an diesem P. K. konstatierten Ladungen zufolge ihres Verhältnisses der Einengung 14 : 7 : 43 : 28 : 20 beträgt $0{,}55 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. Graph. dargest. d. Vierf.[1])
Hg Nr. 2 v. 9. I. 1919	durch Emanation induziert	10	+ 13	+ 25	10	5	—	—	Radius $3{,}2 \cdot 10^{-5}$ cm
Hg Nr. 3 v. 9. I. 1919	durch Emanation induziert	20	+ 4,2	+ 2,4	20	6	—	—	Radius $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ cm
Hg Nr. 2 v. 11. I. 1919	durch Emanation induziert	170	+ 9,4 + 10 + 9,3 + 10,2	+ 10 + 9,3 + 10,4 + 9,6	30 30 30 30	4 4 3 3	—	—	Radius $3 \cdot 10^{-5}$ cm
Se Nr. 2 v. 26. II. 1919	nicht radioaktiv, Test-P. K.	170	—	—	—	—	—	—	Ladung $+ 17{,}5 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. Radius $6{,}6 \cdot 10^{-5}$ cm
Se Nr. 1 v. 22. V. 1919	durch Emanation induziert	60	− 7,0	—	60	8	—	—	Hat seine Anfangsladung von $- 7{,}0 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. kontinuierlich verloren. Radius $3{,}8 \cdot 10^{-5}$ cm
Se Nr. 1 v. 25. V. 1919	durch Emanation induziert	70	— + 11,8	— + 3,8	— 23	— 6	+ 10,7 —	+ 15,7 —	Radius $5{,}2 \cdot 10^{-5}$ cm

1) Aber selbst wenn man den Ladungen die Vielfachheiten 2 : 1 : 6 : 4 : 3 zuschreiben wollte, ergäbe sich noch immer eine Grundladung von $3{,}8 \cdot 10^{-10}$ e. st. E.

Bezeichnung der P. K.	Art des P. K.	Gesamtbeobachtungsdauer in Sek.	Kontinuierl. Ladungsveränderung von	auf e. st. E. 10^{10}	Zeitdauer dieses Vorganges in Sek.	Zahl der gemessenen Zwischenmittelwertsladungen	Scheinbare Ladungssprünge von	auf e. st. E. 10^{10}	Anmerkung
Se Nr. 2 v. 20. VI. 1919	durch Emanation induziert	175	+ 7,8	+ 5,9	46	7	—	—	Radius $4{,}8 \cdot 10^{-5}$ cm
Se Nr. 1 v. 9. III. 1919	nicht radioaktiv, Test-P. K.	410	—	—	—	—	—	—	Ladung $+ 8{,}3 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. Radius $4{,}6 \cdot 10^{-5}$ cm
Se Nr. 1 v. 11. III. 1919	durch Emanation induziert	455	+ 5,9	+ 8,9	21	5	—	—	Radius $5{,}0 \cdot 10^{-5}$ cm
			—	—	—	—	+ 9,0	+ 7,2	
			—	—	—	—	+ 8,9	+ 12,3	
			+ 10,7	+ 12,3	30	—	—	—	
Se Nr. 1 v. 15. V. 1919	nicht radioaktiv, Test-P. K.	1800	—	—	—	—	—	—	Ladung $+ 2{,}1 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. Radius $3{,}4 \cdot 10^{-5}$ cm
Se Nr. 7 v. 22. V. 1919	mit Emanation induziert	1550	+ 58	+ 44	70	7	—	—	Bei diesem P. K. sind nur die krassen Ladungsänderungen hier aufgenommen. Außer diesen sind noch kleine u. größere Ladungsschwankg. Radius $9{,}2 \cdot 10^{-5}$ cm
			+130	+100	16	4	—	—	
Se Nr. 2 v. 16. V. 1919	nicht radioaktiv, Test-P. K.	1670	—	—	—	—	—	—	Ladung $+ 15{,}0 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. Radius $6{,}6 \cdot 10^{-5}$ cm
Se Nr. 8 v. 1. VIII. 1919	mit Polonium induziert	2800	+ 44	+ 51	60	5	—	—	*) Der P. K. hat sich wieder in der Zeit von 130 Sek. auf $42 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. entladen
			—	—	—	—	—	—	
			+ 42	+ 47	22	6	—	—*)	**) Der P. K. lud sich wieder auf $51 \cdot 10^{-10}$ e. st. E.; während einer Pause ist die Ladung wieder auf $47 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. gesunken
			—	—	—	—	—	—	
			+ 47	+ 51	30	5	—	—**)	Radius $6{,}4 \cdot 10^{-5}$ cm
			+ 41	+ 45	30	3	—	—	

Resultate.

Durch die Versuche I bis V wurden zunächst die grundlegenden Voraussetzungen der Ladungsbestimmung an einzelnen nicht radioaktiven Probekörpern in Gasen nochmals überprüft. Die sich ergebenden Schlüsse über die Ladungen dieser Probekörper sind vollständig eindeutig und ergeben erneuert die Unterschreitung des sogenannten Elementarquantums der Elektrizität.

Gegen diesen direkten Nachweis der Existenz von kleineren Ladungen als der des Elementarquantums wurden als indirekte Beweise für die Universalität des Quantes bisher eine Anzahl von Erscheinungsgebieten angeführt, welche man derzeit *nur* unter der Voraussetzung eines unteilbaren elementaren Quantes erklären zu können meint. Eines dieser Erscheinungsgebiete, das Gebiet der Radioaktivität, daraufhin zu untersuchen, war der Zweck der vorliegenden Arbeit.

Wir sehen derzeit keine Möglichkeit, die bei diesen Untersuchungen auftretendrn kontinuierlichen Geschwindigkeitsänderungen des P. K. anders als durch kontinuierliche Umladungen desselben zu deuten. Nun scheinen die kontinuierlichen Entladungen radioaktver P. K. nicht nur bei den mit Emanation induzierten, jedenfalls stark α strahlenden P. K., sondern auch bei den P. K. aufzutreten, welche aus Mutter-substanzen stammen, die mit reinem Polonium beschlagen waren.

Bei dem mit Po. induzierten P. K. Se Nr. 3 v. 1. VIII. 1919 wären demnach nur α-Emissionen zu erwarten gewesen.[1])

1) Der P. K. Se Nr. 3 vom 1. VIII. stammte aus einem flachen 0,599 g schweren sensibilisierten Se-Präparate von etwa 1,5 cm² Oberfläche. Das Präparat wies am 14. VIII. eine Gesamtstrahlung von 6,6 e. st. E./Sek. auf; am 1. VIII. daher 7,2 e. st. E./Sek. Nach der Herstellung der P. K. war ein Gewichtsverlust des Präparates durch Verdampfung nicht merkbar; er betrug jedenfalls weniger als 0.001 g. Der Verlust an Aktivität durch Verdampfung des Materiales betrug 5,6 e. st. E./Sek. Das Gewicht des behandelten P. K. Se Nr. 3 vom 1. VIII. beträgt $1 \cdot 10^{-11}$ g; repartiert man die bei der Verdampfung abgegangene Aktivität auf die mit 0,001 g jedenfalls viel zu hoch angesetzte abverdampfte Se-Menge, so müßte man bei obigem Se-P. K. pro 10^3 Sek. wenigstens 0,85 α-Partikelemissionen erwarten. Es ist nun selbstverständlich, daß diese Zahl ihrer Berechnung sowie der Zerfallstheorie nach nur eine Angabe der Größenordnung sein kann.

Im Sinne der vorerwähnten Ausführungen haben wir bei diesem P. K. siebenmal scheinbar kontinuierliches, rascheres oder langsameres Ansteigen bzw. Abfallen der Ladung und nur einmal (nach etwa 1392 Sek.) einen rascheren (sprungweisen?) Ladungsabfall beobachtet. Die Gesamtdauer der deutlich konstatierbaren Ladungsänderungen beträgt 500 Sek., d. i. $^1/_4$ der Gesamtbeobachtungsdauer.

Von diesen Ladungsänderungen kann eine beliebige Anzahl oder auch keiner der Vorgänge auf eine α-Emission zurückgehen.

Da uns keine Vorgänge bekannt wurden, welche eine andere Möglichkeit der Auffassung der kontinuierlichen Geschwindigkeitsänderung der radioaktiven P. K. im elektrischen Felde zulassen, wäre der naheliegendste Schluß der, daß der Vorgang der α-Emission ein wesentlich komplizierterer ist, als man bisher angenommen hat; denn die Ladungsänderung des emittierenden Körpers ginge nicht sprungweise vor sich, sondern relativ langsam in Zeiten bis zu 80 Sekunden. Auch ließe sich diese Gesamtladungsveränderung nicht als Vielfaches des hypothetischen Elementarquantums darstellen.

Für den Fall jedoch, daß man diese *kontinuierlichen Entladungen* nicht auf α-Emissionen zurückführen will, müßte man in der beobachteten Erscheinung einen *neuartigen Effekt* erkennen.

Es wird Frage der nächsten Zukunft sein, zu klären, inwieweit die für das α-Partikel charakteristischen Effekte auch bei den vorliegenden Versuchen auftreten, um Anhaltspunkte für die eine oder die andere Auffassung zu gewinnen.

Zusammenfassung.

1. Die Voraussetzungen zur Ehrenhaftschen Ladungsmessung werden an kleinen Quecksilberteilchen und Selenteilchen erneut überprüft und bestätigt.

2. Es wird eine Methode angegeben, welche die Ladungsänderungen kleiner radioaktiv gemachter P. K. zu messen gestattet.

3. Zur Überprüfung des radioaktiven Zustandes der hierbei verwendeten Kondensatoren wird eine qualitative und eine quantitative Methode (Messung des Isolationswiderstandes des Kondensators) ausgeführt. Als Elektrometer dient hierbei ein

nicht radioaktiver P. K. Auch die Kapazität der Kondensatoren läßt sich auf diese Art ermitteln.

4. Die Messung an nicht radioaktiven P. K. ergeben selbst bei größeren P. K. Ladungswerte, welche den des Elektrons unterschreiten.

5. Neben den zu erwarteten sprungweisen Geschwindigkeitsänderungen der im elektrostatischen Felde gehaltenen P. K. zeigen sich auch kontinuierliche, deren Zustandekommen sich im Bilde der Elektronentheorie scheinbar nicht erklären läßt. Die einzige mögliche Ausdeutung der beobachteten Erscheinung scheint zunächst die zu sein, als ob der P. K. seinen Ladungszustand kontinuierlich d. h. nach kleinen Bruchteilen der Elementarladung ändern würde.

6. Die kontinuierlichen Umladungserscheinungen scheinen auch bei rein α-strahlenden P. K. aufzutreten.

Wien, Universität Dezember 1919.

Anhang.

Darstellung der Anordnung.

Die Anordnung ist in ihren wesentlichen Teilen bereits in den Ann. d. Phys. **56.** 1918. S. 84 ff. beschrieben worden. Für vorliegende Messungen traten Strahlenfilter von Eisenalaunlösungen (0,5 Proz. Eisengehalt) Schichtdicke 4,5 cm in Verwendung. Die Lösung wurde durch Ansäuern vollkommen klar erhalten. Es standen stets beide Bogenlampen zur Verfügung. Als Beleuchtungsobjektiv wurde zeitweilig ein Zeißsches Objektiv 25 mm Brennweite verwendet. Als Beobachtungsobjektiv *AA* mit Okular 1. Die Beschreibung des für derartige radioaktive Messungen zweckmäßigen Universalsupportes, Type 1919, sowie der evakuierbaren Beobachtungskammer mit eingebautem Ringschnittkondensator, Type 1919, folgt auf S. 808 bzw. S. 809, 810.

Schaltungsskizze (vgl. Fig. 15).

Der P. K. mußte stets unter Spannung gehalten werden, daher wurde der Schaltung das nachfolgende Prinzip zugrundegelegt. Zu einer andauernd am geeichten Präzisions-Westonvoltmeter mit vier Spannungsbereichen kontrollierten variablen Spannung (Potentiometerschaltung, Spannungsquelle 440 Volt

oder Hausakkumulatoren 180 Volt (Wippe W_1, Grob- und Feinregulierwiderstand R_1 und R_2, Weston-Voltmeter) konnten drei verschiedene Stufen konstanter Spannung zugeschaltet werden (Hebelumschalter H, Akkumulatoren S).

Der Umschalter H war den Zellenschaltern der Elektrizitätswerke nachgebildet, so daß jederzeit Spannung an den

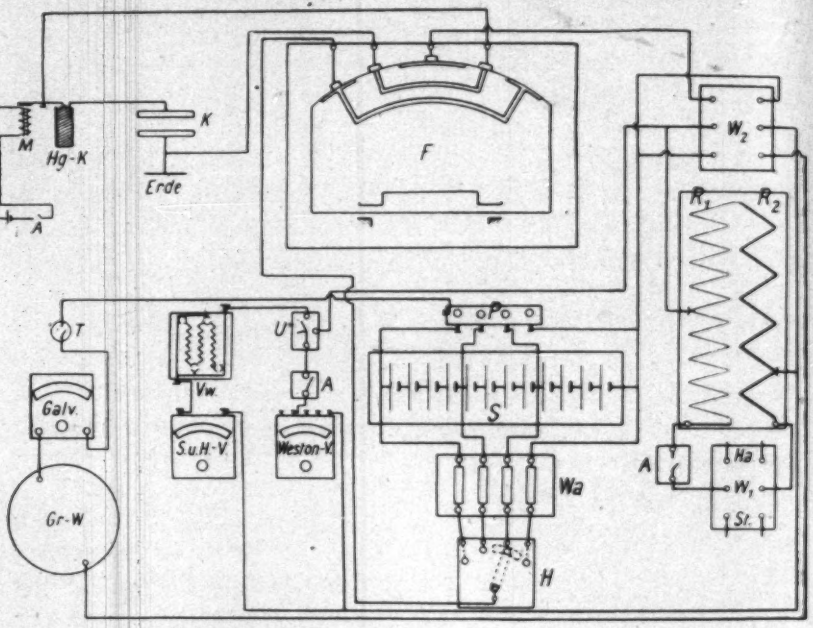


Fig. 15.

beiden Kondensatorplatten (Wasserwiderstände W_a, Fußumschalter F) lag.

Die Stufenspannung wurde vor und nach jeder Messung durch eine Kompensationsschaltung (Wippe W_2, Graphitwiderstand $Gr.$-$W.$, S u. H-Galvanometer mit 10^{-6} Ampere Empfindlichkeit, Taster T, S und H Voltmeter samt Stufenvorschaltwiderstand V_w mit drei Bereichen) ausgemessen.

Die Stufenspannung blieb durch Tage vollkommen konstant.

Zum Kommutieren der Spannung diente der Fußumschalter; zum Abschalten für Isolations- und Kapazitätsmessungen der elektromagnetische Ausschalter (Bernstein-Isolationen) M, $Hg - K$.

Gasreinigung.

Der Stickstoff aus einer Bombe wurde über nachfolgenden Reinigungsweg geleitet. 60 cm langes Glasrohr mit gekörntem $CaCl_2$, Turm mit Glaswolle und gekörntem CaO 22 cm hoch, über eine Schlangenflasche, gefüllt mit konzentrierter H_2SO_4, Rohr 14 cm lang mit fester KOH, elektrischer Ofen bestehend aus 2 je 30 cm langen mit dünnen Cu-Drahtnetzen gefüllten Kaliglasröhren, Schlangenflasche mit konzentrierter H_2SO_4, Rohr gefüllt mit 20 cm KOH, sodann Glaswolle und 20 cm $CaCl_2$, 40 cm langes Rohr mit P_2O_5 in Asbestwolle, 10 cm hohes Durchströmegefäß mit Glaswolle, Rührgefäß mit P_2O_5. Hinter dem Kondensator nochmals P_2O_5 und H_2SO_4.

Die ganze Leitung ist Glas in Glas, vakuumdicht mit eingeriebenen Glasstöpseln und vor den P_2O_5-Gefäßen ab, welche selbst nach einjährigem Gebrauche vollkommen intakt sind, zusammengeschmolzen. Vor jeder H_2SO_4-Flasche befindet sich eine Rückschlagflasche.

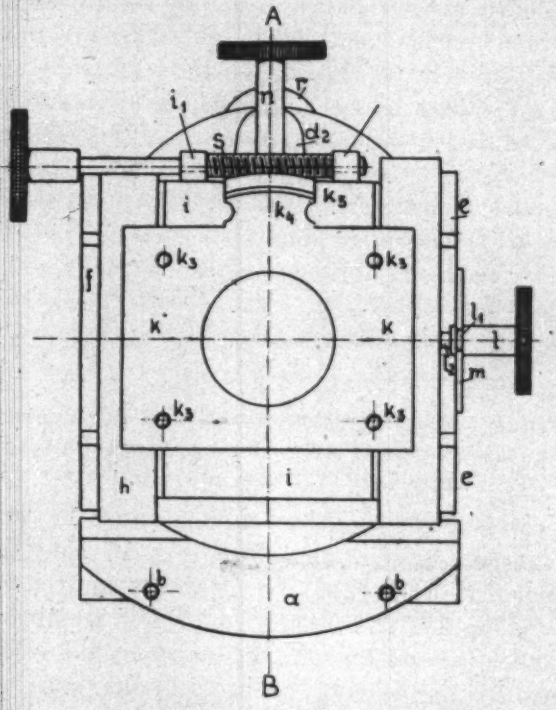
Beschreibung des Universalsupportes und der evakuierbaren Beobachtungskammer mit eingebautem Ringschnittkondensator Type 1919 (vgl. Fig. 16, 17 u. 18).

Der Universalsupport ist in den Figg. 16 bis 18 dargestellt.[1]) Fig. 16 zeigt eine Ansicht desselben, Fig. 17 einen lotrechten Schnitt nach *A B* der Fig. 16, Fig. 18 einen wagrechten Schnitt nach *C D* der Fig. 17. In beiden Figg. 17 u. 18 ist überdies nebst dem in Ansicht gezeichneten Beobachtungsmikroskope auch die im Schnitte dargestellte Beobachtungskammer mit eingesetztem Kondensator (Type 1919) hinzugefügt.

Der Support ist an Stelle des normalen Beobachtungstisches auf dem bekannten Stative des Zeißmikroskopes befestigt. Zu diesem Behufe wird die segmentförmige Grundplatte *a* mittels zweier Schrauben *b* an dem vorgenannten Stative angeschraubt. Die Grundplatte *a* trägt zwei federnde Lamellen *c*, an welche die lotrechte Tragplatte *d* mittels der Schrauben d_1 festgeschraubt ist. Diese Platte *d* besitzt zwei Führungslineale *e*, zwischen welchen das Prisma *f* des die Horizontaleinstellung ermöglichenden Rahmens *g* verschiebbar angeordnet ist. Dieser Rahmen *g* trägt seinerseits zwei lot-

1) Die Figuren sind im Maßstabe 2 : 3 verkleinert.

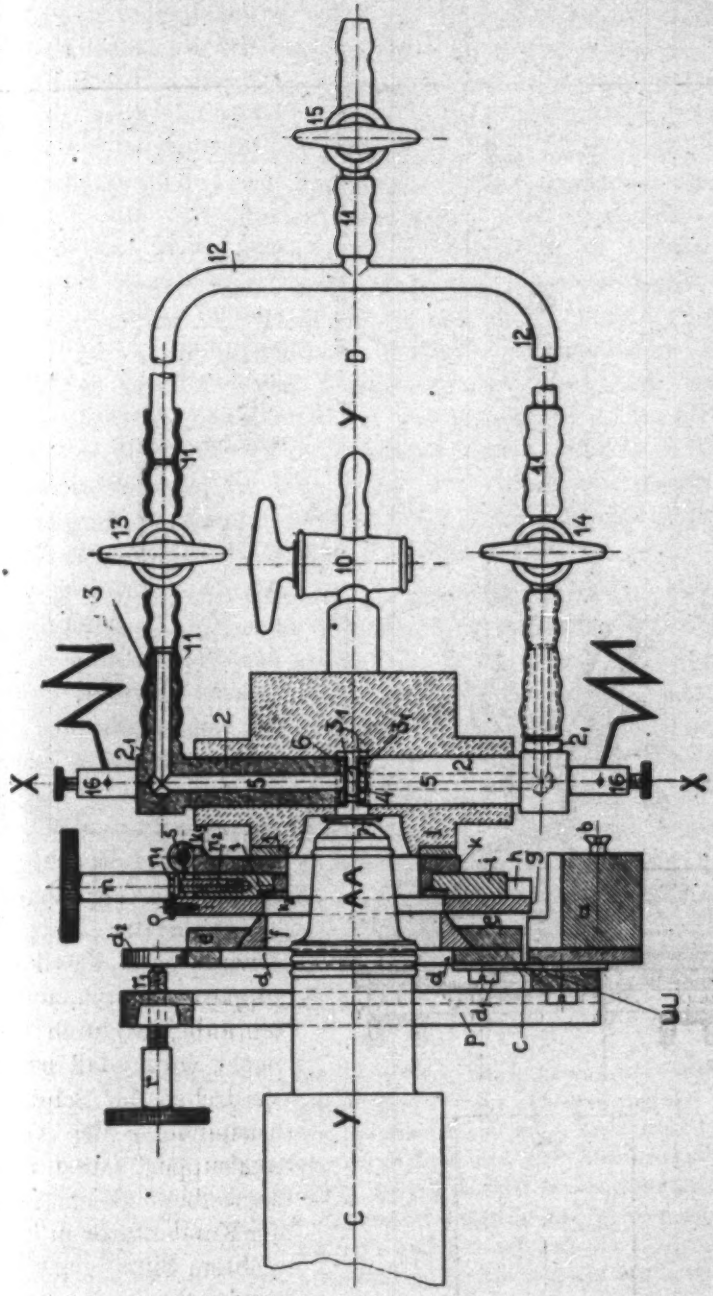
rechte Lineale h, zwischen welchen der die lotrechte Einstellung ermöglichende Vertikalsupport i verschiebbar ist. Auf diesem letzteren ist die Beobachtungskammer mit eingebautem Vertikalkondensator tragende kreisförmig durchlochte Tragplatte k verdrehbar angeordnet und vermittelst ihres den kreisförmigen gelochten Support i durchsetzenden Halsringes k_1



Ansicht des Universalsupportes.
Fig. 16.

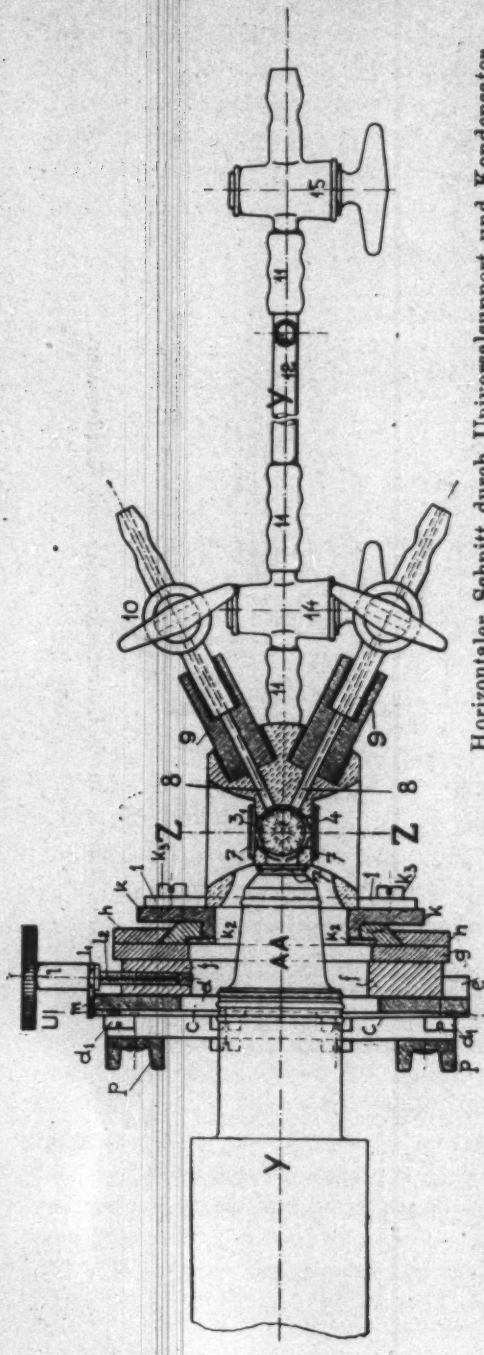
und der an derselben festgeschraubten Gegenplatte k_2 in ihrer Lage festgehalten. Auf der vorgenannten Tragplatte k ist mittels vier Schrauben k_3 die später beschriebene Beobachtungskammer mit eingebautem Ehrenhaftschen Kondensator Type 1919 befestigt; die eingangs genannten vier Bewegungsgrade des Kondensators werden mittels der vorgenannten Teile des Supportes durh die folgend beschriebenen Einrichtungen ermöglicht.

1. *Wagrechte Verschiebung des Kondensators.* Die Tragplatte d trägt die Einstellschraube l, deren Spindel bei l_1 eine Ringnut



Vertikaler Schnitt durch Universalsupport und Kondensator.

Fig. 17.



Horizontaler Schnitt durch Universalsupport und Kondensator.
Fig. 18.

besitzt, in welche eine gegabelte, auf der Platte d fixierte Gabelhalse m eingreift. Die Schraubenspindel l_2 ist in das Muttergewinde des Prismas f eingeschraubt, so daß, wie aus Fig. 18 ersichtlich, mittels des Verdrehens der Einstellspindel l der Horizontalsupport f und damit auch der Kondensator wagrecht verschoben wird.

2. *Lotrechte Verschiebung.* Die gleiche wie eben beschriebene Anordnung besitzt, wie aus Fig. 17 ersichtlich, der Vertikalsupport i. Diesem Zwecke dient die Einstellschraube n, welche in ihrer Lage durch den in die Ringnut n_1 einragenden Gabelbügel o festgehalten ist. Der Gewindeteil n_2 ist in das Muttergewinde des Vertikalsupportes i eingeschraubt, wodurch erreicht wird, daß beim Verdrehen der Schraubenspindel n der Vertikalsupport i und mit demselben gleichzeitig der Kondensator in lotrechtem Sinne verstellt werden kann.

3. *Verschwenkung des Kondensators um eine unterhalb der optischen Achse des Mikroskopes liegenden Horizontale.* Die mittels der beiden Federlamellen c an der Grundplatte a verschwenkbar angeordnete Tragplatte d federt gegen die in den hufeisenförmigen Bügel p eingesetzte Stellschraube r (vgl. Fig. 17) und legt sich mit ihrem Lappen d_2 unter einer gewissen Spannung an den aus der Platte p hervorragenden Gewindeteil r_1 dieser Schraube an. Der Bügel p ist seinerseits mit der Grundplatte a festverschraubt. Man erkennt hieraus ohne weiteres, daß durch Verstellung der Einstellschraube r ein Verschwenken der Tragplatte d und damit auch gleichzeitig des mit dieser gemeinsam bewegten Kondensators hervorgebracht wird. Diese Verschwenkung ermöglicht das Verschwenken der Längsachse XX des Kondensators um die durch die Wurzellinie der Federlamellen c gehende ideelle Achse UU zu dem Zwecke, die Längsachse XX des Kondensators senkrecht auf die durch das Mittel des Beobachtungsmikroskopes verlaufende optische Achse YY einzustellen.[1])

4. *Verdrehung um die optische Achse des Beobachtungsmikroskopes.* Die den Kondensator tragende, im Vertikalsupport i verdrehbar angeordnete Tragplatte k besitzt, wie Figg. 16 u. 17 zeigen, einen Ansatz k_4. Dieser Ansatz bildet nach obenhin ein Schneckenradsegment k_5, in welches eine Schneckenspindel s eingreift, die zwischen den beiden am Vertikalsupport i befestigten Traglappen i_1 gelagert ist. Wie Fig. 16 ohne weiteres erkennen läßt, bewirkt die Verstellung der Schneckenspindel s eine Verdrehung der Tragplatte k bzw. der auf derselben niedergeschraubten Beobachtungskammer nebst Kondensator.

Die vorstehend beschriebenen vier Bewegungsgrade machen es möglich (vgl. Figg. 17 u. 18), daß der zu beobachtende Probe-

1) Die in Ausführung begriffene Neukonstruktion erzielt die Senkrechtstellung vorteilhafter durch reine Verdrehung der Längsachse XX des Kondensators um die Achse ZZ. Dies wird erreicht, indem an Stelle der Lamellenfedern c und der die Beobachtungskammer tragenden Platte d ein diese Kammer tragender seitlich derselben an der Grundplatte a fixierten Tragring angeordnet ist, dessen Mittelpunkt in der Achse ZZ liegt und um welchen die Beobachtungskammer samt den in der dargestellten Ausführung auf der Tragplatte d aufmontierten Vorrichtungen zentrisch verdrehbar gemacht sind.

körper in den Schnittpunkt der drei aufeinander senkrecht stehenden Achsen *XX*, *YY*, *ZZ*, das ist der Achse *XX* des Kondensators, der Achse *YY* des Mikroskopes und der Achse *ZZ* der zwei einander entgegengerichteten Lichtkegel gebracht wird und hierdurch eine lotrechte Bewegungsbahn erlangt, die in Richtung der Achse *XX* verläuft und senkrecht zu den ebenen Polflächen des Kondensators steht.

Evakuierbare Beobachtungskammer mit eingebautem Ringschnittkondensator Type 1919.

Die Beobachtungskammer besteht in der Hauptsache aus einem mehrfach durchbohrten Hartgummiblock, der mittels zweier in seine Basisfläche eingelassener Metallpratzen *1* durch die vier Schrauben k_3 auf der Tragplatte *k* des Supportes festgehalten ist und somit alle Bewegungen dieser Platte mitmacht. Der Hargummiblock ist lotrecht durchbohrt und in dieser Bohrung sind zwei Metallzylinder *2* von oben und unten her gasdicht eingesetzt, derart, daß sich deren der Mitte zugekehrte kreisförmige Stirnflächen mit einem Abstand von 2 bis 3 mm einander gegenüberstehen. Diese Stirnflächen sind genauest eben geschliffen, aus Gold und bilden den eigentlichen Kondensator. An die Metallzylinder *2* schließen wagrecht abgehende Zapfen *3* an. Die Zapfen *3* sind durchbohrt. Die Bohrungen reichen durch die Metallzylinder bis knapp an deren Stirnflächen, woselbst je eine Ringnute 3_1 angeordnet ist, die mittels radialer Bohrungen *4* mit der zentralen Bohrung *5* verbunden ist. Der im Mittel des Hartgummiblockes gebildete Hohlraum *6*, in welchen die Metallzylinder *2* hineinragen, ist durch drei gasdicht aufgekittete planparallele Deckgläser *7* völlig abgeschlossen. In den Hohlraum *6* münden noch zwei Bohrungen *8* (Fig. 18), an welche nach außen hin die mittels je eines durchbohrten Zapfens *9* gasdicht eingesetzten Glashähne *10* anschließen. In gleicher Weise sind an die Bohrungen *5* Glas an Glas mittels gasdichter Gummistutzen *11* und der Verbindungsrohre *12*, die als Glasfedern ausgebildet sind (in Fig. 16 der Einfachheit halber weggelassen), drei Glashähne *13*, *14* und *15* angeschlossen. Auf den Metallzylindern *2* sitzen Kontaktklammern *16*, welche die Verbindung mit der Spannungsquelle herstellen.

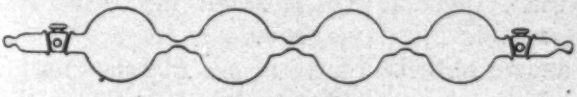
Die Einbringung der Probekörper wird durch die Bohrungen *8* bewerkstelligt. Zu diesem Behufe werden die Hähne *10*

geöffnet und der die P. K. enthaltende Gasstrom durch die abgeschlossene Kondensatorkammer hindurchgeleitet, worauf die Hähne *10* wieder geschlossen werden. Die Evakuation der Kondensatorkammer erfolgt durch die Bohrungen *5* unter entsprechender Einstellung der Hähne *13*, *14* und *15* über die Leitungen *12*, durch entsprechende Sätze von Kapillarröhren bzw. schließlich durch eine direkte Verbindung mit dem Manometervakuum. Die Ringnuten 3_1 in Verbindung mit den sternförmig angeordneten radialen Bohrungen *4* ermöglichen dank ihrer kreissymmetrischen Aufteilung, daß die Evakuation und die Gasbewegungen unter möglichster Vermeidung von einseitigen Strömungen durchgeführt werden können. Die Lichtkegel der beiden Beleuchtungsquellen fallen durch die beiden in der *ZZ*-Achse angeordneten Deckgläschen — in die Kondensatorkammer, die Beobachtung mittels des Mikroskopes *AA* erfolgt durch das in *YY*-Achse sitzende Deckgläschen hindurch (vgl. hierzu Fig. 18).

Herstellung der radioaktiven Präparate.

I. Emanation.

Vier Kugelröhrchen von etwa je 4 cm³ Inhalt, Fig. 19, wurden aneinander geschmolzen, jedes mit etwa $^1/_{10}$ Volumen nicht aktiver Substanz (Hg oder Se Merkscher Präparat



Kugelgefäße.
Fig. 19.

absolut rein) beschickt und an den Enden Hähne angeschmolzen, sodann wurde das Rohr ausgepumpt und mit Radiumemanation gefüllt. Die Röhrchen wurden sodann einzeln abgeschmolzen und auf einem Schüttelapparat mehrere Stunden in Rotation versetzt. Vor dem Gebrauche der Substanz wurde die Emanation ins Freie geblasen, die Substanz in ein neues ungebrauchtes Kugelröhrchen gefüllt, wobei die Substanz leicht durch die Bunsenflamme erwärmt wurde. Alle diese Operationen wurden in separierten Räumen ausgeführt, alle Abgase ins Freie geführt.

II. Polonium.

Zunächst wurde aus einer gesättigten aktiven Bleinitratlösung ein Poloniumniederschlag auf einer Goldkathode von etwa 16 cm^2 einseitiger Oberfläche niedergeschlagen, wobei die Stromdichte unter $4{,}10^{-6}$ Ampere/cm^2 gehalten wurde, der auf dem Goldblech befindliche Poloniumniederschlag wurde in einer verdünnten HCl-Lösung über dem Wasserbade abgelöst. Aus der so erhaltenen Poloniumlösung wurde das Polonium elektrolytisch auf sensibilisierte Selenelektroden[1]) niedergeschlagen. Die Stärke der Poloniumniederschläge wurde jeweils auf α-Strahlung gemessen. Die Kontrolle auf β-Strahlung ergab negatives Resultat.

Die abgewogenen Präparate wurden in die bereits beschriebenen Kugelröhrchen gebracht, und nach der Verdampfung zurückgewogen. Aus der Gewichtsdifferenz ließ sich unter der Annahme, daß die Poloniumschichte die oberste, daher zuerst verdampfende Schichte des Se-Präparates darstellt, ein Überschlag der zu erwartenden α-Strahlung berechnen (vgl. S. 803).

Einführung der radioaktiven P. K. in den Kondensator.

Der Kugelballon von etwa 12 cm Durchmesser (Fig. 4) hatte im eingeriebenen Glasstoppel drei Zuführungsröhren, von welchen die erste seitliche bis etwa in die Mitte des Kugelrohres reichte. Die mittlere wurde durch einen Gummischlauch Glas an Glas, Gas und vakuumdicht mit dem oberen Hahn des Kondensators Fig. 5 verbunden.

Die andere seitliche führte in die Abgasleitung. Mitunter wurde auch die obere Zuführung an Stelle der seitlichen verwendet. Ein im Prinzip gleichartiges, im Volumen etwa 10mal größeres Vorratsgefäß wurde für die Versuche mit seitlichem Einlaß der P. K. in den Kondensator verwendet.

Mikrophotographien von Probekörpern.

Hg-P. K. wurden bereits von F. Ehrenhaft (vgl. Wiener Ber. 1914, Die Quanten der Elektrizität; Phys. Zeitschr. 1915, Über kleinste Kugeln etc.) publiziert. Bezüglich Mikrophotographien von Se-P. K. vgl. Tafel III. Wir bemerken hierzu ferner:

1) Für die Sensibilisierung der Se-Präparate danken wir Herrn H. Thirring herzlichst.

Mikrophotographien von Se-P. K.

Die Selen-P. K. wurden auf Objektträgern niedergeschlagen, dabei ist zu achten, daß die Präparate vollkommen trocken bleiben, sie wurden sodann in eingedicktes Zedernöl eingebettet und mit Zeiß Apochromat Apert. 1,30, homogene Immersion aufgelöst und mikrophotographiert. Ein pars des mitphotographierten Okularmaßstabes beträgt $2 \cdot 10^{-4}$ cm. Vorbezeichnetes Objektivsystem zeichnet bekanntlich unter diesen Umständen nicht überall scharf. Im vorliegenden Falle ist die scharfe Zeichnung im Kreisringe etwa zwischen Null und 10 und daher auch zwischen 40 und 50 des Okularmaßstabes. Zur Anfertigung von Photographien von Selen-P. K. ist die Verwendung von Tageslicht zu empfehlen. Die größeren unter ihnen zeigten schöne selenrote Farbe. Bei allen war kompakte Struktur und vollkommene Kugelform ersichtlich.

(Eingegangen 27. Februar 1920.)

2. *Beiträge zur Kenntnis der Oberflächenschichten auf Metallen;*
von Hans Hauschild.

Inhalt: 1. Einleitung. — I. Teil. Versuchsanordnung. 2. Die optische Einrichtung. 3. Der Vakuumapparat. 4. Der Analysator. 5. Der Sénarmont-Glimmerkompensator. 6. Berechnung von ψ, Δ. — II. Teil. Theorie der Oberflächenschichten auf Metallen. 7. Strenge Formeln für Reflexion und Brechung an schichtfreien Trennungsflächen. 8. Einteilung der Oberflächenschichten. 9. Reflexionsgesetz für Spiegel mit einer homogenen Schicht von endlicher Dicke. 10. Reihenentwicklung für dünne Schichten. 11. Die Größe des zweiten Näherungsgliedes und die beobachteten Schichtstärken. — III. Teil. Beobachtungen. 12. Die Veränderungen der Kurven $\psi(\varphi)$, $\Delta(\varphi)$ durch Schichten. 13. Beobachtungen an Stahlspiegeln. 14. Bestimmung der optischen Konstanten des Nickels durch Veränderung der Schichtdicke. 15. Die Kurve $\psi(\Delta)$ bei konstantem Einfallswinkel und veränderlicher Schichtdicke. 16. Beobachtungen an Silberspiegeln. 17. Künstliche Schichten. 18. Über die Bestimmung der optischen Konstanten des schichtfreien Metalles bei unveränderter Schicht. — 19. Ergebnisse.

1. *Einleitung.* Die folgenden Ausführungen sollen den Inhalt der unter dem gleichen Titel eingereichten Doktordissertation des Verfassers in kurzen Zügen wiedergeben. Die Grundlage der zum großen Teile theoretischen Untersuchungen bilden Versuche, die in den Jahren 1912—14 im Physikalischen Institut der Universität Leipzig ausgeführt wurden und die das dreifache Ziel hatten: a) den Einfluß festzustellen, den Oberflächenschichten von Metallspiegeln auf den Polarisationszustand des reflektierten Lichtes ausüben, b) die Entstehungsbedingungen solcher Schichten zu erforschen, c) die optischen Konstanten der reinen, schichtfreien Metallen aus mehreren Messungen auch bei Anwesenheit von unbekannten Schichten zu ermitteln. — Die Arbeit geht im ersten Teil auf die Versuchsanordnung ein, besonders auf die Interferenzerscheinungen in einer Verbindung der Savartschen Platte mit dem Glimmerkompensator. Im zweiten Teil wird die Theorie der Oberflächenschichten aus den

Fresnelschen Reflexionsformeln abgeleitet unter Berücksichtigung der wiederholten Reflexionen der in die Schicht eindringenden Lichtstrahlen. Der dritte Teil enthält experimentelle Bestätigungen, die allerdings infolge des Kriegsausbruches keinen Abschluß erhalten haben.

Erster Teil.

Versuchsanordnung.

2. *Die optische Einrichtung.* Die benutzte Apparatur bestand wesentlich aus einer Quarzquecksilberlampe L (Fig. 1), einem

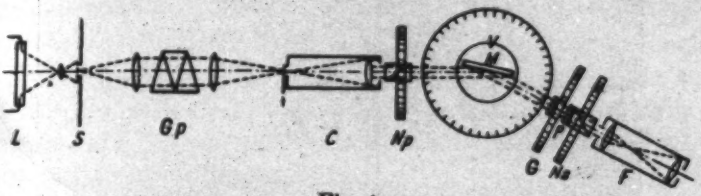


Fig. 1.

Polarisationsspektrometer, sowie einem Gefäß V an Stelle des Spektrometertischchens, das zur Beobachtung der Spiegel im Vakuum oder in einer beliebigen Atmosphäre diente. Der durch den Spalt S — von 0,2—1,5 mm Weite — tretende Lichtstrahl wird in dem Geradsichtprisma Gp spektral zerlegt; gewöhnlich wurde die lichtstarke, grüne Linie 5461 Å.-E. benutzt. Nach Durchgang durch den Collimator C und den polarisierenden Nicol Np gelangt linear polarisiertes Licht in Parallelstrahlen auf den Spiegel M. Die Neigung der Polarisationsebene gegen die Einfallsebene betrug: $\pm 45°$. Das nach der Reflexion elliptisch polarisierte Licht durchsetzt den Sénarmont-Kompensator G, eine $^1/_4$ λ-Glimmerplatte, und gelangt durch die Savartsche Platte P und den analysierenden Nicol Na in das Beobachtungsfernrohr F.

3. *Der Vakuumraum.* Der Metallspiegel befand sich, nach allen Seiten drehbar, in einem Bronzegefäß V (Fig. 1), dessen Sockel A (Fig. 2) mit drei Beinen auf der Marmorplatte des Spektrometers verschraubt war, so daß die Achse des Gefäßes B an die Stelle der senkrechten Achse des hierbei fortgefallenen Spektrometertischchens trat. Das Licht fällt durch ein feststehendes Fenster G_1 in den Vakuumraum und verläßt diesen nach der Spiegelung durch das entsprechend der Stellung des

Spiegels um die senkrechte Achse drehbare Fenster G_2; dieses ist mit dem inneren Teil C fest verbunden, der von oben in B eingesetzt und konisch drehbar eingeschliffen ist. Das Fenster

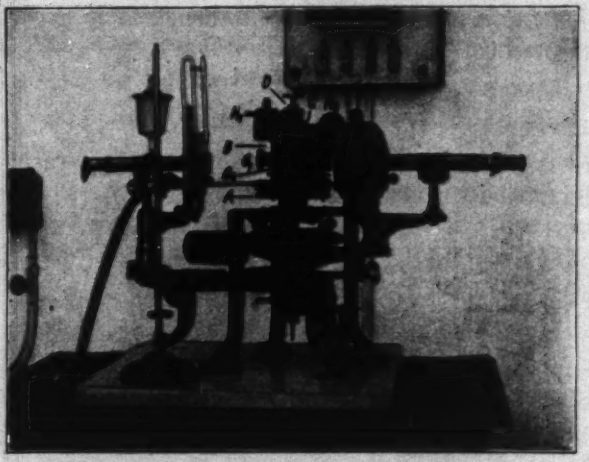


Fig. 2.

ragt durch einen Schlitz von B. In C wieder ist der Spiegelhalter D konisch eingeschliffen und frei drehbar gegen C. Die Teile des Spiegelhalters sind aus Fig. 3 ersichtlich. Die Justie-

Fig. 3.

rung des Spektrometers erfolgt zum Teil nach Abnahme der die Fenster verschließenden Glasplatten mittels Schlüssel durch eine der Fensteröffnungen. Bei evakuiertem Gefäß sind

Drehungen von C und D nur mit Hilfe der Schrauben H_1, H_2 (Fig. 2) möglich. Der Einfallswinkel wird in der üblichen Weise aus der Drehung des beweglichen Spektrometerarmes am Horizontalkreis abgelesen.

4. *Der Analysator.* Entgegen der ursprünglichen Konstruktion[1]) wurde die Savartsche Platte gegenüber dem Nicolschen Prisma auch nach Justierung des Spektrometers beweglich gemacht, damit das Helligkeitsminimum, für welches die Streifen verschwinden, der Empfindlichkeit des Auges, der Helligkeit der Lichtquelle und der reflektierten Lichtmenge angepaßt werden konnte. Eine Berechnung im Anschluß an I. Müller[2]) und Chr. Langberg[3]) ergab, daß im Augenblick des Verschwindens der bekannten Streifen eine zweite Schar auftritt, die um 45° gegen die erste geneigt ist, falls die Hauptschnitte der beiden Kristalle der Savartschen Doppelplatte nicht streng rechtwinklig gekreuzt sind. Dieser Umstand wurde zu einer Verfeinerung der Einstellungsmethode benutzt, da die zweiten Streifen nach geeigneter Wahl des Schattenwinkels (des Winkels zwischen der Polarisationsebene des analysierenden Nicols und dem Hauptschnitt des ersten oder zweiten Kristalles der Savartschen Platte) fast plötzlich bei vollständiger Kompensation der Elliptizität des Lichtes auftreten. Die gewöhnlichen Streifen verschwinden nur, wenn sowohl die Elliptizität des Lichtes aufgehoben ist, als auch die Polarisationsebenen des analysierenden Nicols und des linear gemachten Lichtes rechtwinklig zueinander sind. Aus der Stellung (β) des Analysators ist daher die Lage der Polarisationsebene des nach Durchgang durch den Kompensator wieder linearen Lichtes zu bestimmen. Die Einstellung geschieht am besten durch gleichzeitiges Drehen am Kompensator und am Analysator, so daß die Streifen möglichst wenig seitlich verschoben werden, während die Gesamthelligkeit des Feldes immer abnimmt.

5. *Der Sénarmont-Glimmerkompensator.* Eine Glimmerplatte, die übrigens nicht genau eine $^1/_4\lambda$-Platte zu sein braucht,

1) K. Heinrich, Sitzungsber. d. Ges. d. Wissensch. 62. S. 253. Leipzig 1910.

2) I. Müller, Pogg. Ann. 35. S. 261. 1835.

3) Chr. Langberg, Pogg. Ann. Ergänzungsb. 1. S. 548. 1842.

kann zur Kompensation eines beliebigen Gangunterschiedes gebraucht werden, d. h. sie kann jede elliptische Schwingung bei geeigneter Stellung linear machen; und zwar gibt es stets zwei solche Stellungen. Ist die auf den Kompensator fallende elliptische Schwingung durch den Gangunterschied Δ und das Amplitudenverhältnis $\tan\psi$ ihrer Komponenten parallel und senkrecht zur Einfallsebene gegeben, und kompensiert eine Glimmerplatte, die für ihre Hauptschwingungsrichtungen den Phasenunterschied $-\delta$ erzeugt, die Elliptizität für die Winkel α_1 und α_2 einer der Hauptschwingungsrichtungen gegen die Einfallsebene, und bezeichnet $\tan\psi'$ das Amplitudenverhältnis der beiden Komponenten nach den Hauptschwingungsrichtungen des Glimmers, so sind α und ψ' durch die beiden Beziehungen bestimmt[1]):

$$(1) \qquad \cot\delta = -\frac{\cos\Delta\cdot\cos 2\alpha + \cot 2\psi\cdot\sin 2\alpha}{\sin\Delta}$$

$$(2) \qquad \cos 2\psi' = \cos 2\psi\cdot\cos 2\alpha - \sin 2\psi\cdot\sin 2\alpha\cdot\cos\Delta$$

6. *Berechnung von Δ, ψ.* Der Winkel α wird unmittelbar am Teilkreis des Kompensators abgelesen, ψ' wird aus α und der Stellung β des Analysators bestimmt. Dann ist ohne große Schwierigkeit Δ und ψ und überdies δ zu berechnen. Da ja zwei Winkel α_1, α_2 und entsprechend ψ_1' ψ_2' bestimmt sind. Aus Messungen beider α_ν, $\nu = 1,2$ kann man daher, ohne Kenntnis von δ, Δ und ψ berechnen, oder — dies geschieht für Beobachtungen zeitlicher Veränderungen der Spiegel — nach Bestimmung von δ aus mehreren vorhergegangenen Messungen, durch jede Einzelmessung (α, ψ') Δ und ψ ermitteln. — Für die Genauigkeit der Messungen ergeben sich wertvolle Kontrollen durch Messung beider α_1, α_2. Nullpunktsfehler werden durch Doppelmessungen beseitigt, indem die Polarisationsebene des auf den Spiegel fallenden, linearen Lichtes um $\pm 45^0$ gegen die Einfallsebene geneigt wird. Bei einer im allgemeinen wechselnden Genauigkeit, infolge der veränderlichen Versuchsbedingungen, besonders der

1) H. de Sénarmont, Pogg. Ann. Ergänzungsb. 1. S. 451. 1842; Ann. Chim. Phys. 73. S. 337. 1840; E. Wiedemann, Pogg. Ann. (6) 151. S. 1 ff. 1874.

verschiedenen Politur der Spiegel, betrug bei 30 Hauptwinkelmessungen an einem Stahlspiegel die maximale Schwankung für die Ablesungen der α wie auch der β nahezu gleich: 14,0′; der mittlere Fehler der Einzelbeobachtung 3,8′; der des Mittels 0,9′. Daraus ergeben sich für die Fehler der ψ die doppelten, der Δ die vierfachen Beträge dieser Zahlen.

Zweiter Teil.

Theorie der Oberflächenschichten auf Metallen.

7. *Strenge Formeln für Reflexion und Brechung an schichtfreien Trennungsflächen.* Um den Polarisationszustand des Lichtes darzustellen, das an einem mit einer Schicht bedeckten Spiegel reflektiert ist, nehmen wir auf dem Metall eine homogene, im allgemeinen absorbierende Schicht von endlicher Dicke an, deren optische Eigenschaften in die des Metalles wie auch, auf der Seite des einfallenden Lichtes, in die des angrenzenden Körpers (meist Luft) sprunghaft übergehen. Wir setzen also zwei ideale Trennungsflächen voraus. Stärkere Schichten müssen gewöhnlich als inhomogen angesehen werden und können aus mehreren homogenen zusammengesetzt gedacht werden. Die bisher bekannten, geringen Dicken natürlicher Oberflächenschichten erlauben jedoch die einfachste Annahme. — Die optischen Eigenschaften von Luft l, Schicht s, Metall m werden durch den Brechungsexponenten n und den Absorptionskoeffizienten k gegeben, die zweckmäßig in dem komplexen Brechungsindex $\bar{n}$ zusammengefaßt werden, so daß:

$$(3)\quad \bar{n}_a = n_a - i \cdot k_a = n_a(1 - i \cdot \varkappa_a) = \varrho_a \cdot e^{-i\omega_a}, \quad a = l, s, m$$

ist, wobei $\varkappa$ der Absorptions*index* ist. An den Grenzen Luft/Schicht und Schicht/Metall gelten dann die Reflexionsformeln, wie sie Drude[1]) aus den Maxwellschen Grundgleichungen im reellen Gebiete für Leiter, in komplexer Form für absorbierende Körper abgeleitet hat; im besonderen verwenden wir die Fresnelschen Schwächungsfaktoren[2]) in kom-

1) P. Drude, Lehrbuch d. Optik. 3. Aufl. Leipzig 1912.
2) P. Drude, a. a. O. S. 269.

plexer Form und die strengen Formeln der Metalloptik, die von Wiener[1]) zusammengestellt sind.

8. *Einteilung der Oberflächenschichten.* a) In *physikalischer* Hinsicht werden sich die Schichten verschieden verhalten je nach Stärke und Absorption. Dicke, absorbierende Schichten werden, sofern sie noch gut reflektieren (Metallbeschläge), die Reflexion am eigentlichen Spiegel zurücktreten lassen, während sehr dünne Schichten nur eine größere oder geringere Veränderung der Reflexion am reinen Metall verursachen. Nicht absorbierende Schichten werden bei zunehmender Stärke nur eine periodische Veränderung des Polarisationszustandes im zurückgeworfenen Lichte erkennen lassen, von der Interferenz der in der Schicht wiederholt reflektierten Strahlen herrührend.

b) Bezüglich der Erzeugung und Beseitigung der Schichten ist der *chemische* Charakter maßgebend:

α) Selbst bei dem reinsten, praktisch als schichtfrei anzusehenden Metalle muß ein Gebiet des stetigen Überganges der optischen Konstanten angenommen werden, sofern überhaupt die Maxwellsche Theorie und die Grenzbedingungen gelten sollen, die auf stetigen Übergängen von Dielektrizitätskonstante und elektrischer Leitfähigkeit begründet sind. Wir sprechen in diesen Fällen von *Übergangsschichten*.

β) Schichten von optisch beträchtlicher Stärke entstehen ohne chemische Einwirkung oder Auftragung fremder Körper durch *Auflockerung* des Metalles an der Oberfläche. Man kann sie als sehr starke Übergangsschichten auffassen; sie können mechanisch beim Polieren durch Losreißen von Metallteilchen entstehen, die noch fest genug gebunden bleiben. Auf dem Silber scheinen sie sich unter Mitwirken des Sauerstoffes zu bilden, indem zwischen Oxydationsvorgängen und Reduktion durch Licht ein Gleichgewicht entsteht („molekulares Silber").

γ) *Chemische* Schichten können natürlich, besonders durch Oxydation, oder unter künstlichen Bedingungen entstehen als Oxyde, Hydroxyde, Sulfide, Jodide usw.

δ) *Aufgetragene* Schichten können auch ohne chemische Einwirkung, aus einem fremden Stoffe bestehend, das Metall

1) O. Wiener, Der Zusammenhang zwischen den Angaben der Reflexionsbeobachtungen ... Abh. d. Sächs. Ges. d. Wiss. 30. S. 511, 540. 1908.

überziehen, sei es natürlich, wie es beim *Altern* aller Spiegelflächen festgestellt ist, wobei immer die gleiche Schicht ($n = 1{,}46$; $k = 0$; Fette usw.) zu entstehen scheint[1]), oder durch Polieren, künstliches Auftragen oder *Zerstäuben* von Metallen auf dem Metallspiegel.

9. *Reflexionsgesetz für Spiegel mit einer homogenen Schicht von endlicher Dicke.* Denkt man ein unendlich ausgedehntes Parallelstrahlenbüschel E (Fig. 4), das parallel oder senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist, auf den Spiegel fallend, und betrachtet die wiederholten Reflexionen in der Schicht, wie in Fig. 4 für reelle Brechungsindizes gezeichnet ist, so erhält man durch Summation der Bestandteile eines einzigen reflektierten Strahles R das Verhältnis der reflektierten Amplitude zur einfallenden und die Verzögerung des reflektierten Strahles gegen den einfallenden in den beiden komplexen Fresnelschen Schwächungsfaktoren für Reflexion an schichtbedecktem Spiegel zusammengefaßt:[2])

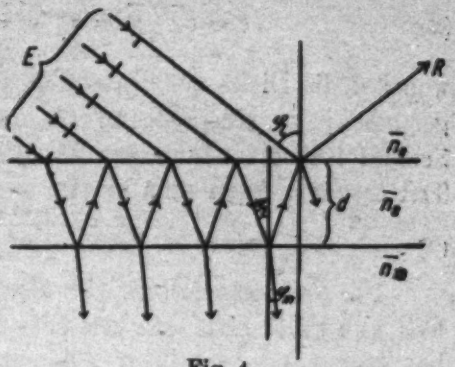


Fig. 4.

$$r^{\nu} = \frac{r_{l,s}^{\nu} + r_{s,m}^{\nu} \cdot e}{1 + r_{l,s}^{\nu} \cdot r_{s,m}^{\nu} \cdot e}, \quad \nu = p, s. \tag{4}$$

Hierbei bezeichnet p die parallel der Einfallsebene, s die senkrecht zu ihr gerichtete elektrische Kraft; die Indizes l, s, m deuten Luft, Schicht, Metall an, deren Brechungsexponenten zunächst sämtlich komplex angesetzt werden. Die Größen $r_{e,d}^{\nu}$, e, $d = l, s, m$, sind die Fresnelschen Schwächungsfaktoren für Reflexion an schichtfreien Trennungsflächen:

$$r_{e,d}^{p} = \frac{\bar{n}_d \cdot \cos\varphi_e - \bar{n}_e \cdot \cos\varphi_d}{\bar{n}_d \cdot \cos\varphi_e + \bar{n}_e \cdot \cos\varphi_d} = \frac{\tan(\varphi_e - \varphi_d)}{\tan(\varphi_e + \varphi_d)} \quad \left.\right\} \text{1. } e = l,\ d = s, \tag{5}$$

$$r_{e,d}^{s} = \frac{\bar{n}_e \cdot \cos\varphi_e - \bar{n}_d \cdot \cos\varphi_d}{\bar{n}_e \cdot \cos\varphi_e + \bar{n}_d \cdot \cos\varphi_d} = -\frac{\sin(\varphi_e - \varphi_d)}{\sin(\varphi_e + \varphi_d)} \quad \left.\right\} \text{2. } e = s,\ d = m, \tag{6}$$

1) O. Hebecker, Inaug.-Diss. Göttingen. S. 47. 1912.

2) P. Drude, Wied. Ann. 36. S. 892—894 (Formel 44). 1889; W. Voigt, Gött. Nachr. 25./7. S. 284. 1908

in denen φ_s und φ_d die komplexen Einfalls- und Brechungswinkel bezeichnen, die durch das Brechungsgesetz:

$$\bar{n}_s \cdot \sin \varphi_s = \bar{n}_d \cdot \sin \varphi_d \tag{7}$$

miteinander verbunden sind. Die in (4) auftretende Größe $\mathfrak{e}$ enthält den periodischen Einfluß der Interferenzen der wiederholt gespiegelten Strahlen und den Einfluß der Absorption der Schicht:

$$\mathfrak{e} = e^{-K\frac{d}{\lambda_0}} = e^{-4i\pi\frac{d}{\lambda_0}\bar{n}_s \cdot \cos\varphi_s}, \tag{8}$$

wobei d die Dicke der Schicht, λ_0 die Wellenlänge im Vakuum gemessen, φ_s entsprechend (7) der Brechungswinkel in der Schicht ist. Man kann den dämpfenden und den periodischen Teil trennen, wenn man setzt:

$$\bar{n}_s \cdot \cos\varphi_s = \sqrt{\bar{n}_s^2 - \sin^2\varphi_i} = U_s \cdot e^{-2i\Phi_s}. \tag{9}$$

10. *Reihenentwicklung für dünne Schichten.* Formel (4) enthält alle Fälle einer starken oder dünnen, homogenen Schicht, bei großer oder geringer Absorption derselben. Sind Dicke und Absorption hinreichend groß, so wird $\mathfrak{e}$ klein genug für eine Reihenentwicklung von (4) nach $\mathfrak{e}$, die mit r_{is}^{ν} beginnt, d. h. mit dem aus der Reflexion an der Schicht allein folgenden Polarisationszustand. Für eine nichtabsorbierende Schicht ist der Exponent von $\mathfrak{e}$ rein imaginär; bei wachsender Dicke ist r^{ν} eine ungedämpfte, periodische Funktion von d/λ_0. Für sehr dünne, stark oder schwach absorbierende Schichten kann (4) nach d/λ_0 in eine Reihe entwickelt werden, wobei das erste Glied ist:

$$r_{im}^{\nu} = (r_{is}^{\nu} + r_{sm}^{\nu})/(1 + r_{is}^{\nu} \cdot r_{sm}^{\nu}),\ \nu = p,\ s, \tag{10}$$

d. h. man erhält in der Hauptsache die Reflexion zwischen Luft und Metall, die durch die folgenden Glieder modifiziert wird. Die Identität (10) ist aus (5) und (6) für p und s einzeln nachzuweisen.[1])

Wenn die Polarisationsebene des auf den Spiegel fallenden, linearen Lichtes den Winkel $\pm 45°$ mit der Einfallsebene bildet, sind die Amplituden der p- und s-Komponente gleich,

1) C. Statescu, Ann. d. Phys. 33. S. 1032 ff. 1910. (Für dickere, metallische Schichten.)

und der Polarisationszustand des reflektierten Lichtes kann dargestellt werden durch:

$$11) \qquad r^p / r^s = \tan\psi \cdot e^{i\Delta},$$

wobei $\tan\psi$ das reelle Amplitudenverhältnis, Δ die Phasendifferenz der p- und s-Komponente ist. Bricht man die Reihenentwicklungen von r^p und r^s, s. Gleichung (4) mit der zweiten Potenz von d/λ_0 ab, so erhält man:

$$(12)\begin{cases} \tan\psi \cdot e^{i\Delta} = -\dfrac{\cos(\varphi+\varphi_m)}{\cos(\varphi-\varphi_m)} \\ \qquad \cdot \left[1 - K \cdot M_1 \dfrac{d}{\lambda_0}\left(1 - \dfrac{1}{2} K \dfrac{d}{\lambda_0}(M_1 + M_2')\right)\right], \end{cases}$$

wobei für den Einfallswinkel $\varphi_i = \varphi$ gesetzt, K durch (8) definiert ist und die Abkürzungen gebraucht sind:

$$(13) \quad K \cdot M_1 = -\frac{4\pi \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \bar{n}_i \bar{n}_m^2}{\bar{n}_m^2 - \sin^2\varphi(\bar{n}_i^2 + \bar{n}_m^2)} \cdot N \cdot e^{-i\chi},$$

$$(14) \quad N \cdot e^{-i\chi} = i \cdot \frac{(\bar{n}_i^2 - \bar{n}_e^2)(\bar{n}_e^2 - \bar{n}_m^2)}{\bar{n}_e^2(\bar{n}_i^2 - \bar{n}_m^2)}, \quad N \text{ und } \chi \text{ reelle Konst.}$$

$$(15) \quad K \cdot M_2' = \frac{4\pi i \cdot \bar{n}_e^2 \bar{n}_m^2 \cdot \cos\varphi_m}{(\bar{n}_i^2 - \bar{n}_m^2)(\bar{n}_m^2 - \sin^2\varphi[\bar{n}_i^2 + \bar{n}_m^2])} \cdot Q.$$

$$(16)\begin{cases} Q = \bar{n}_i^2\left(\dfrac{2}{\bar{n}_e^2} - \dfrac{1}{\bar{n}_i^2} - \dfrac{1}{\bar{n}_m^2}\right) \\ \quad + \bar{n}_i^4 \cdot \sin^2\varphi\left[\left(\dfrac{1}{\bar{n}_i^2} + \dfrac{1}{\bar{n}_m^2}\right)\left(\dfrac{1}{\bar{n}_m^2} - \dfrac{1}{\bar{n}_e^2}\right) - \left(\dfrac{1}{\bar{n}_e^4} - \dfrac{1}{\bar{n}_i^4}\right)\right]. \end{cases}$$

Der auf der rechten Seite von (12) vor der Klammer stehende Faktor ist der bekannte, für Reflexion an schichtfreien Spiegeln erhaltene Ausdruck. Auf der linken Seite stehen die beiden aus den unmittelbaren Beobachtungen erschlossenen Größen ψ und Δ; man erkennt, daß sie infolge der Zusatzglieder der rechten Seite andere Werte annehmen, als für den reinen Spiegel. Daher werden auch alle aus ψ und Δ nach den strengen Formeln der Metalloptik[1]) berechneten Werte, z. B. n_m, k_m gegenüber den für die reinen Metalle geltenden Größen verändert und Funktionen von d/λ_0 sein. Wir führen daher folgende Unterscheidung ein:

„*Beobachtetete Werte*" sind zunächst ψ und Δ dann alle

1) O. Wiener, a. a. O.

aus diesen nach den strengen Formeln für schichtfreie Metalle berechneten Größen.

„Wahre Werte der Metalle" sind die optischen Konstanten des schichtfreien Metalles und alle aus diesen nach den strengen Formeln rückwärts berechneten Werte. Diese sollen durch den oberen Index ^{0} gekennzeichnet werden. Auf der rechten Seite von (12) sind z. B. neben der unabhängigen Veränderlichen φ nur „wahre Werte" enthalten. Durch dieselben Operationen wie für schichtfreie Metalle berechnen wir aus (12) unter Beachtung dieser Unterscheidung:

$$(17)\quad \begin{cases} \bar{n}_m^{\,2} = (\bar{n}_m^{\,0})^2 \cdot \Big\{ 1 + 4\pi \dfrac{d}{\lambda_0} \bar{n}_m^{\,0} \cdot N^0 \cdot \cos \varphi_m^{\,0} \cdot e^{-i\chi^0} \\ \quad + 4\pi^2 \cdot (\bar{n}_m^{\,0})^2 \cdot \left(\dfrac{d}{\lambda^0}\right)^2 \cdot N^0 \cdot e^{-i\chi^0} \Big[N^0 \cdot e^{-i\chi^0} \\ \qquad\qquad - 2N^{0\prime} \cdot \cos^2 \varphi_m^{\,0} \cdot e^{-i\chi^{0\prime}} \Big] \Big\} . \end{cases}$$

Hierbei ist:

$$(18)\qquad \bar{n}_m^{\,2} = \sin^2 \varphi \,[1 + \tan^2 \varphi \cdot \tan^2 P \cdot e^{-4i\Phi}].$$

$$(19)\qquad \tan P \cdot e^{-2i\Phi} = (1 - \tan \psi \cdot e^{i\Delta}) / (1 + \tan \psi \cdot e^{i\Delta}).$$

N^0 und χ^0 sind durch die für wahre Werte zu bildende Gleichung (14) gegeben; $N^{0\prime}$ und $\chi^{0\prime}$ durch:

$$(20)\qquad N^{0\prime} \cdot e^{-i\chi^{0\prime}} = i \frac{1 - \bar{n}_l^{\,2} (\bar{n}_s^{\,4} - [\bar{n}_m^{\,0}]^4)}{\bar{n}_s^{\,2} \cdot [\bar{n}_m^{\,0}]^2 (\bar{n}_l^{\,2} - [\bar{n}_m^{\,0}]^2)} .$$

11. *Die Größe des zweiten Näherungsgliedes und die beobachteten Schichtstärken.* Aus (17) und (18) ziehen wir die Quadratwurzel und trennen die reellen und imaginären Bestandteile. Wir erhalten Ausdrücke, welche die durch Schichten veränderten, beobachteten Werte von n_m und k_m mit den wahren Werten $n_m^{\,0}$, $k_m^{\,0}$ und den Konstanten der Schicht n_s, k_s sowie mit d/λ_0 verbinden. Je nach der Größe von n_s, k_s, $n_m^{\,0}$, $k_m^{\,0}$ fallen N^0, χ^0, $N^{0\prime}$, $\chi^{0\prime}$ sehr verschieden aus. Um zu beurteilen, welchen Einfluß die mit $(d/\lambda_0)^2$ multiplizierten Glieder haben, muß man einzelne Fälle berechnen. Bei gleichen Schichtdicken zeigen dann Silberspiegel die stärksten Veränderungen der n_m und k_m. Zum Vergleich ziehen wir Versuche an einem galvanisch niedergeschlagenen Silberspiegel heran. Der Spiegel war mit Schmirgel und dem Polierstahl behandelt; er zeigte schon bei den ersten Beobachtungen stark veränderte optische

Konstanten, deren weitere Veränderung auch im schwachem Vakuum anhielt und nur durch längere Belichtung um weniges zurückging. Die Schicht wurde schließlich mit bloßem Auge als weißer Schimmer sichtbar und machte dann die Messungen unmöglich. Durch leichten Druck mit dem Polierstahl konnte die Politur wieder hergestellt werden und ergab dann n_m und k_m den Konstanten des reinen Metalles näher als bei den ersten Beobachtungen. Für die Konstanten der Schicht auf Silber wurden zwei Annahmen in Betracht gezogen: Nach Wernickes[1]) Anschauung entsteht ein aufgelockertes, von Luft durchsetztes Silber, dessen Eigenschaften denen des Silberoxydes sehr nahe sein sollen. Nach Drudes[2]) Berechnung dagegen hat das gebildete „Molekulare Silber" einen weit größeren Brechungsexponenten und auch größere Absorption. Für die erste Annahme berechnen sich n_m und k_m weniger veränderlich als der Beobachtung entspricht. Molekulares Silber als Schicht dagegen gibt ziemlich gute Übereinstimmung mit den Beobachtungen. Für die Konstanten: $n_m^0 = 0{,}18$; $k_m^0 = 3{,}67$; $n_s = 4$; $k_s = 2{,}8$ gibt die Berechnung nach (17), wenn der reelle und der imaginäre Teil getrennt werden:

$$(21)\quad \begin{cases} n_m = 0{,}18 + 130{,}415 \cdot \left(\frac{d}{\lambda_0}\right) - 3198{,}643 \cdot \left(\frac{d}{\lambda_0}\right)^2 \\ k_m = 3{,}67 - 124{,}234 \cdot \left(\frac{d}{\lambda_0}\right) + 2711{,}814 \cdot \left(\frac{d}{\lambda_0}\right)^2 . \end{cases}$$

Daraus werden die in Tab. I zusammengestellten Werte für n_m, k_m, bei den in Frage kommenden Dicken erhalten:

Tabelle I.

(Silber.)

d/λ_0	0,005	0,01	0,02	0,03	0,04
n_m	0,75	1,17	1,51	1,22	0,28
k_m	3,12	2,70	1,27	2,50	3,03

Die äußersten, während der Veränderung an dem Silberspiegel beobachteten Werte sind:

1) W. Wernicke, Wied. Ann. 51. S. 448. 1894; 52. S. 515. 1894.
2) P. Drude, Wied. Ann. 50. S. 595. 1894.

Tabelle II.
(Silber.)

	20—24/7. 1914	
n_m	0,320	0,810
k_m	3,050	2,059

Aus (8) erkennt man, daß (4), abgesehen von der Absorption, eine vollständige Periode durchläuft, wenn die Schichtdicke stetig zunimmt bis:

(22) $$(d/\lambda_0)_p = 1/(2 \cdot U_s \cdot \cos 2\,\Phi_s) \qquad \text{s. (9)}$$

Innerhalb der Hälfte dieses Wertes muß daher ein Umkehrpunkt für n_m sowohl als für k_m liegen; das bedeutet für das berechnete Beispiel innerhalb einer Schichtdicke:

$$^1/_2 (d/\lambda_0)_p = 0{,}064\,.$$

Nimmt man die Dicke der beobachteten Schicht innerhalb dieses Gebietes der ersten Periode an, so kann man n_m mit den Messungen in Übereinstimmung bringen, wenn man die Schichtdicke d zwischen $0{,}005\,\lambda_0$ und $0{,}01\,\lambda_0$ annimmt; dann fällt k_m etwas zu groß aus. Paßt man k_m den Messungen an, so ist die Dicke d zwischen $0{,}01\,\lambda_0$ und $0{,}02\,\lambda_0$ anzusetzen, und n_m fällt etwas zu groß aus. Eine geringe Änderung in der Annahme der Schichtkonstanten genügt, um volle Übereinstimmung zu erhalten (d rund $0{,}01\,\lambda_0$). Die Versuche lassen also die Annahme des molekularen Silbers als berechtigt erscheinen und führen zu einer Schichtdicke der Größenordnung $0{,}01\,\lambda_0$, die auch zur Erklärung der elliptischen Polarisation bei Reflexion an nicht-absorbierenden Körpern genügt.[1] Zugleich lassen die Formeln (21) erkennen, daß das mit $(d/\lambda_0)^2$ multiplizierte Glied schon bei den in Frage kommenden Schichtdicken, wenigstens für das stark veränderliche Silber, nicht vernachlässigt werden kann. Bei den anderen Metallen und für eben entstehende Schichten können wir, wie spätere Versuche gezeigt haben, in erster Annäherung mit dem in (d/λ_0) linearen Glied auskommen.

Dritter Teil.

Beobachtungen.

12. *Die Veränderungen der Kurven $\psi(\varphi)$ und $\Delta(\varphi)$ durch Schichten.* Für die aus den unmittelbar beobachteten Größen φ,

1) P. Drude, Optik. S. 281. 1912.

α, β berechneten Werte ψ, Δ ist es wesentlich zu wissen, wie sie durch Oberflächenschichten verändert werden, um die Beobachtungen mit den Berechnungen zu vergleichen. Wir beschränken uns auf so dünne Schichten, daß die Berücksichtigung der ersten Potenz von (d/λ_0) genügt. Von (17) ziehen wir beiderseits $\sin^2\varphi$ ab und beachten zu (9) entsprechende Gleichungen, die mit U_m, Φ, $\bar{n}_m$, φ_m je für wahre und beobachtete Werte zu bilden sind, wobei Φ für Φ_m geschrieben wird. Nachdem noch beiderseits die Quadratwurzel gezogen ist, trennen wir den reellen und imaginären Bestandteil. Aus den so erhaltenen Reihenentwicklungen für $U_m \cdot \cos 2\Phi$ und $U_m \cdot \sin 2\Phi$ findet man P und Φ nach den zu (9) entsprechenden Gleichungen und den strengen Formeln der Metalloptik[1]), aus denen die Beziehung folgt:

$$U_m = \sin\varphi \cdot \tan\varphi \cdot \tan P. \tag{23}$$

Die Substitution (19) verbindet Δ und ψ mit diesen Größen:

$$\begin{cases} \tan\Delta &= \tan 2P \cdot \sin 2\Phi \\ \cos 2\psi &= \sin 2P \cdot \cos 2\Phi \end{cases} \tag{24}$$

Setzen wir in diese Gleichungen die für P und Φ gefundenen Reihen ein, so erhalten wir schließlich:

$$\tan\Delta = \tan\Delta^0 + 2\pi \cdot \frac{d}{\lambda_0} \cdot (\varrho_m^0)^2 \cdot \frac{N^0 \cdot L}{U_m^0} \cdot \frac{\sin 2P^0 \cdot \cos 2\Phi^0}{\cos^2 2P^0} \cdot \sin(2\omega_m^0 + \chi^0 - 2\Phi^0 + \tau) \tag{25}$$

$$\cos 2\psi = \cos 2\psi^0 \left[1 + 2\pi \cdot \frac{d}{\lambda_0} (\varrho_m^0)^2 \cdot \frac{N^0 L}{U_m^0} \cdot \cos(2\omega_m^0 + \chi^0 - 2\Phi^0 + \tau)\right] \tag{26}$$

wobei

$$\begin{cases} L = +\sqrt{\tan^2 2\Phi^0 + \cos^2 2P^0} \\ \tan\tau = \tan 2\Phi^0 / \cos 2P^0 = \tan\Delta^0 / \cos 2\psi^0 \end{cases} \tag{27}$$

ist.

Die allgemeine Form der Kurven: ψ^0, Δ^0, P^0, Φ^0 der schichtfreien Metalle[2]) ist aus Fig. 5 zu erkennen; das Minimum der Kurve ψ^0 ist um so flacher, je stärker das Metall absorbiert. Die Veränderungen hängen von den Werten ab, die

1) O. Wiener, a. a. O.
2) O. Wiener, a. a. O. S. 541—46.

L und $(2\omega_m{}^0 + \chi^0 - 2\Phi^0 + \tau)$ für die verschiedenen Einfallswinkel annehmen; wir stellen die wichtigsten Zahlenwerte in Tab. III zusammen:

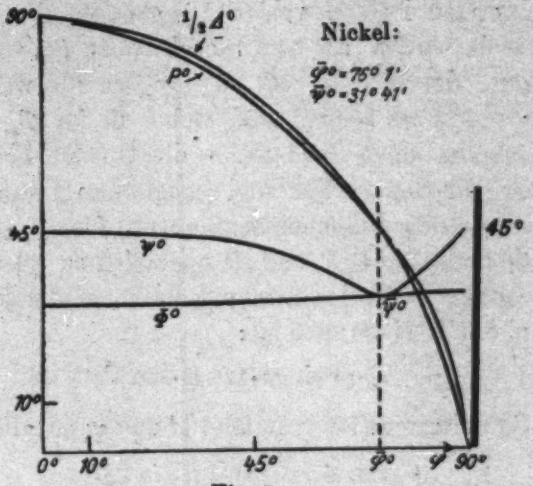


Fig. 5.

Tabelle III.

(Fe bezeichnet hier Stahl.)

	L		$(2\omega_m{}^0 + \chi^0 - 2\Phi^0 + \tau) - \pi$		
φ	0 u. $\frac{1}{2}\pi$	Φ^0	0	Φ^0	$\frac{1}{2}\pi$
Ag	21,830	21,807	141° 40′	138° 52′	136° 4′
Ni	2,217	1,979	91° 43′	63° 23′	36° 40′
Fe	1,794	1,489	109° 9′	73° 49′	40° 1′

Daraus folgt: *„Δ stimmt mit Δ^0 nur für $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ überein, für alle anderen Einfallswinkel ist $\Delta < \Delta^0$“*; daher ist auch *„der durch $\Delta = \frac{1}{2}\pi$ definierte Haupteinfallswinkel durch Oberflächenschichten stets verkleinert.“* ψ hat kein derartig gleiches Verhalten für alle Metalle: *„Bei Silber ist für alle Einfallswinkel $\psi < \psi^0$. Stahl und Nickel haben für größere Einfallswinkel, $\psi > \psi^0$, nur für kleine φ kann $\psi < \psi^0$ werden.“*

Messungen an einem *Silberspiegel* gaben in der Tat selbst für $\varphi > \varphi^0$: ψ wesentlich kleiner als $\bar{\psi}^0$, wie Tab. IV zeigt, deren letzte Spalte die Hauptwinkel des schichtfreien Silbers enthält:

Tabelle IV.
(Silber).

	1.	2.	3.		
φ	74° 49′	74° 20′	73° 46′	φ^0	75° 42′
ψ	37° 5′	36° 27′	36° 22′	ψ^0	43° 35′
Δ	67° 48′	68° 37′	70° 25′	$\bar{\Delta}^0$	$^1/_2\,\pi$

Aus der Annahme von molekularem Silber als Schicht ergibt sich die Dicke zu: $d/\lambda_0 = 0{,}007$.

Hauptwinkelmessungen an einem *Nickelspiegel* ergaben in allen Fällen $\bar{\psi} > \bar{\psi}^0$; die größten und kleinsten gefundenen Werte sind:

Tabelle V.
(Nickel.)

	I.	II.		
φ	75° 25′	73° 34′	φ^0	76° 1′
$\bar{\psi}$	32° 39′	34° 8′	$\bar{\psi}^0$	31° 41′
d/λ_0	0,006	0,015		

Die letzte Spalte gibt die Hauptwinkel des schichtfreien Nickels. Für Nickeloxyd als Schicht ergibt sich in den beiden angegebenen Fällen die Dicke: (d/λ_0), die in Tab. V als letzte Zeile aufgeführt ist.

Stahlspiegel gaben keine eindeutigen Resultate, weil sie nicht kratzenfrei erhalten wurden, wodurch ψ herabgedrückt wird, so daß bei besonders matter Politur $\bar{\psi} < \bar{\psi}^0$ werden konnte. Z. B. wurden an einem Stahlspiegel die in Tab. VI angegebenen Werte gefunden:

Tabelle VI.
(Stahl.)

						$d = 0$
φ	69° 10,7′	73° 56,0′	74° 23,0′	75° 20,8′	76° 3,0′	76° 35′
$\bar{\psi}$	26° 46,8′	31° 21,9′	25° 43,8′	30° 26,8′	28° 43,0′	28° 18′

Die letzte Spalte enthält wieder die Hauptwinkel des schichtfreien Spiegels, die von Minor[1]) für die Wellenlänge 550 $\mu\mu$ bestimmt sind.

1) R. S. Minor, Ann. Phys. 10. S. 601. 1903.

13. *Beobachtungen an Stahlspiegeln.* Neben den Veränderungen der Gold- und Silberspiegel, die auf physikalische Veränderungen des Metalles selbst zurückzuführen sind, ist die Unbeständigkeit der Stahlspiegel am meisten beobachtet worden und wegen der Oxydierbarkeit auch am wahrscheinlichsten. Meine Beobachtungen an verschiedenen Stahlspiegeln zeigten jedoch, daß die Verschiedenartigkeit des Materials gerade bei diesen die Gesetze der Schichtbildung nicht deutlich zutage treten lassen, da sich die Spiegel gegenüber den gleichen Einflüssen oft entgegengesetzt verhalten und im ganzen keine so große Veränderlichkeit aufweisen, als zunächst zu vermuten wäre. Es ist zu beachten, daß nur kratzenfreie Spiegel, die bei Stahl besonders schwer herzustellen sind, eindeutige Resultate geben; andererseits, daß das für die Beobachtungen erforderliche, gleichmäßige Material, z. B. Böhlerstahl (extra zähhart), verhältnismäßig wenig angreifbar ist, sofern grobe Zerstörungen der Spiegelflächen ausgeschlossen werden. Auf Oxydation beruhende Veränderungen durch atmosphärische Einflüsse unter künstlichen Versuchsbedingungen bemerkte ich nur dann, wenn Kohlendioxyd mit Feuchtigkeit und Sauerstoff zugleich anwesend war. Auch unter günstigsten Umständen traten zunächst nur geringe Veränderungen durch Schichten auf.

14. *Bestimmung der optischen Konstanten des (schichtfreien) Nickels durch Veränderung der Schichtdicke.* Das eingangs erwähnte Ziel, die optischen Konstanten des schichtfreien Metalles ohne Beseitigung der Schichten zu bestimmen, wurde für einen Nickelspiegel in der Weise in Angriff genommen, daß die nach dem Polieren vorhandene Schicht durch Reiben mit Leinen und Alkohol verändert wurde, wobei wiederholt Hauptwinkelmessungen gemacht wurden. Da die Versuche ursprünglich zur Orientierung angestellt sind, wobei ich dem reinsten Zustand des Spiegels näher zu kommen suchte, entbehren die in Tab. VIII angeführten Messungen der erwünschten Systematik. Später begonnene Versuche konnten infolge des Kriegsausbruches nicht durchgeführt werden. Doch lassen die vorhandenen Messungen schon erkennen, in welcher Weise das Ziel erreicht werden kann. Die mathematischen Grundlagen geben die Gleichungen (17), (18), deren rechte Seiten wir einander gleichsetzen, und die wir für die Hauptwinkel hin-

schreiben. Unter Hauptwinkeln $(\bar{\varphi}, \bar{\psi})$ verstehen wir auch bei vorhandenen Schichten diejenigen φ, ψ, für welche sich $\Delta = {}^1/_2\,\pi$ ergibt. Dann fällt die Substitution (19) fort, weil $\tan P = 1$ und $\bar{\Phi} = \bar{\psi}$ wird. Wir betrachten wieder so dünne Schichten, daß nur die erste Potenz von d/λ_0 berücksichtigt werden muß. In der so erhaltenen, komplexen Gleichung sind $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$ Funktionen von $\bar{n}_s$ und d/λ_0, wenn die Schicht veränderlich angenommen wird. Besonders einfach, nämlich als lineare Funktionen von d/λ_0, ergeben sich $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$, wenn man die Dicke der Schicht allein als veränderlich ansieht, $\bar{n}_s$ dagegen als konstant. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn der Spiegel zwischen je zwei Messungen immer der gleichen mechanischen Behandlung mit Leinen oder Alkohol ausgesetzt wird, sofern dabei die ganze Schicht verändert und nicht eine zweite übergelagert wird. In diesem Falle erhält man, wenn man aus den beiden reellen Teilen der erwähnten komplexen Gleichung d/λ_0 eliminiert, $\bar{\psi}(\bar{\varphi})$ in erster Annäherung als Gerade, deren Neigung von den optischen Konstanten der Schicht, neben denen des Metalles, abhängt; die Gleichung dieser Kurve ist:

$$(28)\quad \begin{aligned} &\sin^2\bar{\varphi}\cdot\sin(2\omega_m{}^0+\chi^0+2\bar{\psi}^0)+\sin^2\bar{\varphi}\cdot\tan^2\bar{\varphi}\cdot\sin(2\omega_m{}^0+\chi^0\\ &\qquad +2\bar{\psi}^0-2\bar{\psi})=(\varrho_m{}^0)^2\cdot\sin(\chi^0+2\bar{\psi}^0) \end{aligned}.$$

Gelingt es auf diese Weise, für Alkoholbehandlung eine andere Schicht zu erzeugen als durch Leinen allein, so müssen sich die beiden Geraden in einem Punkt $\bar{\psi}^0(\bar{\varphi}^0)$ schneiden, der dem schichtfreien Metalle entspricht. In den angeführten Versuchen an einem Nickelspiegel (Tab. VIII, Fig. 6) können nur unmittelbar aufeinander folgende Messungen mit gleicher Behandlung für solche Geraden maßgebend sein, da andere Behandlungsweisen, die zwischen diesen liegen, andere Schichten erzeugen können. So ist durch die Beobachtungen 18—22 (Fig. 6) eine Gerade für Leinen- und Alkohol-Leinenbehandlung festgelegt, auf der auch die Punkte 1, 6, 12 liegen; während für bloße Alkoholbehandlung nur die beiden Punkte 2 und 5 und allenfalls 15 maßgebend sind, die aber durch Punkte für andere Behandlung getrennt sind. Wegen dieser Unsicherheit kann das aus Fig. 6 folgende Resultat noch nicht als einwandfrei gelten. Der Schnittpunkt der beiden Geraden gibt in der

Tat die optischen Konstanten des Nickels in Übereinstimmung mit den besten bekannten Beobachtungen. Als Schnittpunkt ergibt sich:

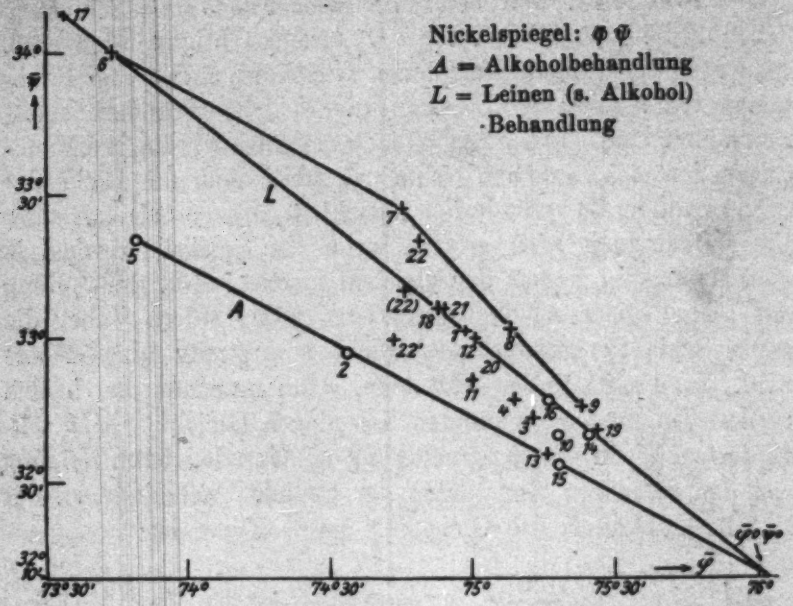


Fig. 6.

$\bar{\varphi}^0 = 76^0\,1'$; $\bar{\psi}^0 = 32^0\,10'$; $n_m{}^0 = 1{,}74$ $k_m{}^0 = 3{,}40$ } Nickel $\lambda_0 = 564{,}1\ \mu\mu$.

Für nahezu gleiche Wellenlänge werden angegeben:

Tabelle VII.

(Hauptwinkel für Stahl.)

Beobachter	λ_0 ($\mu\mu$)	$\bar{\varphi}_0$	$\bar{\psi}_0$	
Drude[1]) . . .	589	75° 55′	31° 30′	
Meier[2])	508	74° 41′	32° 54′	galvanisch vernickelter Stahlspiegel
„	589	75° 51′	33° 0′	
Bernoulli[3]) . .	546	75° 55′	31° 25′	
Tool[4])	540	75° 15′	32° 21′	

1) P. Drude, Wied. Ann. 39. S. 481. 1890.
2) W. Meier, Ann. Phys. 31. S. 1017. 1910.
3) A. L. Bernoulli, Ann. Phys. 29. S. 585. 1909.
4) A. Q. Tool, Phys. Rev. 31. S. 1. 1910.

Tab. VIII gibt die Hauptwinkelmessungen an dem Nickelspiegel wieder:

Tabelle VIII.

(21. bis 27. März 1914.)

Nr.	φ			ψ		Behandlung und Bemerkungen
	°	′	″	°	′	
1	74	58	28	33	0,5	Alkohol, Leinen
2	74	34	5	32	56,5	Alkohol verdampft, Einstellung gut
3	75	13	5	32	42,75	Leinen, φ deutlich vergrößert
4	75	8	55	32	46,5	Alkohol, Leinen
5	73	48	45	33	21,0	Alkohol verdunstet
6	73	43	45	34	0,25	Alkohol, Leinen, 20 Stunden
7	74	45	20	33	26,25	Alkohol, Leinen
8	75	8	15	33	1,0	Alkohol, Leinen
9	75	23	20	32	44,75	Leinen
10	75	18	5	32	39,25	Alkohol verdunstet
11	75	0	35	32	50,5	Leinen
12	75	0	35	32	59,5	Alkohol, Leinen
13	75	15	25	32	35,5	Alkohol, Leinen
14	75	25	20	32	38,75	Alkohol verdunstet, keine sichtbare Änderung
15	75	18	0	32	32,5	Spiegel gedreht
16	75	16	30	32	47,25	Alkohol verdunstet
17	73	34	0	34	8,25	Wasser verdampft
17a		34			8,25	Spiegel gedreht
18	74	52	50	33	5,5	Leinen, φ unsicher
18a		52			5,5	Leinen
19	75	25	30	32	40,0	Alkohol, Leinen
20	75	4	55	32	56,0	Spiegel $1^1/_2$ Stunden an Luft, Änderung deutlich
21	74	53	55	33	5,5	24 Stunden an Luft, keine sichtbare Änderung
22	74	47	55	33	19,5	24 Stunden im Vakuum
22a	74	43	42	32	59,0	Einfallswinkel nach entgegengesetzter Seite, ohne Vakuumraum

Nachdem so: n_m^0, k_m^0, ω_m^0 für das reine Metall bestimmt sind, kann aus der Neigung jeder der Geraden auf die betreffende Schicht geschlossen werden. Zur Ermittlung der komplexen Größe $\bar{n}_s$, d. h. der beiden reellen Zahlen n_s, k_s, bedarf es freilich noch einer Beobachtung, etwa der des Reflexionsvermögens, oder einer Absorptionsbestimmung; auch an die Beobachtung unter Wasser kann gedacht werden. — In vielen Fällen kann man aber mit einer schwach absorbierenden Schicht rechnen, deren Absorption in erster Annäherung vernachlässigt werden kann. Dann genügt die Neigung ξ der erwähnten Geraden allein, um n_s zu bestimmen. Aus (28) erhält man durch Differentiation nach $\bar{\varphi}$ und ψ:

(29) $\tan\xi = d\bar{\psi}/d\bar{\varphi} = \tan(2\omega_m{}^0 + \chi^0 - 2\bar{\psi}^0)/(\sin^2\bar{\varphi}^0 \cdot \sin 2\bar{\varphi}^0)$,

wobei $\cos^4\bar{\varphi}^0 = 0$ gesetzt ist. Die Kurve der veränderlichen Hauptwinkel $\bar{\psi}(\bar{\varphi})$ liefert uns ξ, so daß aus (29): χ^0 bestimmt wird, dessen Definitionsgleichung (14) weiter zur Berechnung von n_s dient, wenn $k_s = 0$ gesetzt wird. Wir erhalten z. B. für die Gerade der Leinenbehandlung: $n_{s,L} = 1{,}90$; für die der Alkoholbehandlung: $n_{s,A} = 2{,}57$. Ein ähnlich hoher Brechungsexponent ist zu erwarten; Kundt[1]) fand für Nickeloxyd und blaues Licht: $n_{NiO} = 2{,}39$.

15. *Die Kurve $\psi(\Delta)$ bei konstantem Einfallswinkel und veränderlicher Schichtdicke.* Auch wenn nicht die Hauptwinkel gemessen werden, sind bei Veränderungen sehr dünner Schichten einfache Kurven zu erwarten. Es liegt nahe, dann einen konstanten Einfallswinkel φ zu wählen, und etwa ψ abhängig von Δ darzustellen, während die Oberfläche des Spiegels, ähnlich wie beim Nickel beschrieben, verändert oder durch Reinigung mit Kollodium, Gelatine oder Toluol teilweise von der Schicht befreit wird. Wenn es auf diese Weise gelingt, ähnlich wie im vorigen Abschnitt, Gerade oder andere Kurven zu erhalten, gibt deren Schnittpunkt das Zahlenpaar ψ^0, Δ^0 für den schichtfreien Spiegel; während die Neigung ζ der einzelnen Geraden wieder zur Bestimmung des Brechungsexponenten der Schicht dienen kann. Man hat dazu d/λ_0 aus (25) und (26) zu eliminieren und die Gleichung nach ψ und Δ zu differentiieren:

$$(30)\quad \begin{cases} \tan\zeta = d\psi/d\Delta = -\frac{1}{2}\cdot\sin 2\psi^0 \cdot \cot(2\omega_m{}^0 + \chi^0 - 2\Phi^0 + \tau) \\ \tan\tau = \tan\Delta^0/\cos 2\psi^0 . \end{cases}$$

Meine Versuche an Stahlspiegeln hatten, wie schon erwähnt, kein eindeutiges Ergebnis, weil Kratzen und Schichten in entgegengesetztem Sinne einwirkten. Eine Versuchreihe an Bleiglanz, die Drude[2]) angibt, zeigt auch nicht die zu erwartenden Kurven, vermutlich, weil dort durch verschiedene Behandlungsweisen wenigstens zwei Schichten zusammenwirken, die dabei in der Stärke nicht wesentlich verändert werden.

16. *Beobachtungen an Silberspiegeln.* Die beiden aus (17) entwickelten Formeln für n_m, k_m, deren Anwendung auf einen ein-

1) A. Kundt, Berl. Ber. 1. S. 267. 1888.
2) P. Drude, Wied. Ann. 36. S. 548—53. 1889.

zelnen Fall die Gleichungen (21) sind, enthalten je zwei mit $(d/\lambda_0)^2$ verbundene Glieder, von denen das eine den Faktor

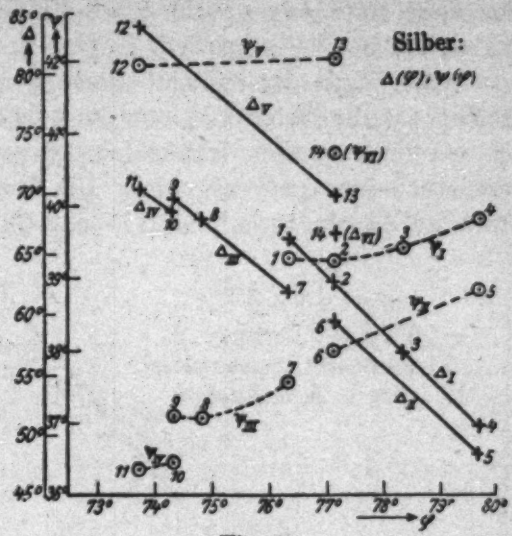


Fig. 7.

$\sin^2\varphi$ hat. Um bei unveränderlicher Schicht die Abhängigkeit der beobachteten n_m, k_m vom Einfallswinkel festzustellen,

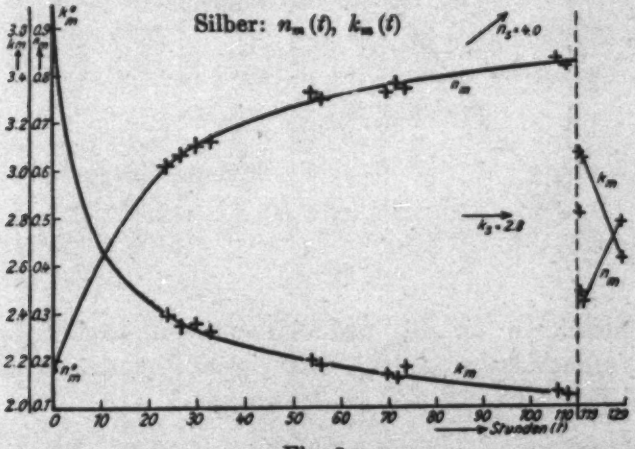


Fig. 8.

wurden ψ und Δ für möglichst verschiedene Einfallswinkel an einem galvanisch niedergeschlagenen Silberspiegel gemessen (vgl. Tab. IX und Fig. 7). Dabei ergab sich aber, daß, wenn

die Abhängigkeit von φ überhaupt merklich ist, sie jedenfalls verdeckt wird durch eine weit stärkere Veränderlichkeit der Schicht. Um nun trotz der verschiedenen Einfallswinkel in ähnlicher Weise, wie oben beschrieben, Kurven aufzuzeichnen, welche die Veränderungen der Schicht erkennen lassen, geht man zweckmäßig auf die Größen U_m und Φ zurück, die sehr wenig von φ beeinflußt werden; während besonders U_m durch Schichten wesentlich herabgedrückt wird. Die Reihen U_m und Φ werden wie im Abschnitt 12 aus (17) und (9) entwickelt,

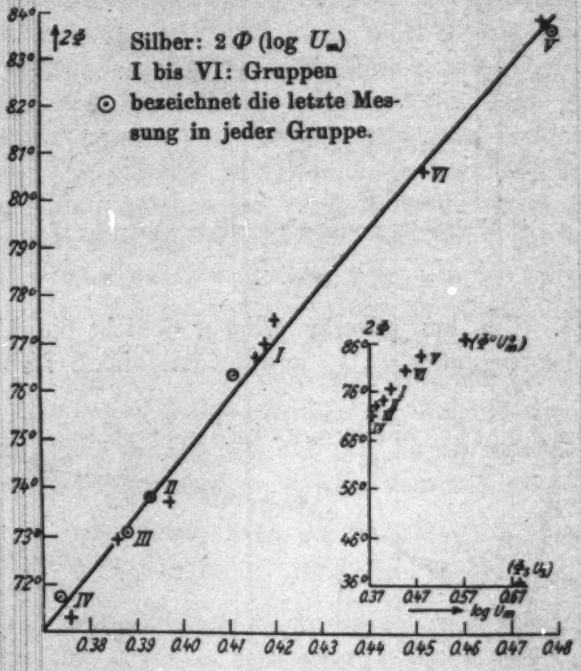


Fig. 9.

dann eliminieren wir d/λ_0 und differentiieren nach U_m und Φ unter Vernachlässigung der Abhängigkeit von φ, um die Neigung ζ' der Kurve $\Phi\ (U_m)$ zu bestimmen:

$$(31) \qquad \tan \zeta' = d\,2\Phi/d\,U_m = \tan\,(2\omega_m{}^0 + \chi^0 - 2\Phi^0)/U_m{}^0$$

oder:

$$(32) \qquad \begin{cases} \tan \zeta' = d\,2\Phi/d \log U_m = (\tan \vartheta)/M\,, \\ \vartheta = 2\omega_m{}^0 + \chi^0 - 2\Phi^0, \quad M = \log e\,. \end{cases}$$

An diesem Silberspiegel wurden die besten Kurven erhalten, obwohl sich dabei herausstellte, daß die Vernachlässigung der höheren Potenzen von d/λ_0 nicht mehr zulässig war. Denn die Kurven n_m, k_m (vgl. Fig. 8) sind keine Geraden, und das beobachtete Stück von $\Phi(U_m)$ (vgl. Fig. 9), das als Gerade erscheint, muß für verschwindende Schichtdicke eine stärkere Krümmung haben. Der Spiegel befand sich im schwachen Vakuum, von 0,2 mm im Mittel, und wurde während mehrerer aufeinanderfolgender Messungen, der Gruppen I—VI (vgl. Tab. IX) ständig

Tabelle IX.

Silber. (St. = Stunden.)

Nr.	St.	φ °	′	Δ °	′	ψ °	′	2Φ °	′	log U_m 0.	n_m 0,	k_m 2,
						Gruppe I. 20. Juli 1914.						
1	24	76	18,2	66	19,8	39	15,5	77	29,8	41991	612	390
2	27	77	7,5	62	26,2	39	12,9	76	59,9	41752	634	366
3	30	78	21,3	56	43,7	39	24,9	76	42,7	41588	646	351
4	33	79	40,1	50	31,5	39	47,7	76	21,3	41127	658	317
						Gruppe II. 21. Juli 1914.						
5	54	79	40,1	48	24,4	38	49,5	78	40,9	39655	761	200
6	56	77	7,5	59	11,6	37	59,5	78	47,9	39808	750	184
						Gruppe III. 22. Juli 1914.						
7	70	76	18,2	61	50,8	37	34,2	78	15,2	38670	764	142
8	72	74	49,4	67	48,3	37	4,8	72	57,7	38560	775	135
9	74	74	19,5	69	29,0	37	7,5	78	11,7	38849	768	156
						Gruppe IV. 23. Juli 1914.						
10	106	74	19,4	68	37,3	36	26,8	71	17,5	37579	832	061
11	108	73	46,4	70	24,9	36	22,0	71	43,9	37416	816	058
						Gruppe V. 24. Juli 1914. (Polierstahl.)						
12	119	73	46,5	84	15,5	41	56,6	83	51,3	47512	338	812
13	120	77	10,7	69	54,5	42	3,5	83	44,3	47724	320	*)
						Gruppe VI. 24. Juli 1914.						
14	128	77	10,8	66	31,9	40	41,2	80	36,4	45114	491	617

*) = 3,050.

beleuchtet. Die schon bei der ersten Messung, 72 Stunden nach Abbruch der Elektrolyse und 24 Stunden nach Beendigung des Polierens, stark veränderten Werte n_m, k_m unterlagen weiteren Veränderungen im gleichen Sinne; nur die letzte Messung jeder Gruppe zeigt eine Erhöhung von Φ, die der III. und V. Gruppe auch eine Erhöhung von log U_m, so daß eine geringe Reduk-

tion durch die Bestrahlung anzunehmen ist. Nach 118 Stunden wurden die Beobachtungen unmöglich; die Schicht war dann mit bloßem Auge sichtbar. Durch leichten Druck mit dem Polierstahl war die Politur wiederherzustellen und ergab bessere Werte von n_m, k_m, als bei den ersten Messungen. Der aus den in Tab. IX angeführten Messungen folgende Verlauf von $\psi(\varphi)$ und $\Delta(\varphi)$ ist aus Fig. 7 zu erkennen, in welchem die den einzelnen Beobachtungsgruppen entsprechenden Kurvenstücke wenig durch die zeitlichen Veränderungen beeinflußt sind, mit Ausnahme des ersten Teiles von ψ, der von links nach rechts zunehmend herabgedrückt erscheint. Das Wachstum der Schicht kommt besser in n_m, k_m (Fig. 8) oder in Φ, U_m (Fig. 9) zur Geltung.

Die Kurve $2\Phi(\log U_m)$ ist beiderseits begrenzt, wenn d/λ_0 von 0 an so weit wächst, bis die Schicht allein reflektiert. Die beiden Grenzpunkte sind durch $2\Phi^0 = 87^0\,20'$; $\log U_m{}^0 = 0{,}57306$; und $2\Phi_s = 36^0\,6'$; $\log U_s = 0{,}68580$ gegeben. Fig. 9 zeigt, daß das beobachtete Stück zwar im ganzen einer Geraden nahe kommt — natürlich nicht streng, weil innerhalb jeder Beobachtungsgruppe infolge der Reduktion eine Abweichung stattfindet — daß aber nach den Grenzpunkten, die beide größere Abszissen $\log U_m$ haben als während der Beobachtung gefunden wurden, wesentlich flachere Teile der Kurve anschließen müssen. In der Tat gibt Formel (32) für die Beobachtungen: $\zeta'' = \pi + 64^0\,56{,}5'$; während die Berechnung für eine Schicht von molekularem Silber einen flacheren Verlauf ergibt:

$$\zeta'' = \pi + 22^0\,50{,}5'.$$

Dem Punkte Φ^0, $U_m{}^0$ des schichtfreien Silbers kann man sich zweifellos noch bedeutend nähern, wenn man die Messungen möglichst beschleunigt. Berücksichtigung höherer Potenzen von d/λ_0 hat dagegen keinen Zweck, weil damit weitere Konstanten (N', χ') hereinkommen und andererseits hier eine absorbierende Schicht vorliegt, so daß $\bar{n}_s$ nur mit Hilfe anderer Messungen, z. B. der Absorption oder des Reflexionsvermögens, bestimmt werden kann.

17. *Künstliche Schichten.* Da man entweder die optischen Konstanten der Schicht oder deren Brechungsexponenten kennen muß, um die Beobachtungen mit der Theorie ver-

gleichen zu können, versuchte ich, Schichten unter kontrollierbaren Umständen hervorzurufen. Diese Versuche waren noch nicht abgeschlossen, als ich die Arbeit Ende 1914 abbrechen mußte. Ich will daher nur die leitenden Gedanken andeuten.

a) *Galvanische Jodsilberschichten*[1]) lassen eine beliebig geringe Abscheidungsgeschwindigkeit zu, so daß man die Dicke der Schicht aus den Stromverhältnissen berechnen kann. Zwei Umstände erwiesen sich aber in hohem Maße störend: Das abgeschiedene Jodsilber ist mattweiß und haftet nicht fest; zweitens scheidet sich schon ohne Elektrolyse Jodsilber ab, so daß der Spiegel schnell eingetaucht und nach dem Prozesse abgespült werden muß. Eine brauchbare, feste, bräunliche Schicht bleibt nach dem Abwischen des weißen Niederschlages zurück; aber für diese fehlen die optischen Konstanten und die Dicke ist nicht bekannt.

b) Auf *trockenem* Wege wurde *Jodsilber* auf Silberspiegeln durch Joddämpfe erzeugt: In der mit Joddampf gesättigten Atmosphäre eines großen Exsikkators wurden zwei Silberspiegel gleichmäßig mit Jodsilber überzogen. Der kleinere Spiegel diente den beschriebenen Reflexionsbeobachtungen, während der größere von etwa zehnfacher Fläche eine Schicht von der Größenordnung $0{,}01\,\lambda_0$ durch die Gewichtszunahme von $0{,}8 \cdot 10^{-4}$ g nachweisen lassen mußte. Durch Extrapolieren der Kurve der Gewichtszunahme sollte die Dicke auch für nicht wägbare Schichten festgestellt werden.

c) Schließlich sei noch die kathodische Zerstäubung eines Metalles auf dem Spiegel erwähnt, die nicht ausgeführt wurde, aber ziemlich aussichtsreich erscheint. Hierbei sind Dickenbestimmungen nach Wiener[2]) und Sharp[3]) möglich, und die Konstanten können an sehr starken Schichten gemessen werden.

18. *Über die Bestimmung der optischen Konstanten des schichtfreien Metalles bei unveränderter Schicht.* Da, wie erwähnt, n_m, k_m auch bei unveränderter Schicht sich als Funktionen des Einfallswinkels ergeben, die allerdings erst in dem mit $(d/\lambda_0)^2$ verbundenen Gliede von $\sin^2\varphi$ abhängen, so ist bei hin-

1) C. Statescu, Ann. d. Phys. **33**. S. 1032ff 1910. Galvanische Metallschichten auf Metallen.

2) O. Wiener, Wied. Ann. **31**. S. 659. 1887.

3) C. H. Sharp, Drudes Ann. **3**. S. 210. 1900.

reichender Genauigkeit der Versuche sehr wohl daran zu denken, den Einfluß der Schicht durch Messungen unter verschiedenen Einfallswinkeln auszuschalten. Versuche an wenig veränderlichen Stahl-, Magnalium- und Nickelspiegeln ergaben bisher wohl stetige Kurven für n_∞, k_∞, deren Veränderungen mit φ aber weit größer waren, als dem theoretischen Zusammenhange entspricht. Sie waren durch gewisse Mängel des Spektrometers bedingt. Nach Beseitigung dieser störenden Einflüsse scheint aber die kurvenmäßige Aufzeichnung von $n_\infty(\varphi)$ und $k_\infty(\varphi)$ möglich.

19. *Ergebnisse.* 1. Ein Apparat wurde beschrieben, der an Stelle des Spektrometertischchens stehend einen Metallspiegel vom Außenraum abgeschlossen zu beobachten ermöglicht, so daß der Spiegel um die senkrechte Achse des Spektrometers gedreht und vollständig justiert werden kann. Der Apparat hielt ein schwaches Vakuum von 0,2 mm wochenlang, oder war mit einem Gas gefüllt, dessen Einwirkungen auf das Metall untersucht werden sollten.

2. Die Wirkungsweise einer Verbindung von Sénarmontkompensator und Savartscher Platte nebst analysierendem Nicol, sowie die dabei auftretenden Interferenzerscheinungen wurden eingehend studiert. Es zeigte sich, daß eine geringe Verdrehung der Hauptschnitte der Savartschen Platte veränderte Interferenzen bewirkt und eine Beobachtungsgenauigkeit erzielt, die mit der der Halbschattenkonstruktionen in Wettbewerb treten kann.

3. Für einen Glimmerkompensator von beliebiger Verzögerung sind Formeln entwickelt, mit Rücksicht auf den weitgehenden Ausgleich der unvermeidlichen Eichungsfehler durch Doppelmessungen.

4. Unter Zugrundelegung der Maxwellschen Hauptgleichungen wurde aus den Fresnelschen Reflexionsformeln ein Ausdruck abgeleitet, der den Polarisationszustand des Lichtes darstellt, das an einem mit einer homogenen Oberflächenschicht von endlicher Dicke bedeckten Metallspiegel reflektiert worden ist. Der Polarisationszustand, durch Amplitudenverhältnis und Phasendifferenz ausgedrückt, ist zufolge der Interferenz der mehrfach in der Schicht reflektierten Strahlen

eine periodische Funktion der Schichtdicke, verbunden mit Dämpfung, falls die Schicht absorbiert.

5. Für die den tatsächlichen Verhältnissen entsprechenden, geringen Schichtdicken von 0,01 Wellenlängen wurde die Reflexionsformel in eine Reihe entwickelt und der Einfluß der zweiten Potenz der Schichtdicke untersucht. Er ergab sich bei dem stark veränderlichen Silber verhältnismäßig groß, da das erste Extremum der periodisch veränderlichen Größen unterhalb einer Schichtdicke von 0,03 Wellenlängen liegt.

6. Die an Silber beobachteten Veränderungen der optischen Konstanten lassen sich durch die gefundenen Formeln befriedigend wiedergeben, wenn man als Schicht molekulares Silber mit den optischen Konstanten annimmt, die Drude berechnet hat. Oxydationsvorgänge scheinen selbst im schwachen Vakuum mitzuwirken, und eine geringe Rückbildung trat während der Bestrahlung ein.

7. Stahlspiegel erwiesen sich gegen atmosphärische Einflüsse nur dann empfindlich, wenn außer Sauerstoff Feuchtigkeit und Kohlendioxyd gleichzeitig vorhanden waren. Kratzen verhindern eine eindeutige Feststellung der Veränderungen des Azimutes der wiederhergestellten, linearen Polarisation.

8. An einem Nickelspiegel wurde gezeigt, daß die durch Behandlung mit Leinen oder mit Alkohol erhaltene Kurve $\psi(\bar{\varphi})$ der Hauptwinkel in erster Annäherung linear verläuft und für jede Behandlungsweise eine andere Richtung hat. Die Konstanten des reinen Metalles sind als Schnittpunkt der Geraden zu erhalten. Der Brechungsindex der Schicht wird durch die Neigung der Geraden bestimmt, falls man die Absorption als verschwindend ansehen kann.

9. Für Messungen unter beliebigen Einfallswinkeln lassen sich die durch Schichten wechselnder Stärke hervorgebrachten Veränderungen an den Größen 2Φ, $\log U_=$ in geeigneter Weise verfolgen, die vom Einfallswinkel sehr wenig abhängen. Dabei sind Φ und $U_=$ mit dem Einfallswinkel φ, der Phasendifferenz Δ der senkrecht und parallel zur Einfallsebene polarisierten Komponenten des reflektierten Lichtes und mit deren Amplitudenverhältnis ψ durch die Beziehungen verbunden:

$$U_m = \sin\varphi \cdot \tan\varphi \cdot \tan P,$$
$$\cos 2P = \cos\Delta \cdot \sin 2\psi,$$
$$\tan 2\Phi = \sin\Delta \cdot \tan 2\psi.$$

An $\log U_m$ drückt sich die durch eine Schicht bewirkte Veränderung am besten aus. Dies läßt eine Versuchsreihe mit einem Silberspiegel erkennen, die außerdem bestätigte, daß die allmählich entstehende Oberflächenschicht von molekularem Silber durch Druck mit dem Polierstahl dem Zustand des reinen, massiven Silbers wieder sehr nahe gebracht wird.

10. Methoden zur Herstellung künstlicher Schichten mit meßbarer Dicke wurden angegeben.

Es sei mir gestattet, an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. Wiener aufrichtig zu danken für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie für das lebhafte Interesse, das er ihr immer entgegengebracht hat, und mit dem er mich ermutigte, diese vor den entscheidenden Versuchen abgebrochene Untersuchung zu einem gewissen Abschluß zu bringen. Auch Herrn Dr. Möbius bin ich für seine wertvolle Unterstützung und Förderung durch Ratschläge dankbar.

Die Versuche wurden im Phys. Inst. d. Universität Leipzig in den Jahren 1912—14 ausgeführt. Soweit möglich, wurden noch einige ergänzende Feststellungen im Jahre 1919, sowie die Durchrechnung und Zusammenstellung der Ergebnisse angeschlossen.

Leipzig, Phys. Inst. d. Universität im Juni 1920.

(Eingegangen 17. Juni 1920.)

3. *Bestimmung des Thomsoneffektes aus dem thermischen Gleichgewicht an einem stromdurchflossenen Drahte;* *von G. Borelius.*

§ 1. Einleitung.

Die Bestimmung der Temperaturabhängigkeit der Thomsonwärme, besonders bei tiefen Temperaturen, ist für die ganze Lehre der Thermoelektrizität von fundamentaler Bedeutung. Die Thomsonwärme scheint aber nur einmal unterhalb 0° C. gemessen worden zu sein, nämlich von Berg[1]), der bei Pt, Fe und Cu zu −75° bis −100° C. hinunterging. Direkte Messungen, die in das tiefe Temperaturgebiet hineinragen, wo für eine ganze Reihe anderer thermischen und elektrischen Erscheinungen die wichtigen Abweichungen von den bei höheren Temperaturen gültigen Gesetzmäßigkeiten auftreten, fehlen somit noch fast vollständig. Nur auf indirektem Wege sind wir über die Thomsonwärme bei tiefen Temperaturen orientiert. Man kann nämlich die Differenz der Thomsonkoeffizienten σ_1 und σ_2 zweier Metalle aus ihrer Thermokraft e_{12} gemäß der Thomsonschen Gleichung:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = T\frac{de_{12}}{dT} \tag{1}$$

berechnen. Das Studium dieser Differenzen[2]) macht zwar bestimmte Gesetzmäßigkeiten wahrscheinlich, zeigt aber, daß die Temperaturfunktion so verwickelt ist, daß direkte Messungen von σ zur vollen Klärung der Sache notwendig erscheinen.

Für Messungen bei tiefen Temperaturen scheint nun keine der bis jetzt benutzten Methoden geeignet zu sein, und das Suchen nach einer passenden Methode hat mich dazu geführt, den Einfluß des Thomsoneffektes auf dem thermischen Gleich-

1) O. Berg, Ann. d. Phys. 32. S. 477. 1910.
2) G. Borelius, Ann. d. Phys. 57. S. 278. 1918.

gewicht an einem stromdurchflossenen Drahte rechnerisch zu studieren und experimentell auszunutzen. Ehe ich zu der Mitteilung der erhaltenen Resultate übergehe, möchte ich aber die verschiedenen Methoden für die Messung der Thomsonwärme, die in der Literatur vorhanden sind, übersichtlich zusammenstellen und die wichtigsten experimentellen Schwierigkeiten und Fehlerquellen, auf die bei der Entwicklung einer neuen Methode geachtet werden muß, kurz besprechen.

§ 2. Verschiedene Methoden zur Messung des Thomsoneffektes und deren wichtigsten Fehlerquellen.

Unter den Methoden, die zur Messung oder Demonstration des Thomsoneffektes vorgeschlagen worden sind, können wir zwei Hauptgruppen unterscheiden.

In der ersten Gruppe wird ein nahe lineares Temperaturgefälle in den untersuchten Stäben durch eine besondere Heizvorrichtung hergestellt. Nach dem Vorgang von Le Roux[1]) sind bei allen späteren Messungen zwei gleiche Stäbe nebeneinander gelegt, in denen die Temperaturgefälle in verschiedenen Richtungen von dem Strome durchflossen werden. Im allgemeinen wird die während einer bestimmten Zeit von dem Strome hervorgebrachte Temperaturdifferenz der Stabmitten mittels eines Thermoelementes observiert und dazu die Temperaturgefälle in diesen Punkten durch seitlich angebrachte Thermoelemente bestimmt. Absolute Werte werden erhalten durch Vergleich mit der Wirkung einer bekannten, unter gleichen Bedingungen entwickelten Joulewärme. In hauptsächlich dieser Weise haben außer Le Roux auch Battelli[2]), Haga[3]), Laws[4]), Schoute[5]), Lecher[6]), Aalderink[7]), Cermak[8]), Koenigsberger und Weiss[9]) gearbeitet. Berg macht

1) E. P. Le Roux, Ann. Chim. Phys. 10. S. 201. 1867.
2) A. Battelli, Phys. Revue 2. S. 722. 1888.
3) H. Haga, Wied. Ann. 28. S. 179. 1886.
4) S. C. Laws, Phil. Mag. 7. S. 560. 1904.
5) C. Schoute, Diss., Groningen 1905, Arch. Néerl. 12. S. 175. 1907.
6) E. Lecher, Ann. d. Phys. 19. S. 853. 1906.
7) A. Aalderink, Arch. Néerl. 15. S. 321. 1910.
8) P. Cermak, Ann. d. Phys. 33. S. 1195. 1910.
9) J. Koenigsberger u. J. Weiss, Ann. d. Phys. 35. S. 1. 1911 und 38. S. 696. 1912.

die Stromstärke in den beiden Stäben etwas verschieden, so daß die Differenz der Joulewärmen die Thomsonwärme gerade kompensiert. Nettleton[1]) kompensiert die Thomsonwärme durch ein Strömen des von ihm untersuchten Quecksilbers. Hall[2]) beobachtet statt der Temperaturen der Stabmitten die Temperaturgradienten an deren Enden.

Die Meßmethoden der zweiten Gruppe gehen von dem thermischen Endzustand an einem stromdurchflossenen Drahte aus. Das nötige Temperaturgefälle und die Thomsonwirkung werden dabei von demselben Strome erzeugt. Die hierhergehörigen Methoden unterscheiden sich durch die verschiedenen Weisen, auf den die kleinen, von der Thomsonwärme herrührenden, mit der Stromrichtung umkehrbaren Temperaturdifferenzen der beiden Drahthälften gemessen werden. Bei sehr hohen Temperaturen sind die Variationen der Lichtwirkung von König[3]) zur Demonstration des Effektes benutzt worden. Worthing[4]) hat in dieser Weise auch quantitative Werte abgeleitet. King[5]) benutzte die Widerstandsänderung mit der Temperatur, um die Thomsonwirkung in einem Kupferdrahte zu messen. An der einen Drahthälfte waren mit geeigneten Abständen zehn Konstantandrähte angelötet, um die Widerstandsänderung zu messen und die Temperaturverteilung thermoelektrisch festzustellen. Die Messungen scheinen jedoch nur die Größenordnung des Effektes richtig gegeben zu haben. Kučera[6]) hat vorgeschlagen, den Thomsoneffekt durch die in einer Brückenschaltung observierte relative Widerstandsänderung der Drahthälfte zu demonstrieren. Nach dem Referate in der Fortschritte der Physik soll sich der Effekt bei Umkehrung der Stromrichtung am Galvanometer zeigen. Dies trifft aber nicht zu, weil, wie ich später in § 5 zeigen werde, der von dem Thomsoneffekte herrührende Galvanometerausschlag der vierten Potenz des Stromes proportional ist und sich somit nicht umkehrt. Die Umkehreffekte rühren von der Asymmetrie der Joulewärme

1) H. R. Nettleton, Proc. Phys. Soc. 25. S. 44. 1912.
2) E. H. Hall, Contr. Jefferson Lab. 4. Nr. 12. 1906.
3) W. König, Phys. Ztschr. 11. S. 913. 1910 und 17. S. 227. 1916.
4) A. G. Worthing. Phys. Rev. 5. S. 445. 1914.
5) R. O. King, Proc. Amer. Acad. 33. S. 353. 1898.
6) B. Kučera, Cas 41. S. 400. 1912; Fortschr. 1912. II. S. 75.

her. Selbst habe ich[1]) den Thomsoneffekt derart ermittelt, daß ich die von den Drahtenden abfließenden Wärmemengen kalorimetrisch maß. Weiteres hierüber wird in § 5 gesagt werden. Eine gute Übereinstimmung der Resultate mit der Gl. (1) scheint für die Brauchbarkeit dieser Methode zu sprechen. In § 6 und 7 möchte ich nun noch eine andere Methode in Vorschlag bringen.

Wir haben guten Grund, zu vermuten, daß mehrere der vorliegenden quantitativen Angaben über die Thomsoneffekte mit bedeutenden Fehlern behaftet sind. Teils weichen sie oft stärker voneinander ab, als was auch noch die chemischen und mechanischen Unterschiede verursachen können und teils ist oft eine Übereinstimmung mit der Thomsonschen Gl. (1) gar nicht vorhanden. Es ist zwar mehrmals behauptet worden, daß das letztere auf eine Ungültigkeit der Thomsonschen Theorie deuten würde. Die gut bestätigte Erfüllung der von dieser Theorie hervorgesagten Beziehung zwischen Peltierwärme und Thermokraft[1]), die wegen des Energieprinzipes mit Gl. (1) äquivalent ist, macht dies aber wenig wahrscheinlich. Jedenfalls sind wir nicht auf dem heutigen Stand der experimentellen Erforschung des Thomsoneffektes zu solchen weitgehenden Schlüssen berechtigt. Die Fehlerquellen, die nach meiner Ansicht zu den erwähnten Unübereinstimmungen die Schuld haben, dürften besonders die folgenden sein.

1. Wenn man, wie bei den älteren Messungen, die Thomsonwirkung eines eine Zeitlang dauernden Stromes auf einem Drahtelemente bestimmen will, kann man nicht vermeiden, daß auch die thermoelektrischen und Jouleschen Wärmewirkungen in anderen Teilen des Drahtes durch die Wärmeleitung störend hinzutreten. Der Einfluß dieser Störungen ist auch sehr schwer zu schätzen. Berg hatte diese Schwierigkeit in der Weise beseitigt, daß er die etwas verschiedenen Stromstärken in den beiden Stäben so regulierte, daß, nachdem mit Strom in der einen Richtung die Verhältnisse konstant geworden waren, nach Umlegung des Stromes im ersten Augenblicke keine Temperaturdifferenz hervortrat. Bei den Methoden, die einem thermischen Gleichgewicht zugrunde

1) G. Borelius, Ann. d. Phys. 56. S. 388. 1918.

liegen, wird es viel leichter, die Temperaturverteilung im ganzen Drahte zu berücksichtigen, und die Methoden unserer zweiten Gruppe haben in dieser Hinsicht einen bedeutenden Vorteil.

2. Bei den Differentialmethoden, die am meisten benutzt worden sind, tritt bei der Temperaturmessung eine besondere Schwierigkeit hinzu. Wenn man die Temperaturdifferenz, während der Strom geht, mit Thermoelementen messen will, muß jedenfalls die eine Lötstelle isoliert angebracht werden. Wenn der Stab nicht sehr dick ist, kann es aber kaum vermieden werden, daß die Temperaturmessung durch die Isolierung sehr unsicher gemacht wird. Nach dem Vorgang von Schoute haben daher mehrere Forscher, um nicht isolierte Thermoelemente benutzen zu können, die Temperaturdifferenz erst nach dem Aufhören des Stromes gemessen, was jedenfalls eine neue Unsicherheit hervorbringt. Berg maß die Temperaturdifferenz bolometrisch. Bei meiner früheren Methode wurden die Thermoelemente nicht an den Drähten, sondern an zwei Kalorimetern angebracht. Da ich in der später beschriebenen Methode das Thermoelement an dem Drahte anbringen möchte, habe ich es aus erwähnten Gründen zweckmäßig gefunden, die Differentialmethode ganz zu verlassen.

3. Mechanische, kristallinische oder chemische Inhomogenität der untersuchten Drähte, wie sie leicht durch Bearbeitung und Erwärmung hervorgebracht werden kann, macht eine Fehlerquelle aus, die wohl von den meisten Forschern anerkannt, vielmals aber sicher unterschätzt worden ist. Eine quantitative Besprechung der Sache erscheint daher zweckmäßig.

Die im Drahtelemente dx pro Einheit der Stromstärke und pro Einheit des Temperaturgradienten entwickelte Thomsonwärme, der scheinbare Thomsoneffekt, wollen wir mit σ_s bezeichnen. Das Energieprinzip gibt die bekannte Gleichung:

$$\sigma_s = e + \frac{d\pi}{dT}, \tag{2}$$

wo e und π Thermokraft und Peltierwärme bezeichnen. Wenn der Draht homogen ist, ist σ_s natürlich gleich dem wahren Thomsoneffekte σ_w. Ist nun eine allmähliche Zustandsvariation vorhanden, ist der Mittelwert e für die Thermokraft in dem

kleinen Drahtelemente dx immer noch bis auf kleinere Größen zweiter Ordnung mit der Thermokraft in der Mitte von dx übereinstimmend und nur eine Funktion von t und x. $\frac{d\pi}{dT}$ wird dagegen auch von $\frac{dT}{dx}$ abhängig, wir haben:

$$\frac{d\pi}{dT} = \frac{\partial \pi}{\partial T} + \frac{\partial \pi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dT}. \tag{3}$$

Der wahre Thomsoneffekt im Punkte x

$$\sigma_w = e + \frac{\partial \pi}{\partial T} \tag{4}$$

ist jetzt von dem observierten Werte σ_s verschieden, und wir finden aus (2), (3) und (4):

$$\sigma_s - \sigma_w = \frac{\partial \pi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dT}. \tag{5}$$

Diese Größe kann einen beträchtlichen Wert annehmen. Denken wir uns z. B. einen Stab, dessen eines Ende bei Zimmertemperatur gehalten wird, während das andere auf eine hohe Temperatur erhitzt wird, wie z. B. bei den Messungen von Lecher, so treten leicht, falls der Stab ursprünglich kalt earbeitet war, und auch sonst nach der Abkühlung zurückbleibende Änderungen auf, die wir einfach nur als eine Funktion der von den verschiedenen Stabteilen erreichten Höchsttemperaturen Θ behandeln wollen. Weiter setzen wir voraus, daß bei einer späteren Bestimmung von σ die Höchsttemperatur des Stabendes $T_{max.} < \Theta_{max.}$ gewesen ist, und daß das Temperaturgefälle im Drahte linear erfolgt. Ersetzen wir ferner die Peltierwärme π gemäß der Thomsonschen Gleichung $\pi = eT$ durch die mehr bekannte Thermokraft pro Grad e, so können wir (5) auch schreiben:

$$\sigma_s - \sigma_w = T \cdot \frac{\partial e}{\partial \Theta} \cdot \frac{\frac{d\Theta}{dx}}{\frac{dT}{dx}} = T \frac{\partial e}{\partial \Theta} \cdot \frac{\Theta_{max.}}{T_{max.}}. \tag{6}$$

Aus Untersuchungen über die nach Erhitzung auf verschiedenen Temperaturen zurückbleibenden Änderungen der Thermokraft, die ich neulichst[1]) vorgenommen habe, ergibt sich, daß $\frac{\partial e}{\partial \Theta}$

1) G. Borelius, Ann. d. Phys. 60. S. 381. 1919.

im Temperaturgebiete zunächst über die Zimmertemperatur Werte von einigen Tausendstel Mikrovolt pro Grad annehmen kann. Da weiter $T > 300$ und $\frac{\Theta_{max.}}{T_{max.}} > 1$ ist, sehen wir, daß die Fehler $\sigma_s - \sigma_w$ in ungünstigen Fällen von der Größenordnung 1 Mikrovolt pro Grad werden kann, dieselbe Größenordnung, die der Thomsoneffekt selbst bei den besten Leitern hat.

Es mag in diesem Zusammenhange bemerkt werden, daß die größten scheinbaren Abweichungen von der Thomsonschen Theorie eben an technischen Eisen gefunden worden sind, deren thermoelektrische Eigenschaften durch thermische Behandlung außerordentlich stark beeinflußt werden können.

Um die Wirkungen der Inhomogenität zu eliminieren, haben mehrere Forscher nach dem Vorgang von Le Roux ihre Stäbe in beiden Richtungen untersucht. Bei den von mir vorgeschlagenen Methoden braucht die Drahtmitte nie mehr als einige Zehner Grade über die Temperatur der Enden erwärmt zu werden, was die behandelte Fehlerquelle viel weniger gefährlich macht als bei den älteren Methoden. Übrigens werden die störenden Peltierwirkungen der Stromstärke proportional, während die Thomsonwirkungen mit der dritten Potenz derselben ansteigen, so daß sie durch Messungen mit verschiedenen Stromstärken getrennt werden können.

§ 8. Berechnung des thermischen Gleichgewichtszustandes.

Wir wollen den thermischen Zustand an einem von dem Strome s Ampere durchflossenen Drahte von der Länge $2l$ cm und dem Querschnitt q qcm berechnen, wenn die Enden des Drahtes an derselben Temperatur, T Grad absolut, gehalten werden. Die verschiedenen Punkte des Drahtes bestimmen wir durch eine x-Koordinate, die von dem Ende gerechnet wird, wo der positive Strom eintritt. Die Temperaturerhöhung im Punkte x gegenüber den Enden bezeichnen wir mit t. Wegen des Thomsoneffektes, der in einer Drahthälfte eine Erhöhung, in der anderen eine Erniedrigung der Temperatur hervorruft, ist t nicht ganz symmetrisch in bezug auf die Drahtmitte. Die durch Umkehrung des Stromes hervorgebrachte Temperaturerhöhung in einem Punkte sei 2τ.

Weiter setzen wir in angenäherter Übereinstimmung mit den wahren Verhältnissen voraus, daß im Temperaturbereiche T bis $T + t_{max.}$ die spezifische Wärmeleitfähigkeit λ Watt/Grad cm konstant ist, der spezifische Widerstand durch $\varrho + \frac{d\varrho}{dT} t$ ausgedrückt werden kann, wo $\frac{d\varrho}{dT}$ konstant ist, und die pro Längeneinheit des Drahtes nach außen abgegebene Wärmemenge gleich $k\eta t$ ist, wo η die konstant angenommene Wärmeleitfähigkeit der Luft ist und k von den Draht- und Apparatdimensionen abhängt. In der Tat ist die Konstanz von λ bei höheren Temperaturen meist eine ausgezeichnete. Bei ganz tiefen Temperaturen nimmt λ mit fallender Temperatur zu, was eine Unsicherheit unserer Resultate zur Folge hat. $\frac{d\varrho}{dT}$ und η kommen im folgenden nur für Korrektionsglieder in Betracht. Dasselbe gilt für die Wirkung der Strahlung. Sie ist für kleine t dieser Größe proportional. Glieder höherer Ordnung kommen doch bald zur Geltung neben dem Linearen. Bei geeignet gewählten Drahtdimensionen ist aber die Strahlung ganz zu vernachlässigen, worüber man sich leicht numerisch überzeugen kann.

Gemäß unseren Voraussetzungen berechnen wir nun, daß ein Drahtelement dx bei Gleichgewicht pro Sekunde die folgenden in Wattsekunden ausgedrückten Wärmemengen aufnimmt. Durch die Joulewärme:

$$\left(\varrho + \frac{d\varrho}{dt} t\right) \frac{s^2}{q} dx,$$

durch die Thomsonwärme:

$$-\sigma s \frac{dt}{dx} dx,$$

durch die Wärmeleitung im Drahte:

$$+\lambda q \frac{d^2t}{dx^2} dx,$$

und durch die äußere Wärmeleitung:

$$-k\eta t dx.$$

Die Summe dieser Beiträge muß bei Gleichgewicht gleich Null sein, und wir bekommen so nach Umformung die folgende Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$\lambda q \frac{d^2 t}{dx} - \sigma s \frac{dt}{dx} - \left(k\eta - \frac{d\varrho}{dt}\frac{s^2}{q}\right) t + \frac{\varrho s^2}{q} = 0. \tag{7}$$

Zur Abkürzung setzen wir:

$$2a = \frac{\sigma s}{\lambda q}; \qquad b^2 = \frac{k\eta}{\lambda q} - \frac{\frac{d\varrho}{dt} s^2}{\lambda q^2}; \qquad c = \frac{\varrho s^2}{\lambda q^2} \tag{8}$$

und bekommen:

$$\frac{d^2 t}{dx^2} - 2a \frac{dt}{dx} - b^2 t = c. \tag{9}$$

Die Integration gibt, da für $x = 0$ und $x = 2l$ $t = 0$ sein soll:

$$t = \frac{c}{b^2}\left[1 - \frac{e^{ax}\left(e^{d(2l-x)} - e^{-d(2l-x)}\right) + e^{-a(2l-x)}\left(e^{dx} - e^{-dx}\right)}{e^{2ld} - e^{-2ld}}\right] \tag{10}$$

wo zur weiteren Abkürzung $\sqrt{a^2 + b^2} = d$ gesetzt worden ist.

§ 4. Angenäherte Gleichungen.

Die Größe ax bzw. $a(2l - x)$ kann immer als eine gegen eins kleine Größe behandelt werden. Ihr Maximalwert ist nämlich:

$$a \cdot 2l = \frac{\sigma s l}{\lambda q}. \tag{11}$$

Auf der anderen Seite ist die Temperaturerhöhung der Drahtmitte, wenn die äußere Wärmeleitung, die Widerstandsänderung und die Thomsonwärme versäumt werden, wie aus (10) berechnet werden kann:

$$t_m = \frac{s^2 l^2 \varrho}{2\lambda q^2}. \tag{12}$$

Aus (11) und (12) finden wir daher:

$$\frac{2al}{\sqrt{t_m}} = \sigma \sqrt{\frac{\lambda \varrho}{2}}. \tag{13}$$

Nun ist $\lambda\varrho$ eine für verschiedene Metalle nahe konstante Größe, die wir zu rund $7 \cdot 10^{-3}$ setzen können, wonach:

$$2al = \sigma' \sqrt{t} \cdot 2 \cdot 10^{-3}, \tag{13'}$$

wenn σ' die in Mikrovolt pro Grad ausgedrückte Thomsonwärme bezeichnet. Da σ' von der Größenordnung 1 bis 10 ist, sehen wir aus (13'), daß, solange t nur wenige Zehner Grad ist, $2al$ klein ist gegen eins.

Wir können daher (unter Vernachlässigung von a) t aus (10) berechnen und finden:

$$t = \frac{\varrho s^2}{2\lambda q} x(2l - x) \cdot \Phi_1, \tag{14}$$

wo Φ_1 eine Funktion ausschließlich von x, l und b ist. Unter Benutzung der Bezeichnungen:

$$z = bl \quad \text{und} \quad \xi = \frac{x}{2l} \tag{15}$$

wird diese Funktion:

$$\Phi_1 = \frac{1 + z^2/3\,(1 - \xi + \xi^2) + z^4/22{,}5\,(1 - 2\xi + 3\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4) + \cdots}{1 + 2/3\,z^2 + 1/30\,z^4 + \cdots} \tag{14'}$$

Auch wenn σ besonders groß ist, stellt (14) immer noch eine gute Näherung für den Mittelwert von t bei Stromumkehrung dar.

Die von der Thomsonwärme abhängige Temperaturänderung

$$\tau = \frac{t_{+s} - t_{-s}}{2}$$

können wir ebenfalls aus (10) approximativ berechnen und finden:

$$\tau = \frac{\sigma \varrho s^2}{6\lambda^2 q^2} x(2l - x)\,(l - x)\,\Phi_2, \tag{16}$$

wo mit den obigen Bezeichnungen (15):

$$\Phi_2 = \frac{1 + z^2/5\,(1 - 2\xi + 2\xi^2) + z^4/210\,(1 - 4\xi + 7\xi^2 - 6\xi^3 + 3\xi^4) + \cdots}{1 + 2/3\,z^2 + 1/30\,z^4 + \cdots} \tag{16'}$$

§ 5. Verschiedene Möglichkeiten, um die Temperaturverteilung am Drahte für die Messung der Thomsonwärme auszunutzen.

1. Ich habe, wie schon erwähnt, bei einer früheren Gelegenheit die Thomsonwärme aus den von den Enden des Drahtes abfließenden Wärmemengen ermittelt. Die Enden des Drahtes wurden zu zwei kleinen Kalorimetern angeschlossen, die in verhältnismäßig guter wärmeleitender Verbindung mit der Umgebung waren, so daß die Kalorimeter nur eine kleine Temperaturdifferenz erhielten. Die hierdurch herabgesetzte Empfindlichkeit bei der Messung der Temperaturdifferenz der Kalorimeter wurde durch Nacheinanderkoppelung mehrerer Thermopaare wieder vergrößert. Da früher der Einfluß der äußeren Wärmeleitung und der Änderung des Widerstandes nicht diskutiert wurden, gebe ich hier etwas vollständigere Ausdrücke wieder.

Die nach Erreichen des Endzustandes gemessene Temperaturdifferenz der Kalorimeter ergibt sich, falls wir die Wärmeableitung von den Kalorimetern zu der Umgebung von der Temperatur T pro Grad Temperaturdifferenz mit W bezeichnen, zu:

$$\Delta\tau = \frac{\lambda q}{W}\left[\left(\frac{d\tau}{dx}\right)_{x=0} - \left(\frac{d\tau}{dx}\right)_{x=2l}\right], \tag{17}$$

oder gemäß (16) angenähert für nicht zu große z-Werte:

$$\Delta\tau = \frac{2\sigma\varrho s^2 l^2}{3\lambda^2 q^2} \cdot \frac{1 + {}^1/_5 z^2 + \cdots}{1 + {}^2/_3 z^2 + \cdots}. \tag{18}$$

Weiter wurde die Temperatur t_m an der Drahtmitte gemessen, für die wir aus (14) und (14') dem angenäherten Ausdrucke berechnen:

$$t_m = \frac{\varrho s^2 l^2}{2\lambda q} \cdot \frac{1 + {}^1/_4 z^2 + \cdots}{1 + {}^2/_3 z^2 + \cdots}. \tag{19}$$

Durch Division der beiden Ausdrücke (18) und (19) finden wir für die Thomsonwärme:

$$\sigma = \frac{3}{4} W \frac{\Delta\tau}{t_m s} \cdot \frac{1 + {}^1/_4 z^2 + \cdots}{1 + {}^1/_5 z^2 + \cdots}. \tag{20}$$

Bei dieser Berechnung haben wir aber die kleinen Temperaturänderungen der zu den Kalorimetern angeschlossenen Drahtenden verzäumt. Der diesbezügliche Korrektionsfaktor ergibt sich aus meiner früheren Arbeit zu $\left(1 + \frac{q\lambda}{W}\right)\left(1 + 2\,\frac{q\lambda}{W}\right)$, und der vollständige Ausdruck lautet:

$$\sigma = \frac{3}{4} W \frac{\Delta\tau}{t_m s}\left(1 + \frac{\lambda q}{W}\right)\left(1 + 2\frac{\lambda q}{W}\right)\frac{1 + {}^1/_4 z^2 + \cdots}{1 + {}^1/_5 z^2 + \cdots}. \tag{21}$$

Bei meinen erwähnten Messungen nach dieser Methode wurde W durch Kalibrieren der Meßanordnung mit der bekannten Peltierwärme eines Kupfer-Konstantanelementes bestimmt. Auf die Korrektionsgröße z wurde keine Rücksicht genommen. Die äußere Wärmeleitung wurde aber durch Wattepackung möglichst herabgesetzt, und da der Korrektionsfaktor nur etwa $1 + 1/20\, z^2$ beträgt, ist die Vernachlässigung, wie eine Überschlagberechnung von z leicht ergibt, gerechtfertigt.

2. Ich habe weiter die Möglichkeit untersucht, die Thomsonwärme aus den von ihr hervorgebrachten relativen Widerstandsänderungen der beiden Drahthälfte zu ermitteln. Diese Methode kann natürlich nur bei reinen Metallen in Frage kommen, die

einen beträchtlichen Temperaturkoeffizienten des spezifischen Widerstandes haben. Die von der Thomsonwärme herrührende Widerstandsänderung des Längenelementen dx ist durch:

$$dr = \frac{dx}{q}\,\frac{d\varrho}{dt}\cdot\tau \tag{22}$$

gegeben, wo τ aus (16) erhalten wird. Die durch die Thomsonwärme hervorgerufene Potentialänderung der Drahtmitte bei der Stromstärke s ist dann:

$$p = 2s\int_0^{\frac{l}{2}} dr = \frac{2s}{q}\,\frac{d\varrho}{dt}\int_0^{\frac{l}{2}}\tau\,dx,$$

und, wenn wir der Einfachheit halber die Größe b versäumen, gemäß (22), (16) und (19):

$$p = \frac{\sigma}{3}\cdot\frac{\varrho^2 s^4 l^4}{4\lambda^2 q^4}\cdot\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\sigma}{3}t_m^2\cdot\frac{1}{\varrho}\,\frac{d\varrho}{dt}. \tag{23}$$

p kann in der Wheatstoneschen Brückenschaltung der Fig. 1 gemessen werden. AB ist der Meßdraht, AC und BC zwei gleiche Drähte relativ großen Widerstandes, die ganz auf der Temperatur T gehalten werden. Auf derselben Temperatur wird auch das Ende E des Brückendrahtes DE gehalten. Die am Galvanometer beobachtete Potentialdifferenz p ist der vierten Potenz der Stromstärke proportional. Zu dieser Wirkung addiert sich aber eine störende Wirkung, die von dem Temperaturderivate der Thermokraft im Brückenkreise abhängt und nur dadurch eliminiert werden kann, daß der Brückendraht DE von derselben Art ist wie der Meßdraht AB.

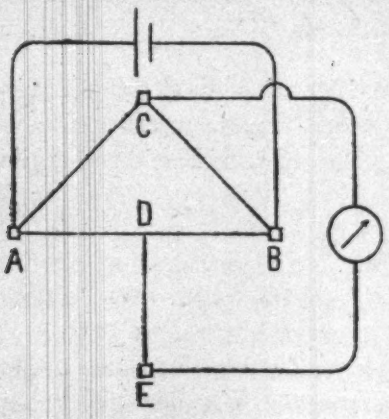


Fig. 1.

Die Methode dürfte wohl für die Messung der Thomsonwärme bei tiefen Temperaturen geeignet sein. Ein Vorteil ist es, daß die Thomsonwärme in Beziehung zu der leicht bestimmbaren Größe $\frac{1}{\varrho}\,\frac{d\varrho}{dt}$ gesetzt wird. Unangenehm ist dagegen, daß es sehr schwer zu vermeiden ist, daß bedeutende,

den ersten, zweiten und dritten Potenzen der Stromstärke proportionale Wirkungen sich zu dem gesuchten, der vierten Potenz proportionalen addieren. Die Potentialdifferenz p ist weiter, wenn man die Temperaturerhöhung t_m auf wenige Zehner Grad beschränken will, wie aus (23) zu sehen ist, so klein, daß ein Panzergalvanometer zu ihrer Messung fast notwendig wird.

3. Eine dritte Methode besteht darin, daß τ und t an geeigneten Punkten des Drahtes thermoelektrisch oder bolometrisch gemessen werden. Aus (16) und (17) finden wir nämlich für den Quotienten dieser Größen:

$$\frac{\tau}{t} = \frac{\sigma s}{\lambda q} F(xl)\Phi_3(\xi, z) \tag{24}$$

aus dem das Verhältnis $\frac{\sigma}{\lambda}$ erhalten werden kann. Da nun λ bei höheren Temperaturen konstant ist und auch bei tieferen Temperaturen bei mehreren Metallen gemessen worden ist, scheint dieser Weg für die Messung der Thomsonwärme gangbar zu sein.

τ bekommt, wenn die Einwirkung der äußeren Wärmeleitung klein ist, wie aus (16) leicht abgeleitet werden kann, seinen maximalen Wert bei

$$x = l \pm \frac{l}{\sqrt{3}}, \text{ d. h. für } \xi = \frac{x}{2l} = 0{,}211 \text{ und } 0{,}789. \tag{25}$$

Um τ zu messen, würde man wohl in erster Hand daran denken, an diesen beiden Punkten die Lötstellen eines Thermopaares anzubringen. Diese müßten aber isoliert angebracht werden und um die schon erwähnte schädliche Einwirkung der Isolierung zu beseitigen, müßte der Meßdraht beträchtliche Dicke haben. Dies setzt aber große Apparatdimensionen und Stromstärken voraus, die besonders bei tiefen Temperaturen unangenehm werden würden. Auch eine bolometrische Messung von τ läßt sich, wenn man die Metalle in der Form von Drähten untersuchen will, kaum bewerkstelligen. Ich habe daher τ und t an einem einzigen Punkte des Drahtes in der Nähe des Maximums für τ mit demselben Thermoelemente gemessen. Da dabei τ und t denselben x-Wert haben, finden wir aus (16) und (17) durch Division und Umformung:

$$\frac{\sigma}{\lambda} = \frac{\tau}{t} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{8q}{l-x} \cdot \Phi_4, \tag{26}$$

wo

$$\Phi_4 = \frac{1+{}^1/_3 x^2(1-\xi+\xi^2)+{}^1/_{22,5} x^4(1-2\xi+3\xi^2-2\xi^3+\xi^4)+\ldots}{1+{}^1/_5 x^2(1-2\xi+2\xi^2)+{}^1/_{210} x^4(1-4\xi+7\xi^2-6\xi^3+3\xi^4)+\ldots} \tag{26'}$$

ist.

Da im obigen Ausdrucke nur das Verhältnis von τ und t vorkommt, und dazu die beiden Größen mit demselben Thermoelement gemessen werden, braucht man für eine angenäherte Berechnung von $\frac{\sigma}{\lambda}$ sogar nicht die Thermokraft des Elementes zu kennen. Nötige Korrektionen werden in § 7 behandelt. Da τ auf etwa den ${}^1/_{100\,000}$ Teil von t genau gemessen werden muß, kann τ natürlich nicht als Variationen in t an einem Galvanometer direkt beobachtet werden, sondern man muß bei der Messung von τ den größten Teil von t in geeigneter Weise kompensieren.

§ 6. Meßanordnung.

Die dritte der in dem vorigen Paragraphen behandelten Methoden ist weiter experimentell ausgeführt worden und zunächst für die Messung der Thomsonwärme an Kupfer zwischen 100° und 400° absolut benutzt worden. Fig. 2 zeigt eine schematische Wiedergabe der Anordnung.

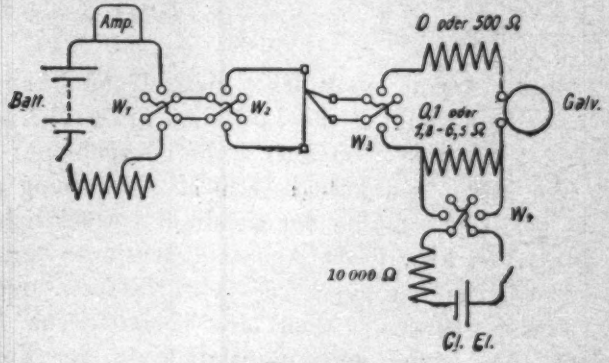


Fig. 2.

Ein gut konstanter Strom von einer 20 Volt Akumulatorenbatterie ging durch Amperemeter und Regulierwiderstand über zwei nacheinander gekoppelten Stromwendern W_1 und W_2 durch den Meßdraht hindurch. Die Temperaturerhöhung in einem

geeigneten Punkte desselben wurde durch das Thermoelement am Galvanometer beobachtet. Der Widerstand im Galvanometer war 6 Ohm, im Thermoelemente und Zuleitungen etwa 2,5 Ohm. Bei der Messung der ganzen Temperaturerhöhung t war der äußere Widerstand 505 Ohm. Die Thermokräfte im Galvanometerkreise wurden mit Hilfe von dem ganz aus Kupfer verfertigten Stromwender W_3 eliminiert. Die Voltempfindlichkeit der Anordnung wurde mit einem Clarkelement in Nebenschluß mit dem großen Widerstande von 10000 Ohm gemessen.

Bei der Messung von τ wurde der größte Teil der elektromotorischen Kraft des Thermoelements mit dem Clarkelemente kompensiert, wobei der Widerstand zwischen den Anlegepunkten des Kompensationskreises 1,8—6,3 Ohm betrug, sonst aber war kein Widerstand dem Galvanometer vorgeschaltet. Die Voltempfindlichkeit der Anordnung in diesem Falle wurde nachträglich mit 0,1 Ohm zwischen den Anlegepunkten beobachtet, und war im Maximum etwa 10^{-8} Volt/Skalencm bei 2,4 m Skalenabstand.

Zur Messung von τ muß der Heizstrom kommutiert werden. Da aber schon eine Schwankung dieses Stromes auf 0,001 seines Betrages dieselbe Wirkung hat, wie der in Kupfer gemessene Thomsoneffekt, war es notwendig auch der kleinen Widerstandsänderung, die bei der Umlegung eines Stromwenders auftritt, Rechnung tragen. Dieser Einfluß konnte nun durch die zwei nacheinander gekoppelten Stromwender W_1 und W_2 eliminiert werden. Erst wurde W_1, z. B. in +-Lage gestellt und eine Reihe Kommutierungen mit W_2 vorgenommen und dann mit W_1 in —-Lage dasselbe Verfahren wiederholt. τ fällt dabei in einem Falle zu groß, in anderem ebensoviel zu klein aus, so daß der Mittelwert ohne diesen Fehler auftritt.

Um die äußere Wärmeleitung beherrschen zu können müssen der Meßdraht und die Thermoelemente ins Vakuum hineingebracht werden können. Fig. 3 zeigt die Vakuumanordnung, die mit einer Molekularpumpe evakuiert wurde. Als Vakuumprüfer diente ein kleines Geißlerrohr. Die Zuleitungen zum Meßdrahte und Thermoelemente wurden oben durch vier Glasröhrchen eingeführt, die mit Picein gedichtet wurden. Um den Enden des Meßdrahtes und des Thermo-

elementes gleiche Temperatur zu geben, waren sie an eine Metallanordnung besonderer Bauart befestigt, die im unteren Ende eines Glasrohres angebracht wurde, die seinerseits in ein Temperaturbad eintauchte.

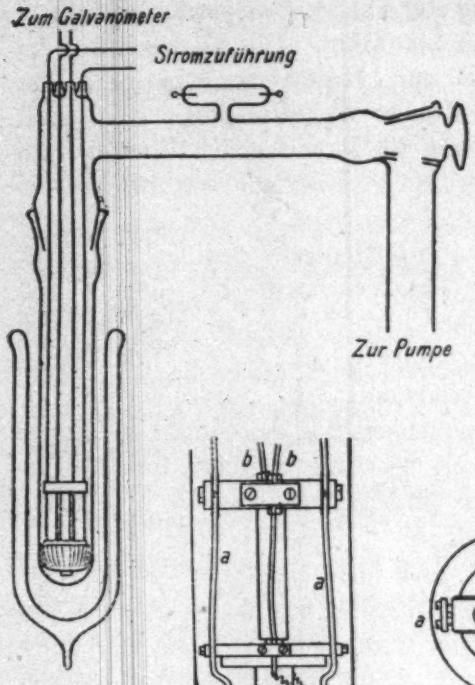


Fig. 3.

Die nähere Anordnung von Meßdraht und Thermoelementen wird durch Fig. 4 erläutert. Die von oben kommenden vier Drähte wurden zuerst an den vier Seiten eines Messingstückes *a*

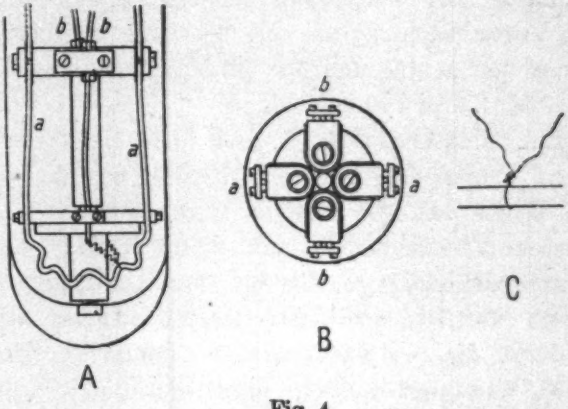


Fig. 4.

mit dünner Glimmerisolierung angemacht. Hier findet dann eine erste Ausgleichung der von oben kommenden thermischen Störungen statt. Die Drähte gingen dann weiter zu einer mit den Messingstücken verbundenen Kupferscheibe (vgl. auch Fig. 4 B), die vier glimmerisolierte Kupferscheiben trug, an denen die Drähte festgemacht werden. An einem von der Scheibe ausgehenden Zapfen saß noch eine Kupferschale, die Meßdraht und Thermoelement umhüllte. Die Schale war meridional aufgeschnitten und lag federnd an die Glaswandung an, damit die Wärmeausbeute mit dem Temperaturbade die bestmögliche werden sollte.

Es war jedoch nicht möglich, mit Hochvakuum zu arbeiten, weil dabei die Wärmeleitung so schlecht wurde, daß durch die bedeutende im Apparate erzeugte Joulewärme die Temperatur des Apparates allmählich bedeutend über die des Bades anstieg. Im allgemeinen wurde daher mit einem Druck von etwa 1 mm Hg mit geschlossenem Hahn und stillstehender Pumpe gearbeitet, und nur wenn die Korrektion wegen äußerer Wärmeleitung bestimmt werden sollte, wurde Hochvakuum angelegt.

Wegen des beschränkten Platzes war der Meßdraht mehrmals hin und her gebogen. Das Thermoelement, aus isoliertem 0,1 mm Kupfer und 0,2 mm Konstantandrahte bestehend, war wie in Fig. 3C zu sehen ist, angebracht. Der Kupferdraht war einmal um den Meßdraht gewunden und daran vorsichtig angelötet. Die Lötstelle des Thermoelementes lag außerhalb des Meßdrahtes, so daß der Strom im Meßdrahte keine Potentialdifferenz im Thermoelementkreise direkt hervorrufen konnte Wenn dabei die Lötstelle der Thermopaare nicht genau die Temperatur des Drahtes bekommt, hat dies für die Messung des Thomsoneffektes nichts zu bedeuten, da nur die relativen Änderungen der Temperatur in der Formel (26) eingehen.

§ 7. Messung der Thomsonwärme des Kupfers zwischen 100° und 400° absolut.

1. *Material.* Die Methode ist zuerst an Kupfer geprüft, das eine recht kleine Thomsonwärme hat, so daß die Prüfung ziemlich scharf erfolgen konnte. Der untersuchte Draht war ein 0,8 mm isolierter Leitungsdraht von Max Sieverts Kabelwerke in Stockholm. Der Querschnitt wurde durch Auswägung in Wasser zu $q = 0{,}497$ qmm bestimmt. Der spezifische Widerstand bei 18° war 0,01695 Ohm-cm und zeigt eine recht hohe Reinheit an. Die Länge des Meßdrahtes zwischen den Endkontakten war $2l = 21{,}74$ cm, das Thermoelement war bei $x = 4{,}13$ cm von dem einen Ende angebracht, was

$$\xi = \frac{x}{2l} = 0{,}190$$

gibt, einen Wert, der etwas kleiner geworden ist als der theoretisch günstige Wert $\xi = 0{,}211$ (vgl. 25).

2. *Badtemperaturen.* Messungen wurden bei den folgenden vollständig oder nahe konstanten absoluten Temperaturen des Bades vorgenommen: 89° (flüssige Luft), 196° (Kohlensäureschnee und Alkohol), 254° (Eis, Wasser und Kochsalz), 273° (Eis und Wasser), 373° (Wasser am Siedepunkte). Dazu wurde bei langsam veränderlicher Temperatur Messungen bei vier zwischenliegenden Temperaturen vorgenommen. Das Temperaturgebiet zwischen 89° und 196° wurde derart durchgemacht, daß das Dewargefäß mit Bleihagel und Drehspänen ausgefüllt wurde, die zuerst mit flüssiger Luft gekühlt dann zu langsamer Erwärmung überlassen wurde. Die Temperatursteigerung betrug dabei etwa 20° pro Stunde. Die tiefen Temperaturen wurden mit einem an der Reichsanstalt kontrollierten Flüssigkeitsthermometer gemessen. Bei den Messungen unter Gang wurden aber die Temperaturen des Apparates sicherer aus der gemessenen, von dem Strom hervorgebrachten Temperaturerhöhung des Meßdrahtes berechnet. Die bei Gang berechneten Temperaturen sind natürlich unsicherer als die übrigen und werden deshalb in der Tabelle auf S. 865 eingeklammert.

3. *Die Temperaturerhöhung t* wurde mit dem Thermoelement an dem auf seiner Voltempfindlichkeit kalibrierten Galvanometer gemessen. Die Thermokraft des Kupfer-Konstantanelementes, dessen Absolutwert eigentlich nur für diese nicht sehr wichtige Messung von t nötig zu kennen ist, wurde wegen der Knappheit der verfügbaren flüssigen Luft nur bei höheren Temperaturen gemessen. Durch Messungen von Nernst und Schwers[1]) und von Wietzel[2]) an Kupfer-Konstantenelementen mit verschiedenen Konstantansorten ist es aber wahrscheinlich, daß die Thermokraft verschiedener solcher Elemente eine sehr ähnliche Temperaturabhängigkeit zeigen, so daß ich bei tiefen Temperaturen die von Nernst angegebenen Zahlen, mit dem empirischen Faktor 1,12 multipliziert, benutzt habe. Die Temperaturerhöhung der Drahtmitte ($x = l$) ist nach (14) 1,62 mal des für $\frac{x}{2l} = 0{,}190$ gemessenen Wertes. Die mittlere Temperatur des Drahtes ist somit $T + 0{,}81\,t$, welche Größe in der Schlußtabelle eingeführt worden ist.

1) W. Nernst und F. Schwers, Ber. d. Preuß. Akad. 1914.
2) G. Wietzel, Ann. d. Phys. 43. S. 605.

4. *Angenäherte Bestimmung von σ/λ.* Bei einer Stromstärke von $s = 6$ bis 10 Amp. wurde die Temperaturänderung wegen des Thomsoneffektes τ nach Kompensation des größten Teiles von t am Galvanometer gemessen. Während der eine Stromwender W_1 in eine Lage gestellt war, wurde W_2 wenigstens 14 mal kommutiert. Die Ablesungen geschahen mit Zwischenzeiten von zwei Minuten, und das Kommutieren wurde bald nach der Ablesung vorgenommen. Eine ähnliche Serie wurde dann mit W_1 in zweiter Lage aufgenommen. Wenn Gang in der Temperatur vorhanden war, wurde dazu noch eine dritte Serie mit W_1 wieder in erster Lage ausgeführt. Ein unter Umständen recht beträchtlicher Gang in diesen Serien war nicht zu vermeiden. Der Einfluß des Ganges wurde graphisch eliminiert. Der mittlere Ausschlag an der Galvanometerskala war im Maximum nur 1 cm. Durch die vielen Kommutierungen konnte es jedoch im allgemeinen auf ein paar Zehntel mm genau bestimmt werden. Aus der Stromstärke s, den Ausschlägen Δ_1 und Δ_2 entsprechend τ und t und den entsprechenden Voltempfindlichkeiten α_1 und α_2 des Galvanometers kann ein Näherungswert σ'/λ ohne Kenntnis der Thermokraft des Elementes bestimmt werden, nämlich (vgl. 26):

$$\frac{\sigma'}{\lambda} = \frac{3q}{l-x} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{\Delta_1 \alpha_1}{\Delta_2 \alpha_2}. \tag{27}$$

Die so berechneten Werte σ'/λ sind in der Tabelle eingetragen. Die Messung bei $+ 49^0$ C. ist wegen besonders ungünstige Verhältnisse während der Messung unsicherer als die übrigen und daher eingeklammert.

5. *Korrektion wegen Änderung der Thermokraft* des Kupfer-Konstantanelementes mit der Temperatur. t wird bei einer mittleren Temperatur des Thermoelementes von $T + {}^1/_2 t$ gemessen, τ dagegen bei der Temperatur $T + t$, wofür der obige Ausdruck mit $\frac{e_{T+{}^1/_2 t}}{e_{T+t}}$ zu multiplizieren ist. Diese Größe ist in der Tabelle wiedergegeben.

6. *Korrektion wegen äußerer Wärmeleitung und Widerstandsänderung.* Eine zweite schwer bestimmbare Korrektionsgröße ist die Funktion Φ_4 in der Gleichung (26), die mit unserem Wert von $\xi = 0{,}190$ angenähert gleich wird:

$$\Phi_4 = \frac{1 + 0{,}282\, z^2}{1 + 0{,}137\, z^2}. \tag{28}$$

Die Größe $z^2 = b^2 l^2$ ergibt sich aus (8) zu

$$z^2 = b^2 l^2 = \frac{k l^2}{q} \cdot \frac{\eta}{\lambda} - \frac{\frac{d\varrho}{d\tau} s^2 l^2}{\lambda q^2}, \tag{29}$$

worin alle Größen mit Ausnahme von k einigermaßen bekannt sind. λ und $\frac{d\varrho}{d\tau}$ wurden (vgl. später unter 7) den Messungen von Meissner entnommen. Für die Temperaturabhängigkeit von η wurden Messungen von Eucken[1]) zugrunde gelegt.

Die Konstante k wurde aus einem bei Zimmertemperatur $T + 0{,}81\, t = 305^0$ erhaltenen Wert von $z^2 = 0{,}63$ berechnet. Dieser Wert von z^2 wurde seinerseits gemäß der Gl. (14) aus

$$\Phi = \frac{t}{t_0} = \frac{1 + 0{,}202\, z^2}{1 + 0{,}667\, z^2} \tag{30}$$

berechnet. t_0 ist hier die Temperaturerhöhung, wenn äußere Wärmeleitung und Widerstandsänderung beseitigt sind. Die äußere Wärmeleitung wurde dadurch verhindert, daß die Messungen im äußersten Vakuum vorgenommen wurden. Die Strahlung spielt hier eine untergeordnete Rolle. Um die Widerstandsänderung zu eliminieren, wurde t/s^2 bei verschiedenen Stromstärken gemessen und der Grenzwert dieser Größe bei $s = 0$ extrapolatorisch bestimmt und benutzt.

Die aus (28) und (29) berechneten Φ_4 sind in der Schlußtabelle eingetragen. Man sieht, daß die Korrektion, die ja recht unsicher ist, doch höchstens nur 15 Proz. ausmacht.

7. *Die Wärmeleitfähigkeit* des Kupfers habe ich einer Arbeit von Meissner[2]) entnommen. Meissner hat die Wärmeleitfähigkeit und den spezifischen Widerstand zwischen 20° und 375° absolut u. a. an zwei elektrolytischen Kupferproben Cu I und Cu II gemessen. Cu I, der als ganz besonders rein angegeben wird, hatte bei 18° den spezifischen Widerstand $\varrho = 1{,}673 \cdot 10^{-6}$ Ohm cm. Für Cu II war $\varrho = 1{,}712$. Für den von mir benutzten Draht war nun $\varrho = 1{,}695$ gefunden, und liegt somit zwischen diesen beiden Werten. Ich habe dann

1) A. Eucken, Phys. Ztschr. 14. S. 324. 1913.
2) W. Meissner, Ann. d. Phys. 47. S. 1001. 1915.

in Übereinstimmung mit diesen Zahlen die Wärmeleitfähigkeit λ sowie die für die unter 6 diskutierten Korrektionsrechnungen nötige Größe $\frac{d\varrho}{dt}$ für verschiedene Temperaturen aus den von Meissner für Cu I und Cu II angegebenen Zahlen interpoliert. Die Werte von λ sind in der Tabelle eingetragen.

Tabelle 1.

T wird in absoluten Graden angegeben, die Wärmeleitfähigkeit λ in Watt cm^{-1} $Grad^{-1}$ und die Tbomsonwärme σ in Mikrovolt pro Grad.

T	$T + 0{,}81\,t$	σ'/λ	λ	$\frac{e_{T+1/2\,t}}{e_{T+t}}$	Φ_4	$\sigma_{korr.}$
89	101	− 0,040	4,5	0,96	0,92	− 0,16
[130]	[146]	+ 0,031	4,0	0,96	0,96	+ 0,11
[142]	[160]	0,073	4,0	0,96	0,97	0,27
196	215	0,250	3,89	0,96	1,025	0,96
[232]	[248]	0,312	3,89	0,975	1,055	1,25
254	271	0,346	3,89	0,97	1,07	1,40
273	287	0,377	3,89	0,98	1,085	1,56
322	334	[0,465]	3,89	0,985	1,11	[1,98]
373	385	0,493	3,89	0,99	1,15	2,18

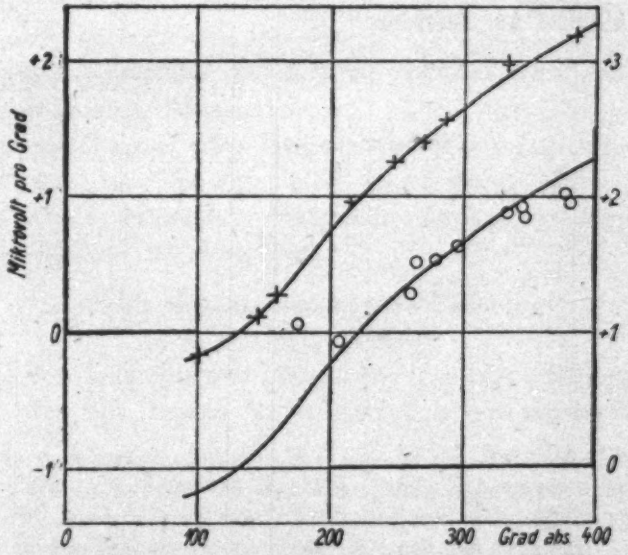


Fig. 5.

8. *Die korrigierten Resultate für* σ sind dann in der letzten Kolumne der Tabelle berechnet. Die Thomsonwärme als Funktion der Temperatur ist auch in der Fig. 5 dargestellt. Das obere Bild zeigt, daß die zufälligen Beobachtungsfehler merklich klein zu sein scheinen. Das untere Bild zeigt, wie die von Berg erhaltenen Werte im Verhältnis zu meiner Kurve liegen. Die Übereinstimmung ist im Temperaturbereiche um 300° abs. ausgezeichnet. Bei der tiefsten von Berg erreichten Temperatur ist die Abweichung dagegen bedeutend. Bei hohen Temperaturen etwa zwischen 200° und 700° C. hat Lecher die Thomsonwärme des Kupfers gemessen und seine Resultate in der Formel

$$\sigma = 0{,}24\,[3{,}01 + 0{,}00662\,t]\cdot 10^{-7}\ \text{Volt/Grad}$$

zusammengefaßt. Dies scheint nun keine gute Fortsetzung meiner Kurve zu geben. Die Werte von Lecher sind hierzu um etwa $^1/_3$ zu klein. Die Ursache zu dieser Unübereinstimmung kann mancherlei sein. Am wahrscheinlichsten scheint mir jedoch die Annahme, daß die in § 2 unter 3 besprochene Fehlerquelle bei Lecher eine bedeutende Rolle gespielt hat.

Einen Vergleich meiner Resultate mit der Theorie behalte ich einer späteren Arbeit vor. Ich beabsichtige auch mit verbesserten experimentellen Anordnungen die Untersuchung auf andere Metalle auszudehnen.

Lund, Physikalisches Institut der Universität, Mai 1920.

(Eingegangen Juni 1920.)

4. *Über Heuslersche Legierungen. II. Teil. Magnetische Messungen an Heuslerschen Aluminium-Manganbronzen mit hochprozentigem Eisengehalt;* von *O. v. Auwers.*

Inhaltsangabe: I. Einleitung. — II. Die Instrumente und ihre Methoden: A. Das Magnetoskop; B. Die du Boissche Wage; C. Das Magnetometer. — III. Die Messungen und ihre Ergebnisse. — IV. Schluß.

I. Einleitung.

Ein kurzer historischer Überblick über die Arbeiten des Physikalischen Institutes der Universität Marburg auf dem Gebiet der ferromagnetischen Heuslerschen Legierungen wurde kürzlich an anderer Stelle gegeben[1]) und eine Untersuchung über den Einfluß stark ferromagnetischer Beimengungen auf die Magnetisierbarkeit dieser Legierungen in Aussicht gestellt. Wie es bekannt ist, daß beispielsweise 25 prozent. Nickelstahl, dessen beide Komponenten ferromagnetisch sind, innerhalb des Temperaturintervalles von — 20 bis + 580° C. paramagnetisch sein kann[2]), läßt sich die Frage, welchen Einfluß ferromagnetische Beimengungen auf die Magnetisierbarkeit ferromagnetischer Aluminium-Manganbronzen haben, keineswegs ohne weiteres entscheiden. Die Aufgabe der folgenden Arbeit soll es daher sein, über die Ergebnisse magnetischer Messungen an Heuslerschen Aluminium-Manganbronzen[3]) mit hochprozentigem Eisengehalt zu berichten.

II. Die Instrumente und ihre Methoden.

A. Das Magnetoskop.

Bei den magnetischen Untersuchungen des genannten Institutes wird seit langem für orientierende Voruntersuchungen

1) O. v. Auwers, Zeitschr. f. anorg. Chemie 108. S. 49—69. 1919.

2) J. Hopkinson, Proc. Roy. Soc. Dez. 1889, Jan. 1890, Mai 1890.

3) Die Untersuchung wurde auch dadurch nahegelegt, daß dieses Material in der Technik während des Krieges mit dem auf S. 888 angegebenen Eisengehalt verwendet werden mußte.

ein von F. Richarz angegebener Apparat benutzt, der als Magnetoskop in der hier benutzten Ausführung schon mehrfach[1]) beschrieben ist. Es kann deshalb von der Angabe der Einzelheiten mit Rücksicht auf die Platzbeschränkung abgesehen werden. Im wesentlichen bestand er aus einem in einem doppelwandigen, mit Wasserkühlung versehenen Glaskasten untergebrachten astatischen Nadelpaar, dessen Ausschläge mit Spiegel und Skalenfernrohr abgelesen wurden.

An ihm können die magnetischen Umwandlungspunkte[2]) der Bronzen bestimmt werden, indem die Skalenausschläge des Gehänges als Ordinaten auf eine Temperaturabszisse eingetragen werden. Das Verschwinden und Wiederkehren des Ferromagnetismus der Proben, die in unmittelbarer Nähe des Magnetoskop in einem Ölbad erhitzt werden, drückt sich auf diese Weise deutlich in den gewonnenen Kurven aus.

Zur Alterung der Bronzen diente eine besondere Anlage des Institutsneubaus, die das von A. Semm (a. a. O. S. 29) beschriebene System der Thermosyphonkühlung des Automobilbaus verwirklichte; für die langsamen Abkühlungsversuche ein elektrischer Ofen.

B. Die du Boissche Wage.

Bei dem schon kurz angedeuteten hohen Eisengehalt der vorliegenden Heuslerschen Legierungen war der Gedanke naheliegend, zur Messung der Proben die magnetische Wage von H. du Bois zu benutzen, die praktisch und theoretisch in der Zeitschrift für Instrumentenkunde[3]) beschrieben ist; doch ergab sich dabei nur eine etwa 0,5 prozent. Ausnutzung des durch die Konstitution gegebenen Meßbereiches (bei Eisensorten 75 Proz.), so daß auf die Wiedergabe der Resultate verzichtet werden kann. — Der Arbeit von P. Asteroth haften die gleichen Mängel an.

1) P. Asteroth, Inaug.-Diss. Marburg 1907. S. 36; W. Preusser, Inaug.-Diss. Marburg 1908. S. 56; A. Semm, Inaug.-Diss. Marburg 1915. S. 27 u. a. a. O.

2) E. Take, Diss. Marburg 1904; Schr. d. Ges. z. Bef. d. ges. Natw. z. Marburg 13, 6. S. 302ff. 1906; Ann. d. Phys. 20. S. 849ff. 1906; Verh. d. D. Phys. Ges. 12. S 1059–84. 1910; Gött. Abh. NF. 8, 2. S. 104ff. 1911.

3) H. du Bois, S. 75f.; Instrumentenkde. S. 113ff. u. 129ff. 1900; vgl. auch P. Asteroth, a. a. O. S. 24ff. und E. Take, Schr. d. Ges. z. Bef. d. ges. Natw. zu Marburg 13, 6. S. 307ff. 1906.

C. Das störungsfreie Magnetometer.

1. Ursprüngliche Form.

Man mußte sich deshalb nach einer anderen Apparatur umsehen.

Ein magnetisches Meßinstrument besonderer Art gibt H. Tobusch[1]) an. Es ist im Grunde genommen ein empfindliches Magnetometer, das Tobusch für Untersuchungen über die magnetische Nachwirkung konstruiert hatte. Ein derartiges Instrument konnte unter Beibehaltung seiner Eigenart durch Wickelung größerer Spulen und Anbringung längerer Querschienen für magnetometrische Messungen bei höheren Feldstärken umgebaut und durch Konstruktion eines besonders leichten Gehänges so empfindlich gemacht werden, daß es der vorliegenden Aufgabe gerecht werden konnte.

Die ursprüngliche Form dieses „Tobusch-Magnetometers" ist kurz etwa folgende: In einem eisenfreien Gehäuse hängt an einem Quarzfaden ein kurzes astatisches Nadelsystem, das mit einem Spiegel versehen ist. Mit Reibung an diesem Rohr verschiebbar und drehbar sind zwei Querbalken befestigt, die ihrerseits zwei senkrecht angeordnete Spulen tragen, die durch den Magnetisierungsstrom an ihren oberen bzw. unteren Enden je gleiche Pole erhalten. Die Länge der Stabproben wird so gewählt, daß der Abstand der induzierten Pole, den man in erster Annäherung als konstant[2]) annehmen kann, gleich dem Abstand der astatischen Nadeln ist. Durch eine besondere Vorrichtung wird die Probe, deren Magnetisierung in einer der beiden Spulen erfolgt, in einer solchen Höhenlage festgehalten, daß ihre induzierten Pole für schwache Felder in gleicher Höhe mit den beiden Nadeln sind. Dadurch wirken beide Stabpole in gleichem Sinne ablenkend auf das astatische Nadelsystem, während bei den horizontal angeordneten Spulen des störungsfreien Magnetometers von Kohlrausch und Holborn nur die Differenz der Polwirkungen der magnetisierten Stabprobe in Frage kommt.

2. Der Umbau.

Unter Beibehaltung der senkrechten Anordnung der Spulen — in dem glücklichen Gedanken der Verdoppelung der nur

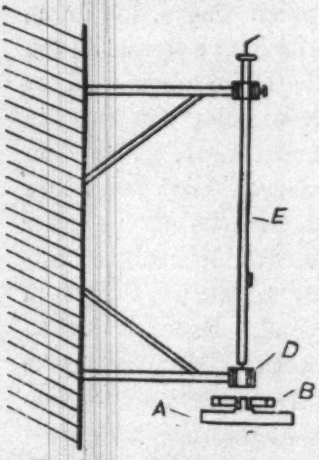
1) H. Tobusch, Ann. d. Phys. 26. S. 439 ff. (459) 1908.

2) Näheres S. 878 ff.

geringen Kräfte, und, wie Tobusch[1]) selber hervorhebt, in der weitgehenden Unabhängigkeit von Störungen der Vertikalintensität des Erdmagnetismus, liegt der Hauptvorteil dieser Konstruktion — wurden bei dem benutzten Instrument die beiden Spulen nach Art der üblichen Magnetometer eingebaut. Danach nahm der Apparat folgende Gestalt (vgl. Figg. 1 u. 4) und Ausmaße an:

Eine senkrecht zum magnetischen Meridian aufgestellte Messingplatte *A* (12 × 70 cm) mit Querversteifungen und Stellschrauben trug in der Mitte eine 23 mm hohe zylindrische Achse von 20 mm Durchmesser. Um diese drehbar war ein fest miteinander verbundenes Schienenpaar aus Messing *B* von 140 cm Länge angebracht. Auf diesem verschiebbar wurden zwei senkrecht stehende Spulen *C* auf Schlitten angeordnet, deren Nonien vor der Millimetereinteilung der Schienen spielten.

Die beiden Spulen wurden aus 2 mm dickem Kupferdraht auf 200 mm lange Rohre eisenfreien Elektrolytkupfers von 10 mm lichter Weite gewickelt. Sie bestanden aus je 8 Lagen von durchschnittlich je 88 Windungen.



Erschütterungsfreie Aufstellung des Magnetometergehänges.
Fig. 1.

Der auf einer langen Konsole stehenden Messingplatte, die die Schienen und Spulen trug, konnte das Gehänge nicht, wie ursprünglich versucht, anvertraut werden. Vielmehr mußte das Gehäuse, in dem es hing, vollständig getrennt davon an Stützen befestigt werden, die in die Außenwand des Gebäudes eingelassen waren (Fig. 1). Hierdurch waren zwischen der Drehachse des Schienensystems und dem unteren Ende des Gehäuses einige mm Spielraum frei, so daß das empfindliche Gehänge in keiner Weise durch vorkommende Erschütterungen der Konsole berührt werden konnte. Während die untere Strebe in eine Platte *D* endigte, die mit einer Aussparung dem kugelig ausgebildeten Ende des Gehäuses Halt bot, trug die

1) a. a. O. S. 461/462.

obere einen Ring, der durch drei Schrauben die Vertikaljustierung des Gehäuses erlaubte. Das Gehäuse *E* selbst, ein 35 mm weites, 650 mm langes Messingrohr, endigte oben in einen Torsionskopf, an dem das Gehänge hing. Zum Schutz gegen Temperaturschwankungen im Innern war es mit einer spiegelnden Oberfläche versehen.

Bei der Herstellung des Gehänges ließ ich mich einesteils von Angaben von Tobusch, andererseits von den Erfahrungen, die ich selber im Laufe der Zeit sammelte, leiten.[1]) Seine endgültige Form war folgende: An einer 500 mm langen Kapillaren von ca. 0,35 mm Dicke wurde ein 70 mm langer Quarzfaden von 6 μ Stärke mit Siegellack befestigt, an diesem wieder ein Stückchen Kapillare und hieran eine Öse von dünnem Kupferdraht angebracht. Das Ganze wurde an dem Torsionskopf aufgehängt. Nur auf diese Weise war eine einwandfrei senkrechte Befestigung des empfindlichen Quarzfadens möglich, die trotz der Leichtigkeit des ganzen Gehänges (ca. 0,95 g) wegen der geringen Widerstandsfähigkeit des Quarzfadens unerläßlich war.

Das astatische Nadelpaar wurde auf folgende Weise hergestellt: aus einem Stahlband wurden Stückchen von 4×8 mm geschnitten, magnetisiert und gealtert[2]) und zu zwei gleichstarken Magazinen von je 8 Lamellen, die gegenseitig durch Seidenpapier isoliert waren, mit Schellack zusammengefügt. Die so hergestellten Nadeln wurden (ebenfalls mit Schellack) an der Kapillaren im gegenseitigen Abstand von 50 mm befestigt, darüber in der Höhe eines Fensters im Gehäuse ein Galvanometerspiegel von 10 mm Durchmesser. Die Luftdämpfung bildete ein großer Glimmerflügel am untersten Ende der Kapillaren. Die Schwingungsdauer dieses Systems ohne Feld betrug (hin und zurück) 17 sec.

3. Die Theorie.

a) *Die Ableitung der Formeln.*

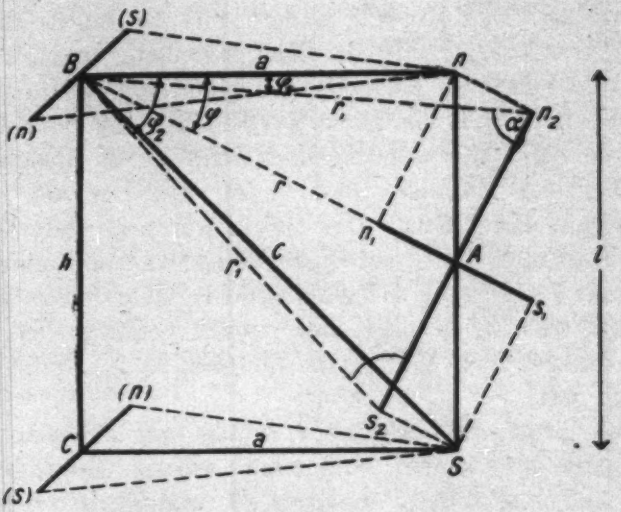
Da Tobusch mit seinem Magnetometer nur relative Messungen veröffentlicht hat, mußten für den vorliegenden

1) Eine Arbeit von R. Dieterle, die zweckdienliche Angaben enthalten hätte, ist erst ein halbes Jahr später erschienen; Ann. d. Phys. 59. S. 348 ff. 1919.

2) V. Strouhal u. C. Barus, Wied. Ann. 20. S. 662—84. 1883.

Zweck absoluter Messungen die nötigen Formeln erst abgeleitet werden. Hierfür seien zwei Wege angegeben und zwar zunächst folgender.[1])

In Fig. 2 sei A der Mittelpunkt der zu untersuchenden Probe, B der der oberen, C der unteren Nadel des astatischen Systems. Ferner sei $BC = h$ der Abstand der beiden Nadeln



Schema des Tobuschmagnetometers.
Fig. 2.

voneinander und zugleich nach Konstruktion der Polabstand $ns = l$ der Probe, also $h = l$. Die Entfernung Bn, also der Abstand der Probe vom Gehänge sei a, die Entfernung BA sei r, der Winkel zwischen a und r sei φ.

Zerlegt man nun das magnetische Moment $\mathfrak{M} = ml$ des senkrechten Probestabes ns in zwei Komponenten $m \cdot (n_1 s_1)$ und $m \cdot (n_2 s_2)$, von denen die eine, $m \cdot (n_1 s_1)$, in die Richtung AB fällt und die andere, $m \cdot (n_2 s_2)$, auf dieser Richtung senkrecht steht, dann wirkt der erste Anteil $m\ (n_1 s_1)$ auf die obere Nadel im Punkte B in der 1. Gaussschen Hauptlage. Wir betrachten also statt der Wirkung des Magneten ns mit der Polstärke m

1) Nach F. Kohlrausch u. L. Holborn, Ann. d. Phys. 10. S. 287. 1903; vgl. auch E. Gumlich, Leitfaden d. magnet. Messungen. Braunschweig 1918. S. 49ff.

und dem Polabstand l die Wirkung der beiden Magnete $n_1 s_1$ mit der Polstärke m und dem Polabstand $n_1 s_1 = l \cdot \sin \varphi$ und $n_2 s_2$ mit der Polstärke m und dem Polabstand $n_2 s_2 = l \cdot \cos \varphi$.

Die wirksame Horizontalkomponente der magnetischen Feldintensität im Punkte B ist dann:

$$\mathfrak{H}_1 = \frac{2 m l \sin \varphi \cos \varphi}{r^3} \tag{1}$$

oder

$$= \frac{\mathfrak{M} a l}{\left(a^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{5/2}}, \tag{2}$$

wie eine leicht ersichtliche Eliminierung von φ und r ergibt.

Der zweite fingierte Magnet, dessen Pole n_2 und s_2 beide den Abstand r_1 von B haben, erzeugt in B eine Feldstärke, deren wirksame Horizontalkomponente

$$\mathfrak{H}_2 = \frac{m}{r_1^2} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \tag{3}$$

ist, wenn φ_1 und φ_2 die Winkel zwischen $n_2 B$ bzw. $s_2 B$ und a bedeuten, oder da

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi + \alpha - 90^0, \\ \varphi_2 = \varphi - \alpha + 90^0 \end{cases} \tag{4}$$

und, wenn α der Winkel zwischen $n_2 s_2$ und r_1 ist,

$$\cos \alpha = \frac{l \cos \varphi}{2 r_1}$$

ist,

$$\mathfrak{H}_2 = \frac{2 m \sin \varphi \cos \alpha}{r_1^2}, \tag{5}$$

$$= \frac{\mathfrak{M} l a}{2 r^3 r_1^3}, \tag{6}$$

$$= \frac{\mathfrak{M} l a}{2 \left(a^2 + \frac{l^2}{4}\right) \left[a^2 + \frac{l^2}{4} \left(2 - \frac{l^2}{l^2 + 4 a^2}\right)\right]^{3/2}}. \tag{7}$$

Die gesamte Feldintensität, die die magnetisierte Probe $n s$ im Mittelpunkt B der oberen Nadel in horizontaler Richtung erzeugt, ist also gleich

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2 = \frac{\mathfrak{M} l a}{\left(a^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{5/2}} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{4 a^2 + l^2}{4 a^2 + \frac{l^2 + 8 a^2}{l^2 + 4 a^2} \cdot l^2}\right)^{5/2}\right], \tag{8}$$

oder

$$= \frac{\mathfrak{M}\, l\, a}{\left(a^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{5/2}} \left(1 + \frac{1}{2}\xi^{5/2}\right), \tag{9}$$

wenn

$$\xi = \frac{4a^2 + l^2}{4a^2 + \frac{l^2 + 8a^2}{l^2 + 4a^2} l^2} \tag{10}$$

gesetzt wird.

Für hinreichend große r kann man einige Vereinfachungen der Formel (8) dadurch erzielen, daß man in (6) entweder $r = r_1$ und dann $\cos^2\varphi = 1$ oder $r_1 = r$ setzt. Im ersten Fall wird:

$$\frac{1}{r^3 r_1^3} \approx \frac{1}{\left(a^2 + \frac{l^2}{4} + \frac{l^2 \cos^2\varphi}{4}\right)^{5/2}} \approx \frac{1}{\left(a^2 + \frac{l^2}{2}\right)^{5/2}}, \tag{11}$$

was in den meisten Fällen zu hinreichend genauen Werten führen wird, da Formel (8) dadurch die Gestalt (12) annimmt:

$$\mathfrak{F} = \frac{\mathfrak{M}\, l\, a}{\left(a^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{5/2}} \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{4a^2 + l^2}{4a^2 + 2l^2}\right)^{5/2}\right], \tag{12}$$

d. h. in (8) nur:

$$\frac{l^2 + 8a^2}{l^2 + 4a^2} = 2 \tag{13}$$

gesetzt ist und statt der 3/2ten Potenz des nahe bei 1 liegenden Klammerausdruckes die 5/2te Potenz genommen wird. Bei meinen Messungen war z. B. $a = 44$ und $l = 5$, der Wert des Bruches (13) also 1,997; $\mathfrak{F}$ selbst wird dadurch nur um 0,07 Proz. geändert.

Setzt man dagegen statt der Abkürzung (11) im zweiten Falle:

$$\frac{1}{r^3 r_1^3} \approx \frac{1}{\left(a^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{5/2}}, \tag{14}$$

nimmt die Formel (8) die einfache Gestalt

$$\mathfrak{F} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\mathfrak{M}\, l\, a}{\left(a^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{5/2}} \tag{15}$$

an, was in dem angeführten Beispiel einen Fehler von 0,4 Proz. bedingen würde. Oder, um es übersichtlich zusammenzufassen:

(8*) ohne Vernachlässigung $\mathfrak{F} = 1{,}494 \cdot \frac{\mathfrak{M}\, l\, a}{\left(a^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{5/2}}$,

(12*) mit Vernachlässigung (11) $\mathfrak{F} = 1{,}495 \cdot \frac{\mathfrak{M}\, l\, a}{\left(a^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{5/2}}$,

(15*) mit Vernachlässigung (14) $\mathfrak{F} = 1{,}500 \cdot \frac{\mathfrak{M}\, l\, a}{\left(a^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{5/2}}$.

Kehren wir nach dieser kurzen Abschweifung zu unserem ursprünglichen Gedankengang zurück. Dieselbe horizontale Komponente $\mathfrak{F}$ der Feldstärke, die in B auf die obere Nadel wirkt, muß aus Symmetriegründen auch in C auf die untere wirken. Eine Betrachtung der Vorzeichen zeigt, daß die durch die magnetischen Felder erzeugten Drehmomente auf die obere und untere Nadel des astatischen Gehänges in demselben Sinne wirken; hierin liegt ja gerade der große Vorzug der Konstruktion von Tobusch gegenüber der horizontalen Anordnung der magnetisierten Probe beim störungsfreien Magnetometer von Kohlrausch und Holborn.

Macht man nun die Annahme[1]), daß die beiden astatischen Magnetnadeln, je vom magnetischen Moment $\mathfrak{M}_1$, sehr kurz sind, so daß ihre Länge praktisch gleich 0 gesetzt werden kann, dann wird bei einem Nadelausschlag α das von den oben berechneten Feldern erzeugte Drehmoment des Gehänges gleich

$$2\,\mathfrak{M}_1\,\mathfrak{F}\cos\alpha\,.$$

Diesem Drehmoment entgegen wirkt das durch die Torsionskraft des Fadens erzeugte Drehmoment $D\alpha$, wenn D die Direktionskraft des Fadens bedeutet. Für den Fall des Gleichgewichtes gilt dann die Beziehung:

(16) $$2\,\mathfrak{M}_1\,\mathfrak{F}\cos\alpha = D\alpha\,.$$

Hieraus erhält man für die oben abgeleitete Größe $\mathfrak{F}$ den Ausdruck

(17) $$\mathfrak{F} = \frac{D}{2\,\mathfrak{M}_1\cos\alpha}\,\alpha\,,$$

worin $D/M_1 = C$ eine apparative Konstante bedeutet, von deren Bestimmung weiter unten die Rede sein wird. Entwickelt man noch $\cos\alpha$ in eine Reihe, erhält man schließlich:

(18) $$2\,\mathfrak{F} = C\alpha\left(1 + \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \ldots\right).$$

In dem Ausdruck (8) für $\mathfrak{F}$ sind alle Größen bekannt bis auf

1) Größe des gemachten Fehlers: maximal 0,1 Proz.

das magnetische Moment $\mathfrak{M}$ der zu untersuchenden Probe, das sich somit aus Gleichung (18) berechnen läßt. Bevor wir jedoch dazu übergehen, wollen wir die Feldstärke $\mathfrak{F}$ auf die zweite auf S. 872 angedeutete, bedeutend einfachere Weise berechnen.

Zu diesem Zwecke führe ich noch in Fig. 2 auf S. 872 die Entfernung sB des unteren induzierten Poles der Probe ns vom Mittelpunkt B der oberen Nadel ein und nenne sie c. Dann setzt sich die in B auf die obere Nadel wirkende horizontale Komponente der Feldstärke (ohne Zerlegung) nach dem Coulombschen Gesetz, wie leicht ersichtlich, aus folgender Differenz zusammen:

$$\mathfrak{F} = m\left[\frac{1}{a^2} - \frac{a}{c^3}\right] = \frac{m}{a^2}\left[1 - \frac{a^3}{(a^2+l^2)^{3/2}}\right], \tag{19}$$

oder

$$\mathfrak{F} = \frac{m}{a^2}\left[1 - \chi\left(\frac{a}{l}\right)\right], \tag{20}$$

wenn

$$\chi\left(\frac{a}{l}\right) = \frac{(a/l)^3}{[1+(a/l)^2]^{3/2}} \tag{21}$$

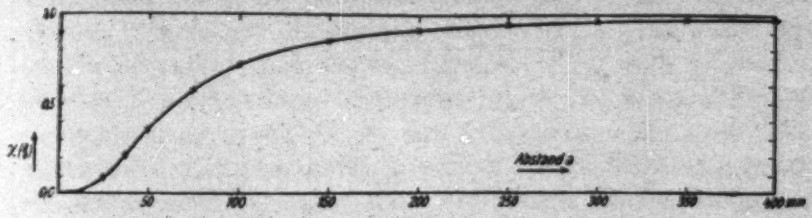
gesetzt wird. Für die Wirkung der Probe auf die untere Nadel im Punkte C gelten wieder die gleichen Betrachtungen wie oben. Den Verlauf der χ-Funktion (21) kann man leicht graphisch darstellen und gewinnt so ein anschauliches Bild der Abnahme von $\mathfrak{F}$ in (20), da die Lote zwischen der χ-Kurve und der 1,0-Horizontalen in Fig. 3 ein direktes Maß dieser Abnahme darstellen.

Tabelle 1.

χ-Funktion.

a	a/l	χ
00,0	0,00	0,000
12,5	0,25	0,014
25,0	0,50	0,089
37,5	0,75	0,216
50,0	1,00	0,354
75,0	1,50	0,576
100,0	2,00	0,716
150,0	3,00	0,854
200,0	4,00	0,918
250,0	5,00	0,948
300,0	6,00	0,960
350,0	7,00	0,970
400,0	8,00	0,984

Diese Abnahme der wirksamen Feldstärken in B und C hat ihren Grund darin, daß bei kurzen Proben die Entfer-



χ-Funktion des Tobuschmagnetometers.

Fig. 8.

nungen a und e mit wachsendem Abstand (vgl. Fig. 2) mehr und mehr einander gleich werden.

Wir haben in (8) und (20) für diselbe Größe $\mathfrak{F}$ zwei ganz verschieden gebaute Ausdrücke gewonnen. Ehe wir jedoch zu ihrer Kritik übergehen, wollen wir zunächst noch die Formeln für die Magnetisierungsintensität $\mathfrak{J}$ und die Magnetometerkonstante C aus beiden ableiten.

Bekanntlich ist die Magnetisierung $\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{M}}{v}$ das magnetische Moment pro Volumeneinheit, wenn v das Volumen bedeutet. Nach Gleichung (8) und (18) ist also

$$(22)\quad 2\,\mathfrak{F} = \frac{2\mathfrak{J}\,v\,l\,a}{\left(a^2+\frac{l^2}{4}\right)^{3/2}}\left(1+\frac{1}{2}\,\xi^{3/2}\right) = C\,\alpha\left(1+\frac{1}{2}\,\alpha^2+\ldots\right),$$

oder für kleine α:

$$(23)\quad \mathfrak{J} = \frac{C\alpha\left(1+\frac{1}{2}\,\alpha^2+\ldots\right)\left(a^2+\frac{l^2}{4}\right)^{3/2}}{2\,v\,l\,a\left(1+\frac{1}{2}\,\xi^{3/2}\right)},$$

während Gleichung (20) und (18) zu:

$$(24)\quad \mathfrak{J} = \frac{C\,a^2\,l\,a}{2\,v\left[1-\chi\left(\frac{a}{l}\right)\right]}\left(1+\frac{1}{2}\,\alpha^2+\ldots\right)$$

führen.

Setzt man noch

$$(25)\quad \alpha\left(1+\frac{1}{2}\,\alpha^2+\ldots\right) = \frac{e}{2\,A}\left(1-\frac{5}{6}\left(\frac{e}{2\,A}\right)^2\right).$$

wobei A den Skalenabstand und e die Skalenausschläge bedeuten sollen, erhält man endgültig:

$$\Im = -\frac{C\left(a^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{5/2}}{2\,v\,l\,a\left(1 + \frac{1}{2}\xi^{3/2}\right)} \cdot \frac{e}{2A}\left[1 - \frac{5}{6}\left(\frac{e}{2A}\right)^2\right], \tag{26}$$

bzw.

$$\Im = \frac{C a^2 l}{2\,v\left[1 - \chi\left(\frac{a}{l}\right)\right]} \cdot \frac{e}{2A}\left[1 - \frac{5}{6}\left(\frac{e}{2A}\right)^2\right]. \tag{27}$$

Nach Formel (26) sind die veröffentlichten Werte berechnet.

Wir brauchen jetzt nur noch die Magnetometerkonstante C zu bestimmen, was durch Messung der Ausschläge, die ein bekanntes magnetisches Moment einer stromdurchflossenen Eichspule am Nadelsystem erzeugt, geschieht. Ist die Stromstärke in dieser Spule gleich I Weber und ihre Gesamtwindungsfläche gleich S, so ist ihr magnetisches Moment

$$\mathfrak{M} = IS. \tag{28}$$

Macht man die Länge und damit den Pobabstand dieser Spule gleich dem Abstand der beiden astatischen Nadeln voneinander, kann man Formel (26) oder (27) unmittelbar zur Bestimmung von C anwenden, indem man (28) in (26) oder (27) einsetzt. Man erhält dann für C die Ausdrücke:

$$C = \frac{2\,I\,S\,l\,a\left(1 + \frac{1}{2}\xi^{3/2}\right)}{\left(a^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{5/2} \cdot \frac{e}{2A}\left[1 - \frac{5}{6}\left(\frac{e}{2A}\right)^2\right]}, \tag{29}$$

bzw.

$$C = \frac{2\,I\,S\left[1 - \chi\left(\frac{a}{l}\right)\right]}{a^2 l \cdot \frac{e}{2A}\left[1 - \frac{5}{6}\left(\frac{e}{2A}\right)^2\right]}. \tag{30}$$

Der Ableitung der Formeln (26) und (27) liegt eine Annahme zugrunde, die zwar allgemein[1]) gemacht wird, aber nicht immer berechtigt ist, nämlich daß der Polabstand in der zu untersuchenden Probe stets hinlänglich genau gleich $^5/_6$ der Probenlänge gesetzt werden kann. Man muß vielmehr zwei Gesichtspunkte

1) Vgl. F. Kohlrausch u. L. Holborn, Ann. d. Phys. 10. S. 297, Anm. 1. 1903; E. Gumlich, Magnetische Messungen. Braunschweig 1918. S. 52, u. a.

scharf voneinander trennen. Erstens wird der Polabstand eines Magneten geändert, wenn man die Wirkung des Magneten auf einen nahe gelegenen Aufpunkt untersucht, es also nicht mit Kräften in größerer Entfernung zu tun hat. Diese Änderung des Polabstandes mit der Entfernung wird wohl allgemein bei magnetometrischen Messungen ohne merklichen Fehler vernachlässigt. Zweitens ist der Polabstand aber auch eine Funktion der Permeabilität[1]) und zwar in nicht immer zu vernachlässigendem Maße. Der Polabstand der Probe nimmt von schwachen Feldern bis zur Sättigung durchschnittlich um 15 Proz. zu, was sich je nach dem Abstand, in dem sich die Probe vom Gehänge befindet, mehr oder weniger stark geltend machen muß. Genauere Untersuchungen hierüber hat L. Holborn[2]) veröffentlicht und festgestellt, daß der Einfluß der Magnetisierung auf den Polabstand bei großen Dimensionsverhältnissen beträchtlich ist, während er bei kleinen undeutlich wird und bei Ellipsoiden der Theorie entsprechend nicht vorhanden ist. Daher erklärt es sich auch, daß sich bei einer noch später zu besprechenden Kontrollmessung eine Abweichung von der Jocheichkurve in dem berechneten Maße nicht zeigte, vielmehr eine solche im entgegengesetzten Sinne auftrat (für höhere Felder ca. 3 Proz.). Eine Überprüfung der von F. Kohlrausch und L. Holborn gegebenen Formeln für das mit horizontalen Spulen versehene störungsfreie Magnetometer ergab, daß sich auch hier, je nach dem Abstand, in dem gemessen wird, für Stäbe ohne Berücksichtigung der Änderung des Polabstandes mit der Magnetisierungsintensität zu große $\mathfrak{J}$-Werte ergeben. Da jedoch im Magnetometer im allgemeinen nur Ellipsoidmessungen ausgeführt werden und durch den wechselnden Einfluß des Dimensionsverhältnisses die Verhältnisse zunächst noch unübersehbar sind — nur eine grundlegende Untersuchung kann hier Klarheit schaffen — begnüge ich mich mit der Angabe der bisher abgeleiteten Formeln. Zur Sicherung der von mir gemessenen Werte — Ellipsoide herzustellen war

1) Vgl. Winkelmanns Handb. d. Phys. 5. S. 205 f.; C. G. Lamb, Phil. Mag. (5) 48. S. 252. 1899; C. Benedicks, Journ. de Phys. 1. S. 302. 1902; E. Gumlich, Ann. d. Phys. 59. S. 677. 1919.

2) L. Holborn, Sitzungsber. d. Kgl. Preuß. Akad. d. Wissensch. Berlin. S. 159 ff. 1898.

wegen der enormen Härte der Bronzen so gut wie unmöglich — verließ ich mich lediglich auf eine Kontrollmessung, von der noch weiter unten die Rede sein wird (vgl. S. 874ff.). Ausdrücklich sei jedoch betont, daß durch die *empirische* Bestimmung der Magnetometerkonstanten C etwaige Fehler nicht beseitigt werden können, da diese mittels einer Eichspule ausgeführt wird und der Polabstand einer Spule bei allen Feldstärken konstant bleibt.

Interessant ist schließlich noch, daß Formel (26) dem Einfluß der Auseinanderzerrung der Pole mit wachsender Magnetisierung sehr stark unterliegt, also in bezug auf den Polabstand sehr empfindlich ist, während sich in Formel (27) der Einfluß der Polabstandsänderung fast vollkommen aufhebt, was natürlich hinsichtlich der Richtigkeit der $\mathfrak{H}$-Werte, die Formel (27) gibt, kein Vorzug ist. Die Einflüsse der Polabstandsvergrößerung sind, wenn auch leicht zu verfolgen, doch kompliziert. Setzt man z. B. in Gleichung (8) den Polabstand

$$l = {}^5/_6\, L = 0{,}83\, L, \tag{31}$$

wenn L die Stablänge ist, so erhält man für das wirksame Feld im Mittelpunkt einer Gehängenadel:

$$\left\{ \mathfrak{H} = \frac{(0{,}83)^3\, m\, a\, L^3}{(a^2 + (0{,}42\, L)^2)^{5/2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\, \frac{(a^2 + (0{,}42\, L)^2)^{2/2}}{\left[a^2 + (0{,}42\, L)^2 + \frac{a^2 (0{,}42\, L)^2)}{a^2 + (0{,}42\, L)^2}\right]^{2/2}}\right). \right. \tag{32}$$

Gl. (31) gilt nach Benedicks[1]), Holborn[2]) u. a. nur für schwache Felder ($\mathfrak{H}$ unterhalb μ_{max}), während bei Annäherung an die Sättigung ($\mathfrak{H}$ oberhalb μ_{max}) l wächst bis zu:

$$l = 0{,}96\, L. \tag{33}$$

Eine genaue Verfolgung dieser Änderung[3]) führt dann zu:

---

1) a. a. O. vgl. S. 869. Fußnote 1.

2) a. a. O. vgl. S. 869. Fußnote 2.

3) Die gleichen Überlegungen führen übrigens auch zur verallgemeinerten Anwendbarkeit der Formeln unabhängig von der Länge der zu untersuchenden Stäbe.

$$(34)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{F} &= \frac{0{,}83 \cdot 0{,}96\, m\, a\, L^3}{(a^2 + (0{,}42\, L)^2)^{5/2}} \\ &\cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{(a^2 + (0{,}42\, L)^2)^{5/2}}{\left[a^2 + (0{,}42\, L)^2 + \frac{a^2 (0{,}48\, L)^2)}{a^2 + (0{,}42)\, L)^2} \right]^{5/2}} \right). \end{aligned} \right.$$

Wie schon gesagt, kam dieser Einfluß bei den vorliegenden Messungen wegen des kleinen Dimensionsverhältnisses und der geringen Permeabilität der Heuslerschen Legierungen nicht nennenswert in Frage.

b) *Diskussion der Formeln.*

Da bei der Ableitung der Formeln (29) und (30) Vereinfachungen eingeführt sind, sind Unterschiede in den Zahlenwerten der Magnetometerkonstanten C zu erwarten. Eine Entscheidung, welcher Formel der Vorzug zu geben ist, soll im folgenden auf experimentellem Wege versucht werden. Zu diesem Zwecke wurde C für verschiedene Abstände nach beiden Formeln berechnet. Die Ergebnisse sind in Tab. 2 zusammengestellt.

Tabelle 2.

Magnetometerkonstante C nach Formel (29) u. (30) für verschiedene Abstände und ihre prozentualen Abweichungen untereinander.

Abstand in mm	237	337	437
C nach Gl. (29)	0,02475	0,02477	0,02473
Abweichungen der nach (29) berechn. Werte vom 337 mm-Wert in Proz.	− 0,08	—	− 0,16
C nach Gl. (30)	0,02413	0,02450	0,02453
Abweichungen der nach (30) berechn. Werte vom 337 mm-Wert in Proz.	− 1,05	—	+ 0,01

Aus diesen Zahlen könnte man einen für Formel (29) günstigeren Schluß ziehen, wenn nicht die Abweichungen untereinander gegenüber denen zusammengehöriger Werte von (29) und (30) klein gewesen wären; denn diese waren bei

Abstand in mm	237	337	437
Abweichungen der nach (29) u. (30) berechn. Werte voneinander in Proz.	+ 2,05	+ 1,08	+ 0,80

also im allgemeinen wesentlich größer.

Man erkennt sofort, daß sich die Werte erst mit wachsendem Abstand einander nähern, was in der Natur der Sache liegt, weil mit der Entfernung der Einfluß der unvermeidlichen Vernachlässigungen zurücktritt. Tab. 2 läßt jedoch erkennen, daß die Formel (29) unempfindlicher gegen Abstandsänderungen als Formel (30) ist, sich also der Wirklichkeit besser anschmiegt. Praktisch werden jedoch beide Formeln den meisten an sie gestellten Anforderungen Genüge leisten; Es sei schon hier erwähnt, daß die Werte für $\mathfrak{M}$ — und mithin auch für $\mathfrak{Z}$ — nach Formel (29) und (30) trotz der Verschiedenheit von C bei einem Abstand von 337 mm für (29) und (30) gleich waren, nämlich in beiden Fällen

$$\mathfrak{M}_{29} = \mathfrak{M}_{30} = 2200 \cdot \alpha, \tag{35}$$

während bei 437 mm Abstand die Werte

$$\mathfrak{M}_{29} = 6152 \cdot \alpha \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}_{30} = 6148 \cdot \alpha \tag{36}$$

einen Unterschied von nur 0,07 Proz. aufwiesen. Schon daraus geht hervor, daß die beiden Formeln in den meisten Fällen als gleichwertig betrachtet werden können.

Eine der wichtigsten Größen, von deren genauer Bestimmung die Magnetometerkonstante C ganz wesentlich abhängt, ist der Abstand a der Spule vom Gehänge. Man bestimmt ihn am besten mit dem Kathetometer, indem man das Gehänge durch zwei diametral gegenüberliegende Fenster im Gehäuse sichtbar macht. Wegen der Unabhängigkeit der Schienenskala (vgl. Fig. 4) vom dem Gehäuse wird sich in den meisten Fällen eine Korrektion ergeben, die an dem abgelesenen[1]) Abstand a angebracht werden muß. Bestimmt man den Abstand a nur

1) Die Zahlen 237, 337 und 437 mm ergaben sich bei dem beschriebenen Apparat durch eine unzweckmäßige Anbringung des Nonius; sie entsprechen den Ablesungen 200, 300 und 400 mm an der Schieneneinteilung.

um 1 mm[1]) falsch, was bei $a = 337$ mm einen Fehler von 0,3 Proz. bedeutet, erhält man für C die in Tab. 3 angegebenen Werte:

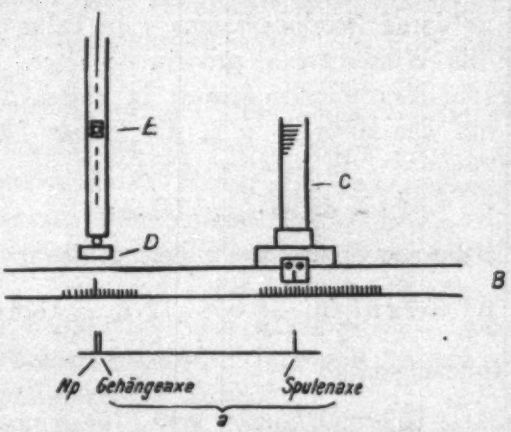
Tabelle 3.

Einfluß einer falschen Bestimmung des Spulenabstandes a.

Abstand in mm	238	338	438
C_{29}	0,02476	0,02487	0,02483
Abweichung vom 338 mm-Wert	− 0,44 %	—	+ 0,16 %

die im Vergleich zu den in Tab. 2 für Formel (29) gegebenen Werten schlechter sind.

Die Magnetometerkonstante selbst wurde durch eine Normalspule bestimmt, die in vier Lagen dünnen Kupferdrahtes auf



Korrektur des Spulenabstands vom Gehänge.

Fig. 4.

ein Glasstäbchen gewickelt war und bei einer Windungsfläche von 127,6 cm² ein bekanntes magnetisches Moment besaß.

Die Ausschläge der Magnetometernadeln wurden bei 2 A gemessen und durch Mittelbildung aus doppelten Messungen und Kommutierungen genommen. Es ergaben sich für:

1) Man wird natürlich diesen Fehler in allen Fällen unter diese Grenze herabdrücken können; wo dies nicht in ausreichendem Maße der Fall sein sollte, muß man durch doppelte Bestimmung von C die Entfernung a eliminieren.

Abstand	Ausschlag
187 mm	337,6 Skt.
237	182,9
337	33,0
437	11,8

Die Werte von C, die mit diesen Zahlen gewonnen wurden, sind schon auf S. 881 mitgeteilt, desgleichen ihre prozentualen Abweichungen untereinander (vgl. Tab. 2).

c) *Bestimmung der Spulenfeldstärke.*

Die Feldstärke der Magnetisierungsspule in einem Achsenpunkte mit dem Abstande a von der Achsenmitte berechnet sich nach der Formel:

$$(37) \qquad \mathfrak{H}_e^a = 2\pi n i \left(\frac{l-a}{\sqrt{r^2+(l-a)^2}} + \frac{l+a}{\sqrt{r^2+(l+a)^2}} \right),$$

wobei r den mittleren Windungsradius, l die halbe[1]) Länge der Spule und n die Windungszahl pro cm bedeutet. Danach ergab sich für die Magnetisierungsspule in einem Achsenpunkt $a = 30$ mm von der Mitte — d. h. der halben Länge der zu messenden Proben — ein externes Feld:

$$(38) \qquad \mathfrak{H}_e^a = 43{,}98 \cdot i_{\text{Amp.}} \text{ Gauss}.$$

In der Mitte der Spule ($a = 0$) betrug also die Feldstärke

$$(39) \qquad \mathfrak{H}_e^m = 4\pi n i \frac{l}{\sqrt{r^2+l^2}} = 44{,}12 \cdot i_{\text{Amp.}} \text{ Gauss},$$

so daß die Inhomogenität

$$(\mathfrak{H}_e^m - \mathfrak{H}_e^a)_{a=30} = 0{,}43 \text{ Proz.}$$

war.

Die mittlere Feldstärke im Bereich ($-a$ bis $+a$) der Probe, die den Messungen zugrunde gelegt wurde, berechnete sich nach der Formel[2]):

$$(40) \qquad \bar{\mathfrak{H}}_e \Big|_{-a}^{+a} = \frac{2\pi n i}{a} \left(\sqrt{r^2+(l+a)^2} - \sqrt{r^2+(l-a)^2} \right)$$

zu $44{,}08 \cdot i_{\text{Amp.}}$ Gauss.

d) *Kontrollmessung und Fehlerberechnung.*

Um in den Resultaten der magnetometrischen Messung ganz sicher zu gehen, bedurfte es noch einer schon er-

1) Vgl. E. Haupt, a. a. O. S. 280: $L = 2l$; $x = L/2 - a$.
2) Vgl. E. Haupt, a. a. O. S. 290 u. A. Semm, a. a. O. S. 16.

wähnten Kontrollmessung. Hierzu wurde aus einem Stück eines im Jahre 1904 in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt zu Charlottenburg untersuchten weichen Eisenstabes PTR II 595 ein kreiszylindrisches Stäbchen geeigneten Maßes hergestellt, dessen Hysteresisschleife mit dem Magnetometer aufgenommen wurde und mit der Kurve der Phys.-Techn. Reichsanstalt verglichen wurde. Es ergab sich bei niedrigen Feldern bis zu etwa 50 Gauss fast vollständige Übereinstimmung, während die in Marburg gemessenen Werte bei höheren Feldern systematisch gegenüber denen der Charlottenburger um etwa 3 Proz. zurückblieben. Ich versuchte erfolglos den Grund hierfür aufzudecken. Durchgeführte Fehlerberechnungen ergaben keine klare Handhabe; so geht z. B. in die Abszissenachse (Feldstärke) der Hysteresisschleife die Bestimmung des Windungsradius und der Windungszahl der Magnetometerspule sowie des Entmagnetisierungsfaktors N ein.

Eine selbst 100-prozent. Abweichung in der Bestimmung des Radius macht sich in der externen Feldstärke nur mit 2—3 Proz. und in den $\mathfrak{J}$-Werten der Hysteresiskurve oberhalb des Knies nur mit Zehntelprozenten geltend.

Ein 1-prozentiger Fehler in der Bestimmung der Windungszahlen — das hieße hier bei jeder Wickelungslage ein gleichsinniger Fehler um rund eine Einheit — macht sich in der externen Feldstärke ebenso, in den $\mathfrak{J}$-Werten aber wieder nur mit Zehntelprozenten geltend.

Schließlich geht in die Abszissenwerte die Größe der Scherung $N\mathfrak{J}$, besonders also der Entmagnetisierungsfaktor N ein, der im Gegensatz zu den bisher erwähnten Größen bei der Berechnung der effektiven Feldstärke eine sehr große Rolle spielt. Für $m = 24{,}6$ gibt Chr. R. Mann[1]) an:

$$N = 0{,}06437,$$

während C. Benedicks[2]) einen 4,5 Proz. größeren Wert annimmt. Die Umstrittenheit der Entmagnetisierungsfaktoren in der Literatur ist bekannt; eine eingehende Diskussion gibt u. a. W. Preusser[3]), ohne zu einem klaren Für oder Wider

1) Chr. R. Mann, Inaug. Diss. Berlin 1895.
2) C. Benedicks, Ann. d. Phys. 6. S. 726. 1901.
3) W. Preusser, Inaug.-Diss. Marburg 1908. S. 39—52.

kommen zu können. Eine Entscheidung, welche Werte besser sind, ist auf die vorliegenden Messungen angewandt, ziemlich belanglos, da die Scherung bei den niedrigen $\mathfrak{J}$-Werten der untersuchten Bronzen für das Resultat bedeutungslos bleibt. Jedoch ist in der Unsicherheit der Entmagnetisierungsfaktoren offenbar eine Möglichkeit gegeben, die in höheren Feldern auftretende Abweichung der Kontrollmessung zu erklären, da zwischen dem Mannschen und Benedicksschen Wert eine Abweichung von 4,5 Proz. besteht. Man kann gegen die Benedickssche Forderung, die Mannschen Werte allgemein um 0,002 zu vergrößern, einwenden, daß sie sich im Gegensatz zu den Mannschen Messungen im wesentlichen auf eine einzige Untersuchung stützt. Immerhin mag die Tatsache der beobachteten Abweichung in diesem Zusammenhange hervorgehoben werden, zumal der Charlottenburger Messung eine Jochmessung, also ganz andere Scherungsverhältnisse zugrunde gelegen haben.

Nicht unerwähnt bleiben soll in diesem Zusammenhange, daß das Kontrollstäbchen von 60 mm Länge und 2,4 mm Durchmesser aus einem 330 mm langen und 6,01 mm dicken Eisenstab gewonnen war. Die Charlottenburger Kurve ist an dem großen, die Marburger aber an dem kleinen Stäbchen aufgenommen. Wenn auch gescherte Kurven theoretisch vollkommen unabhängig von der Form[1]) der Probe sein sollen und demnach nur Materialeigenschaften zum Ausdruck bringen, so ist angesichts der bestehenden Unsicherheit der Entmagnetisierungsfaktoren bei so starken Größenunterschieden, wie sie hier für die verglichenen Kurven vorlagen, eine Abweichung von etwa 3 Proz. vielleicht doch nicht überraschend und eine Diskussion der Fehlerquellen, abgesehen von ihrer Notwendigkeit für jede quantitative Messung, fast überflüssig, jedenfalls sofern sie das Ziel im Auge hat, die vorliegende Abweichung auf andere Weise erklären zu wollen.

In die Ordinaten gehen im wesentlichen die drei Größen C, v und e ein, die als Magnetometerkonstante, Volumen der Proben und Skalenteile eingeführt waren, sowie der des

1) Daß das nicht einmal angenähert der Fall ist, beweist die Arbeit von C. L. B. Shuddemagen, Beibl. Ann. d. Phys. 32. 486. 1908, die eine direkte Abhängigkeit vom Durchmesser behauptet.

längeren diskutierte Polabstand. Die Fehlergrenzen von C sind schon früher (S. 881 ff.) eingehend erörtert; eine verhältnismäßig große Unsicherheit der C zugrunde liegenden Ausschläge auf S. 884 kommt für die systematische Abweichung durch Mittelbildung nicht in gleichem Umfang in Frage.

v hängt von r und h, dem Radius und der Länge der untersuchten Probe ab, die beide bis auf Zehntelmillimeter genau bestimmt werden können, da die Form der Proben auf der Drehbank hergestellt wird. Äußerste Genauigkeit erwies sich hierbei als unbedingt notwendig, da die Einflüsse einer falschen r-Bestimmung in den $\mathfrak{Z}$-Werten mit dem doppelten Betrage auftreten. Das fällt um so schwerer ins Gewicht, als r eine sehr kleine Zahl ist, die schwer auf $^1/_{10}$ Proz. genau zu bestimmen ist. Ein Beispiel wird die Verhältnisse leicht erläutern. Der Durchmesser des Kontrollstäbchens war wegen eines einigermaßen brauchbaren Dimensionsverhältnisses auf nur 2,437 mm gebracht. Nimmt man einmal an, daß diese Zahl nur auf $^1/_{10}$ mm genau bestimmt sei, würde das höchstens einen Fehler von $^5/_{100}$ mm = 2,0 Proz. bedeuten, der sich also in den $\mathfrak{Z}$-Werten mit 4,0 Proz. geltend machen würde. Man sieht schon hieraus, wie peinlich genau r bekannt sein muß, wenn nur $^1/_{20}$ mm schon einen Fehler von 4 Proz. bedingt. Es war mir glücklicherweise durch einen Mikrometertaster von Brown & Sharpe möglich, die Hundertstelmillimeter noch sicher zu bestimmen, während die Tausendstelmillimeter auf Schätzung von $^1/_{10}$ Skalenteilen beruhten. Demnach war der maximale Fehler ca. 0,002 mm, d. h. 0,08 Proz., der sich in $\mathfrak{Z}$ nur mit 0,17 Proz. geltend machen konnte. So naheliegend hier ein beträchtlicher Fehler war, war der mögliche Einfluß dieser Fehlerquelle doch zuverlässlich unter das Maß der zu erklärenden Abweichung der beiden Kurven herabgedrückt.

In den Ausschlägen α stecken die Skalenteile e und der Skalenabstand A. Bei der Größe von A sind Fehler über 0,2 Proz. vermeidlich; sie machen sich im Resultat noch geringer, höchstens mit 0,15 Proz. geltend. Anders steht es mit e; Fehler von der Größe ganzer Prozente werden keine Seltenheit sein. Jedoch ist es nicht ersichtlich, wie diese einen systematischen, stets im gleichen Sinne wirkenden Einfluß ausüben sollen.

Nach dieser eingehenden Diskussion kann die Ursache der bestehenden Abweichung zwischen der Marburger und Charlottenburger Kurve wohl nur noch in der Unsicherheit der Entmagnetisierungsfaktoren oder in dem auf S. 878 ff. erwähnten Einfluß der Magnetisierungsstärke auf den Polabstand der Probe gesucht werden, zwei Einflüsse, die leider je nach den Bedingungen (Dimensionsverhältnis, absoluter Durchmesser, Feldstärke, Beobachtungsabstand usw.) zu schwankend sind, um eine genaue Nachprüfung dieser Annahme zu erlauben.

III. Die Messungen und ihre Ergebnisse.

A. Das Material.

Das Material zu der vorliegenden Untersuchung wurde dem Physikalischen Institut von Herrn Dr. Heusler[1]) zur Verfügung gestellt. Die Analysen wurden im Chemischen Institut der Universität Marburg, zwei Manganbestimmungen auf der Isabellenhütte gemacht.[2]) Ihre Ergebnisse in Prozent sind in Tab. 4 zusammengestellt.

Tabelle 4.

Analysen der vier untersuchten Heuslerschen Legierungen.

Probe	Mittel aus	Al	Mn	Fe	Cu	Gangart	Summe
I	6	7,7	17,0	15,1	59,7	0,3	99,8
II	10	9,2	17,8	13,5	59,6	1,1	101,2
III	14	8,1	16,3	18,1	58,1	0,6	101,2
IV	6	10,4	18,7	16,3	58,0	0,5	103,9

Für die vorliegende Arbeit kam es darauf an, den Einfluß der hochprozentigen Fe-Zusätze festzustellen. Es wurden deshalb zunächst die Umwandlungspunkte der vier Proben am Magnetoskop bestimmt, indem sie in dem Ölbad in ihrem ursprünglichen Zustand langsam erhitzt und die Abnahme der Nadelablenkungen beobachtet wurden. Sie lagen sämtlich überraschend hoch:

Tabelle 5.

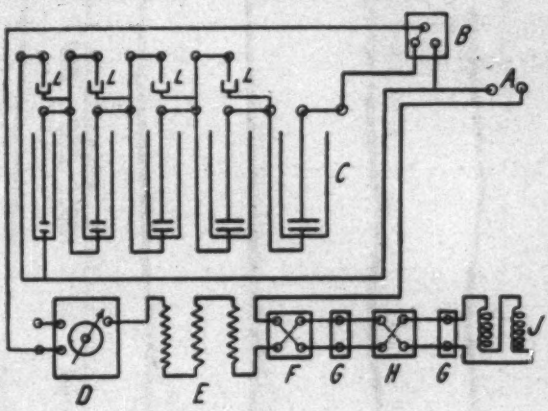
Probe	primärer Umwandlungspunkt
I	ca. 345° C.
II	„ 345
III	„ 390
IV	„ 335

1) Isabellenhütte m. b. H. Dillenburg/Westerwald.

2) Allen Mitarbeitern sage ich herzlichen Dank.

B. Die Messung am Magnetometer: Probe III und IV.

Die Meßergebnisse in der du Boisschen Wage waren nicht befriedigend genug, um sämtliche Proben in ihr zu messen. Deshalb wurde ein vorhandenes Magnetometer, wie es auf S. 869—871 beschrieben ist, in der angegebenen Weise umgebaut. Der Apparat fand seine feste Aufstellung in einem möglichst störungsfreien Teil des Institutes.



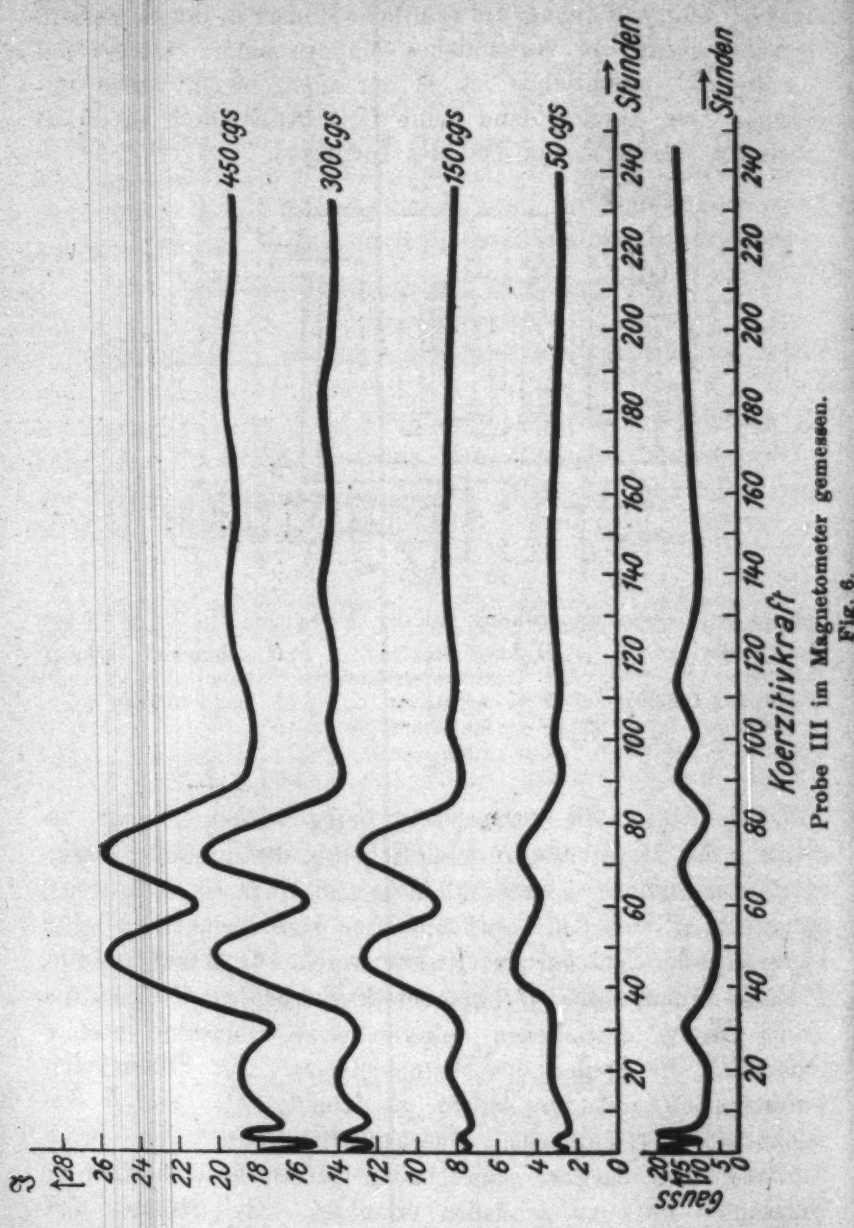
Schema der Versuchsanordnung bei den Messungen am Magnetometer

A Polbrett	*D* Amperemeter	*H* rotierender Kommutator
B Schalter	*E* Drahtwiderstände	*J* Magnetometer
C Flüssigkeitswiderstände	*F* Kommutator	*L* = *G*
	G Quecksilbernäpfe	

Fig. 5.

Fig. 5 gibt die Versuchsanordnung wieder. In ihr bedeutet *A* das Schaltbrett, *B* einen Schalter, der die fünf Flüssigkeitswiderstände *C* auszuschalten erlaubte, *D* ein Präzisionsamperemeter von Ruhstrat mit vier Meßbereichen, *E* drei hintereinander geschaltete Ruhstratsche Drahtwiderstände, *F* einen Kommutator, *G* zwei Quecksilbernäpfe, *H* einen von einem Motor getriebenen rotierenden Kommutator und *J* schließlich die Spulen des Magnetometers. Der Flüssigkeitswiderstand *C* ist im Aufriß gezeichnet; die mit *L* bezeichneten ⌴ bedeuten Quecksilbernäpfchen, die durch Schließen des darüber schwebenden Stiftes einzelne Flüssigkeitssäulen kurz zu schließen erlaubten. Bei Strömen von über 1 Amp. Stärke wurde der Flüssigkeitswiderstand ausgeschaltet.

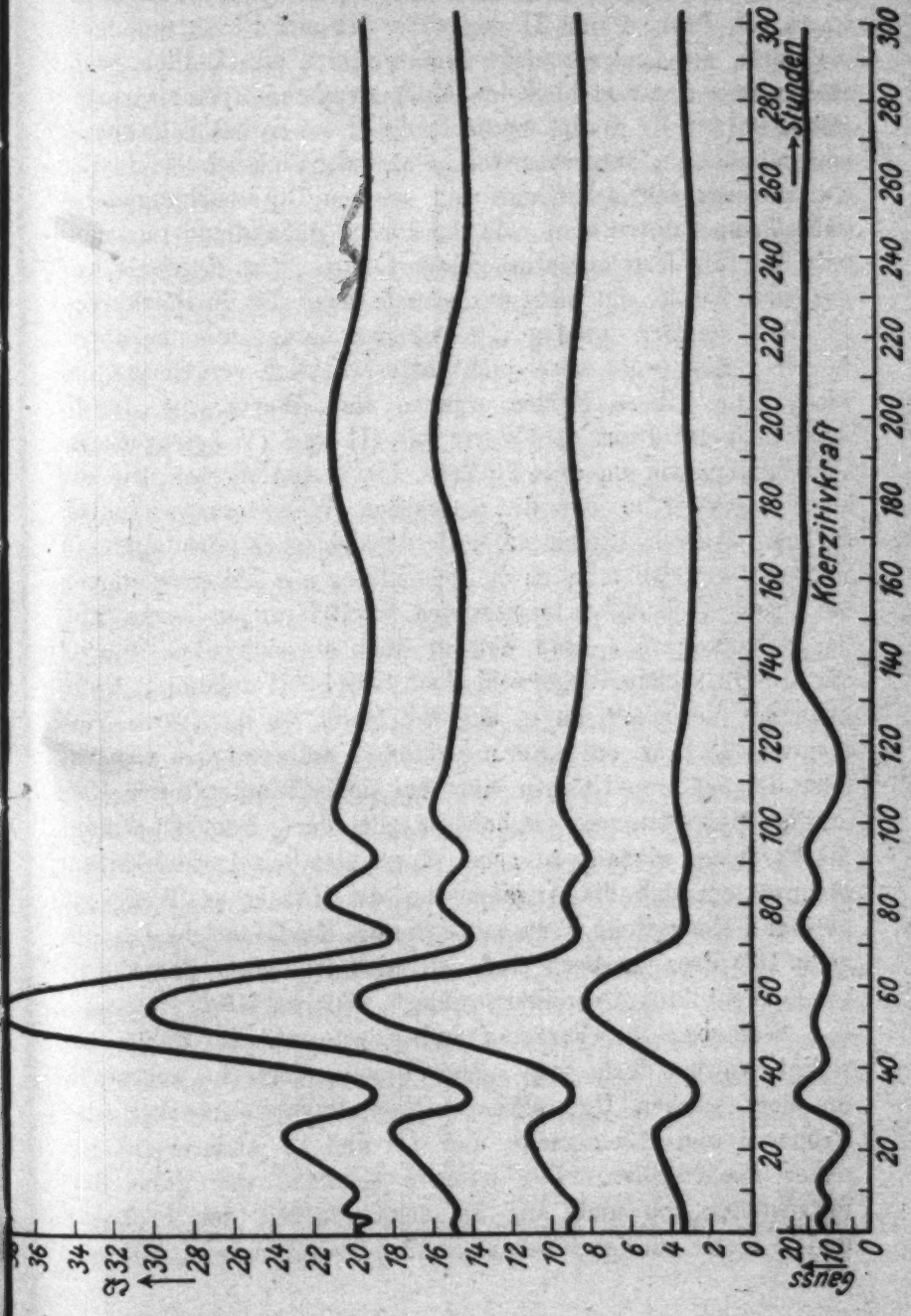
Die Proben wurden gealtert, abgeschreckt, im Magnetometer entmagnetisiert und gemessen und dann weiter gealtert.



Probe III im Magnetometer gemessen.
Fig. 6.

Die Ergebnisse über eine Beobachtungsdauer von 300 Stunden sind für Probe III in Fig. 6 und für Probe IV in Fig. 7 zu-

sammengestellt. Ein Vergleich mit den Werten für Probe I und II, die in der du Boisschen Wage gemessen sind, ließ



Probe IV im Magnetometer gemessen.

Fig. 7.

eine starke Abweichung der Meßergebnisse in der du Boisschen Wage und im Magnetometer erkennen.

Um die Ursache dieser Abweichung der Magnetisierungswerte von Probe I und II gegenüber III und IV aufzudecken, die durch die Analysen nicht ohne weiteres verständlich, wohl aber wegen der verschiedenen Meßinstrumente systematischer Fehler verdächtig waren, wurde Probe II ein halbes Jahr später noch einmal im Magnetometer gemessen, nachdem sie in der Zwischenzeit mit Ausnahme von einigen Untersuchungen bei tiefen Temperaturen ohne jede thermische Behandlung (meistenteils bei Zimmertemperatur) gelagert hatte. Das Ergebnis war zwar eine Kurve, die nicht das scharfe Knie der du Boiskurven aufwies, sondern analog den übrigen Magnetometerkurven flacher verlief, wohl aber quantitativ erheblich von diesen abwich. Für höhere Felder ergaben sich Werte, die durchschnittlich 400 Proz. der Werte von III und IV betrugen; jedoch blieben sie um etwa 20 Proz. hinter den Werten, die die letzte Messung in der du Boisschen Wage ergeben hatte, zurück. Danach scheint unter Berücksichtigung einer späteren Beobachtung, daß nämlich die Behandlung mit Kältemischungen bei Probe II keine nennenswerten Veränderungen zurückläßt, der Schluß erlaubt, daß den so stark abweichenden Werten der du Boisschen Wage wohl doch Gültigkeit zukommt, wenn auch mit Vorbehalt, da es ungewiß bleibt, ob der ganze Verlust von 20 Proz. auf Alterungseinflüsse während des Lagerns oder der späteren Untersuchung bei tiefen Temperaturen oder auf das Meßinstrument geschoben werden darf. Dagegen scheint die Form der wiedergewonnenen Kurve ziemlich deutlich darauf hinzuweisen, daß die Angaben der du Boisschen Wage für geringe Felder (steile Form mit scharfem Knick) falsch, d. h. um viele 100 Proz. zu hoch sind, was sich leicht aus der Eigentümlichkeit ihres „Abreißkriteriums“ erklären läßt.

War somit der Verdacht grober systematischer Fehler beseitigt, wurden doch noch einige weitere Versuche angestellt, um dem starken Unterschied in der Magnetisierbarkeit der Proben I und II einerseits und III und IV andererseits genauer nachzugehen. Der leitende Gedanke war dabei der, festzustellen, ob nicht die Magnetisierbarkeit der Proben I und II allein auf den Eisengehalt zurückzuführen war, während

das dann bei Probe III und IV, die nach den Analysen einen höheren Eisengehalt aufwiesen, jedoch wesentlich geringere Magnetisierungswerte ergeben hatten, nicht der Fall sein konnte.

Zu diesem Zwecke wurde diejenige Menge Eisen, die die Probe II enthielt in Pulverform[1]) mit Gips gemischt und dieses Gemenge in eine Papierhülse des gleichen Volumens und der gleichen Form, wie die Probestäbe hatten, gefüllt, und eine Hysteresisschleife aufgenommen. Das Ergebnis schien zunächst überraschend: es war eine fast völlig gleiche Kurve, wie sie Probe II im Magnetometer ergeben hatte. Dabei stimmte der Wert, den das verwandte, sorgfältig reduzierte Eisenpulver ergeben hatte, vorzüglich mit den Angaben anderer Beobachter[2]) überein, so daß sich der Schluß aufdrängte, daß die Magetisierbarkeit der Probe II lediglich auf die in ihr enthaltene Eisenmenge zurückzuführen ist, die man sich in fein verteiltem Zustand in einem unmagnetischen Material eingebettet denken muß.

Trotzdem wäre diese Behauptung voreilig, da Probe III und IV, die nach den Analysen größere Eisenmengen enthielten, geringere Magnetisierungswerte ergeben haben, was bei dieser Annahme nur durch eine weitere, dadurch gezwungen erscheinende, erklärt werden könnte. Denn bei den geringen vorliegenden Daten erscheint es durchaus willkürlich zu behaupten, daß die Magnetisierbarkeit von 15 Proz. Fe bis zu 16 Proz. Fe (vgl. Tab. 4, S. 888) einen jähen Abfall erleidet, oder (im Hinblick auf die Arbeiten von Heusler, Preusser und Semm) daß die Magnetisierbarkeit ein scharf ausgeprägtes Maximum für 17 Proz. Mn besitzt, das dann bei diesen stark eisenhaltigen Proben höher liegen würde als bei anderen Heuslerschen Legierungen. Hier zeigen sich die Schwierigkeiten *quaternärer Systeme*, die zu ihrer Erforschung wesentlich umfangreichere Untersuchungen erfordern.

Probe III weist bei 45 und 70 Stunden, Probe IV bei 55 Stunden ein ausgeprägtes Maximum auf. Die jedesmal darunter aufgetragene Kurve der Koerzitivkraft zeigt Parallelismus zur Remanenz und Antiparallelismus zu den $\mathfrak{J}$-Kurven höherer Felder, der jedoch bei den Maximis verschwindet.

---

1) Bezugsquelle: F. C. Kahlbaum; ferrum reductum.

2) R. Börnstein, Wied. Ann. 4. S. 336—354. 1875. H. v. Waltenhofen, Wied. Ann. 7. S. 415—426. 1879; W. Trenkle, Ann. d. Phys. 19. S. 692—714. 1906.

C. Die Messungen am Magnetoskop bei tiefen Temperaturen. Probe II, III und IV.

Auf Veranlassung von Hrn. F. Richarz wurden die Proben auch bei tiefen Temperaturen untersucht und zwar bei der der flüssigen Luft und der eines Äther-Kohlensäuregemisches. Da hierzu das Magnetometer erst hätte umgebaut werden müssen und auch die du Boissche Wage das Arbeiten bei solchen Temperaturen nicht ohne weiteres gestattete, begnügte man sich mit Messungen am Magnetoskop, die verhältnismäßig leicht durchzuführen waren.

Dabei ergab sich, daß das Verhalten einzelner Proben bei der Temperatur der flüssigen Luft ganz anders war als bei der des Äther-Kohlensäuregemisches.

1. Untersuchung bei − 190° C.

Die Untersuchungen bei der Temperatur der flüssigen Luft wurden nach zwei Gesichtspunkten angestellt, erstens die Ausschläge in kaltem Zustand mit denen bei Zimmertemperatur verglichen und zweitens die Veränderung der Ausschläge beim langsamen Erwärmen von tiefen Temperaturen zur Zimmertemperatur beobachtet. Die beobachteten Tatsachen sind folgende:

Tabelle 6.

Am Magnetoskop beobachtete Ausschläge der Proben II bis IV bei Zimmertemperatur und − 190° C.

	Probe II	Probe III	Probe IV
Zimmertemperatur	39,1[1]) Sktle.	3,7 Sktle.	2,8 Sktle.
	27,3	3,9	3,8
Mittel:	33,2	3,8	3,3
− 191° C.	13,8	5,6	6,7
	18,0	5,4	6,5
Mittel:	15,1	5,5	6,6
Nach Wiedererwärmung auf Zimmertemperatur	30,8	4,1	3,5

Das bedeutet also eine Abnahme der Magnetisierbarkeit bei −190° C. bei Probe II und eine Zunahme bei Probe III und IV.

1) Schlecht entmagnetisiert.

Von den vielen Erwärmungsreihen von Probe II, die dadurch gewonnen wurden, daß sich die Probe am Magnetoskop allmählich von tiefen Temperaturen zu Zimmertemperatur erwärmte, sei die folgende als typisch mitgeteilt.

Tabelle 7.

Das Anwachsen der Ausschläge am Magnetoskop mit zunehmender Erwärmung bei Probe II.

Minuten	Skalenteile
0	18
1	19
2	21
3	23
4	24
5	25

Bei Probe III und IV war der Gang gerade umgekehrt, ein Ausschlag von 5,6 Skt. war bei Probe III nach 2—3 Min. auf 5,1 Skt. und ein Ausschlag von 6,7 Skt. bei Probe IV nach 10 Min. auf 1,8 Skt. zurückgegangen. Diese Beobachtungen bestätigten sich bei jeder Wiederholung. Bemerkenswert ist außerdem, daß auch hier am qualitativen Magnetoskop die relativ so viel größere Magnetisierbarkeit der Probe II gegenüber Probe III und IV (vgl. Tab. 6) zum Ausdruck kommt.

2. Untersuchung bei − 78° C.

Ganz anders war das Verhalten der drei Proben II, III und IV bei der Temperatur des Äther-Kohlensäuregemisches. Denn bei dieser Temperatur wurde ein abweichendes Verhalten der Probe II nicht beobachtet. Von den mehr als 200 Messungen seien nur einige wenige mitgeteilt:

Tabelle 8.

Ausschläge des Magnetoskops bei Zimmertemperatur und − 78° C. bei Probe II.

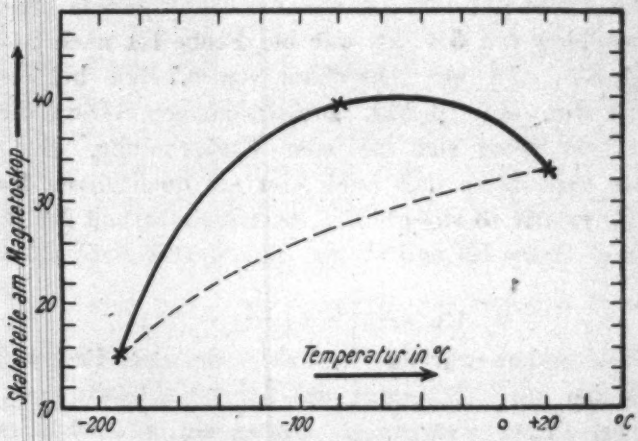
Ausschläge		Bemerkungen
+ 110 Skt.	− 118 Skt.	Zimmertemperatur
+ 116	− 135	− 78° C.
+ 224 Skt.	> − 580 Skt.	Zimmertemperatur
+ 268	> − 590	Gleiche Magnetisierung, d. h. ohne Neumagnetisierung; − 78° C.

oder

Tabelle 9.

Abstoßung	Bemerkungen
277 Skt.	Magnetisiert; − 78° C
216	Auf Zimmertemp. erwärmt
240	Neumagnetisiert bei Zimmertemperatur
302	Ohne Neumagnetisierung; − 78° C.

In allen Fällen findet also, entgegen der Beobachtung bei − 190° C., ein Zunehmen der Magnetisierbarkeit bei tiefer Temperatur statt. Dadurch ergibt sich für Probe II, wenn man die bisherigen Beobachtungen zusammenfaßt, generell folgende merkwürdige Abkühlungskurve (Fig. 8), d. h. der



Temperaturhysterese der Magnetisierbarkeit von Probe II bei starker Abkühlung.

Fig. 8.

Magnetismus nimmt bei Abkühlung zunächst zu, um späterhin stark abzufallen. Bei den andern Proben, wie überhaupt wohl bei den meisten Substanzen, findet dieser Abfall nicht statt, sondern die Magnetisierbarkeit nimmt mit fallender Temperatur stetig zu. Die punktierte Linie deutet die Wiedererwärmungskurve nach den Versuchen an.

Bei Probe III und IV liegen die Verhältnisse bei − 78° C. qualitativ und quantitativ gleich. So wurde z. B. beobachtet

Tabelle 10.

Ausschläge des Magnetoskops bei Zimmertemperatur und − 78° C. bei Probe III und IV.

Probe	Ausschläge		Bemerkungen
III	+ 35 Skt. + 50	− 55 Skt. − 87	Zimmertemperatur − 78° C.
IV	+145 Skt. +123	−275 Skt. −225	Bei −78° C. zweimal ummagnet. Bei Zimmertemp. gleich danach

Während bisher im wesentlichen influenzierter Magnetismus beobachtet war, konnten diesmal außerdem noch andere Versuche ausgeführt werden. Die Proben wurden der Reihe nach zwischen den Polen eines starken Elektromagneten bei Zimmertemperatur magnetisiert, gemessen, zweimal ummagnetisiert und dann bei tiefer Temperatur wieder gemessen, d. h. der Einfluß der Abkühlung auf den remanenten Magnetismus untersucht. — Um sicher zu gehen, daß die wiederholte Ummagnetisierung allein bei dieser Versuchsanordnung keinen bestimmenden Einfluß auf die Remanenz hatte, wurden die gleichen Versuche auch ohne Abkühlung angestellt (vgl. Nr. 3 und 4 in Tab. 11; aber auch 7 und 8). Die in die Augen fallenden Ergebnisse sind in Tab. 11 zusammengestellt.

Tabelle 11.

Ausschläge des Magnetoskops bei wechselnder magnetischer und thermischer Behandlung bei Probe II.

Lfd. Nr.	Abstoßung	Bemerkungen
1.	>500 Skt.	Zweimal bei − 78° C. ummagnetisiert
2.	230	Dieselbe Probe ohne Neumagn. auf Zimmertemp. erwärmt
3.	245	Neumagnetisiert bei Zimmertemperatur
4.	245	Zweimal bei Zimmertemperatur ummagnetisiert
5.	>500	Zweimal bei −78° C. ummagnetisiert
6.	213	Auf Zimmertemperatur erwärmt
7.	249	Bei Zimmertemperatur stärker magnetisiert
8.	294	Zweimal bei Zimmertemperatur ummagnetisiert
9.	313	Dieselbe Probe bei −78° C. ohne Neumagnetisierung.

Vergleicht man 4 und 5, so springt der Unterschied, den der Temperatureinfluß bedingt, sofort in die Augen. In beiden Fällen waren die Handhabungen völlig gleich, was Lage, Magnetisierungsstromstärke usw. betrifft; nur die Temperatur

beim zweiten Ummagnetisieren war verschieden und jedesmal trat bei tiefen Temperaturen der gleiche heftige Ausschlag auf. Das kann erstens an einer leichteren Magnetisierbarkeit bei tiefen Temperaturen oder zweitens an einer größeren Remanenz liegen. Am Magnetoskop ließ sich diese Frage nicht ohne weiteres entscheiden.

IV. Schluß.

Die Ergebnisse der Arbeit lassen sich etwa wie folgt zusammenfassen:

1. Die du Boissche Wage ist nur zur Untersuchung hochpermeabler Stoffe geeignet; besonders bei niedrigen Feldstärken sind ihre Angaben für schwachpermeable Stoffe in unkontrollierbarer Weise zu hoch.

2. Ein von Tobusch angegebenes störungsfreies Magnetometer zur Untersuchung der magnetischen Nachwirkungen erwies sich wegen seiner hohen Empfindlichkeit auch zur Aufnahme von Magnetisierungskurven schwachpermeabler Stoffe als gut brauchbar. Die Formeln für dieses Magnetometer wurden theoretisch abgeleitet und empirisch geprüft. Insbesondere wird die Erkenntnis gewonnen, daß bei magnetometrischen Messungen an Stäben der Einfluß des magnetisierenden Spulenfeldes auf den Polabstand der zu untersuchenden Probe nicht immer vernachlässigt werden darf.

3. Aluminium-Manganbronzen werden durch hochprozentige Zusätze von Eisen (13,5—18 Proz.) weder magnetischer noch unmagnetischer als solche ohne Eisenzusätze. Vielmehr bewegen sich die gemessenen Magnetisierungswerte innerhalb der Grenzen der bisher an Heuslerschen Legierungen beobachteten Werte. Es ist möglich, daß dem Mangangehalt eine ausschlaggebendere Bedeutung zukommt als dem Eisengehalt. Entschieden werden kann diese Frage nur durch systematisch abgestufte Eiseneinsätze.

4. Bei tiefen Temperaturen nimmt die Magnetisierbarkeit der Eisen-Aluminium-Manganbronzen im allgemeinen zu. Dagegen wurde bei einer 9,2 Proz. Al, 17,8 Proz. Mn, 13,5 Proz. Fe und 59,6 Proz. Cu enthaltenen Bronze bei $-190°$ C. ein entgegengesetztes Verhalten beobachtet, obwohl dies bei $-78°$ C. noch nicht der Fall war.

Zum Schluß muß auch an dieser Stelle mit wenigen Worten darauf hingewiesen werden, daß eine Erfolg versprechende Aufklärung aller physikalischen Vorgänge während der Alterung nur dann zu erwarten ist, wenn alle markanten physikalischen Veränderungen der Bronzen während der Alterung gleichzeitig in Schliffen unter dem Mikroskop verfolgt werden. Bei der vorliegenden Arbeit geschah dies nur zur Unterstützung der stark voneinander abweichenden Analysen: es ergab sich eine genügende Homogenität. Auf die Wiedergabe der Aufnahmen muß aus Gründen der Platzersparnis verzichtet werden. — Ohne Kenntnis des Zustandsdiagramms einer Legierung und ohne metallographische Gefügeuntersuchungen bleiben alle Erklärungsversuche der bisher beobachteten Tatsachen mehr oder minder anfechtbar. Ebenso kann der Einfluß ferromagnetischer Beimengungen auf die Magnetisierbarkeit der Heuslerschen Legierungen nur dann eindeutig festgestellt werden, wenn die Zahl der untersuchten Proben je nach den Ergebnissen durch Nachgüsse mit bestimmter prozentualer Zusammensetzung ergänzt wird.

Die vorliegende Arbeit ist auf Veranlassung von Hrn. Geheimrat Richarz † im Physikalischen Institut der Universität Marburg ausgeführt. Sowohl ihm wie Hrn. Professor Take verdanke ich manche Anregung und wertvolle Hilfe.

(Eingegangen 21. Juli 1920.)

5. *Neuere Beobachtungen über die Polarisation des bei der Totalreflexion gebrochenen Lichtes*[1]; *von Paul Fröhlich.*

Inhaltsverzeichnis. § 1. Beschreibung der beobachteten Erscheinung. — § 2. Beobachtungsmethode. — § 3. Experimentelle Einrichtung. — § 4. Einige sphärisch-trigonometrische Transformationen. — § 5. Die Resultate der Beobachtungen. Schlußbemerkungen.

§ 1. Beschreibung der beobachteten Erscheinung.

Es sei in Fig. 1 XY die Grenzebene zweier isotropen, durchsichtigen, optisch verschiedenen Medien, φ_1 der Einfallswinkel, φ_2 der Brechungswinkel, YZ die Einfallsebene.

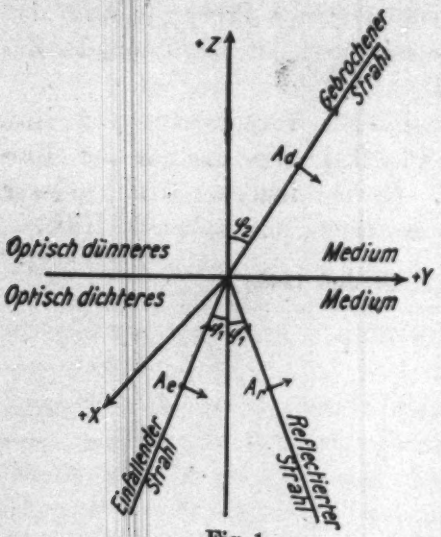


Fig. 1.

Der einfallende Strahl sei im allgemeinen elliptisch polarisiert. E_s und $\varepsilon_{e,s}$ seien die Amplitude und Anfangsphase der einfallenden, zur Einfallsebene senkrechten Vektorkomponente. E_p und $\varepsilon_{e,p}$ seien die Amplitude und Anfangsphase der einfallenden, zur Einfallsebene parallelen Vektorkomponente. D_s, $\varepsilon_{d,s}$; D_p, $\varepsilon_{d,p}$ haben dieselbe Bedeutung in bezug auf den gebrochenen Strahl.

Der einfallende Strahl geht vom optisch dichteren gegen das dünnere Medium.

1) Vorgelegt im ungarischen Originale der Ungarischen Akademie der Wissenschaften den 18. Juni 1917. Erschien in deren Mitteilungen: „Mathematikai és Természettudományi Ertesitö", 36. S. 68—97. Budapest 1918.

Es sei noch φ_1 größer als der Grenzwinkel der Totalreflexion; dann ist:

$$\cos\varphi_2 = -\sqrt{-1}\sqrt{n^2\sin^2\varphi_1 - 1}\ ^{1}).$$

Die Ausdrücke der Vektorkomponenten des einfallenden Lichtes seien:

$$(1)\quad \begin{cases} X_e = +E_s\cos(\psi_e + \varepsilon_{e,s}) \\ Y_e = +E_p\cos\varphi_1\cos(\psi_e + \varepsilon_{e,p}) \\ Z_e = -E_p\sin\varphi_1\cos(\psi_e + \varepsilon_{e,p}). \end{cases}$$

Die Vektorkomponenten des gebrochenen Strahls sind dann gemäß der bekannten Theorie:

$$(2)\quad \begin{cases} X_d = +D_s\cdot e^{-\frac{2\pi z_d}{\lambda_2}\cdot\sqrt{n^2\sin^2\varphi_1 - 1}}\cdot\cos(\chi_d + \varepsilon_{d,s} + \delta_{d,s}), \\ Y_d = +D_p\cdot e^{-\frac{2\pi z_d}{\lambda_2}\cdot\sqrt{n^2\sin^2\varphi_1 - 1}}\cdot\sqrt{n^2\sin^2\varphi_1 - 1} \\ \qquad\qquad\cdot\cos\left(\chi_d + \varepsilon_{d,p} + \delta_{d,p} - \frac{\pi}{2}\right), \\ Z_d = -D_p\cdot e^{-\frac{2\pi z_d}{\lambda_2}\cdot\sqrt{n^2\sin^2\varphi_1 - 1}}\cdot n\cdot\sin\varphi_1 \\ \qquad\qquad\cdot\cos(\chi_d + \varepsilon_{d,p} + \delta_{d,p}). \end{cases}$$

Dabei sind D_s und D_p reelle Konstanten, λ_2 die Wellenlänge im zweiten, dünneren Medium, endlich ist:

$$\psi_e = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y_e\sin\varphi_1 + z_e\cos\varphi_1}{\lambda_1}\right);\quad \chi_d = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y_d\sin\varphi_1}{\lambda_1}\right).$$

Aus (2) ist ersichtlich, daß der Vektor in das zweite Medium zwar eindringt, aber seine Amplitude nimmt mit der Eindringungstiefe rasch ab. Der eindringende Vektor ist ebenfalls elliptisch polarisiert.

Bei Beachtung der Grenzbedingungen erhält man aus (2), wenn der Einfallswinkel der Grenzwinkel der Totalreflexion ist:

$$(3)\quad \begin{cases} \text{I.}\quad X_d = +2E_s\cos\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda_2}\right) + \varepsilon_{e,s}\right\}, \\ \qquad Y_d = 0, \\ \qquad Z_d = -2nE_p\cos\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda_2}\right) + \varepsilon_{e,p}\right\}. \end{cases}$$

1) P. Drude, Lehrbuch der Optik. 3. Aufl. S. 282. 1912.

In diesem Falle dringt in das zweite Medium ein elliptischer Vektor ein, der sowohl zur Einfallsebene als auch zur Grenzebene senkrecht ist.

II. Es sei außer den Bedingungen I. noch der einfallende Strahl zur Einfallsebene parallel polarisiert, dann muß $E_p = 0$ sein und aus (3) erhalten wir:

$$X_d = + 2E_s \cos\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda_2}\right) + \varepsilon_{s,s}\right\}. \tag{4}$$

In diesem Falle dringt in das zweite Medium ein zur Grenzebene paralleler, zur Einfallsebene senkrechter, linearer Vektor ein.

III. Wenn der einfallende Strahl zur Einfallsebene senkrecht polarisiert ist, dann muß $E_s = 0$ sein und aus (3) erhalten wir:

$$Z_d = - 2n E_p \cos\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda_2}\right) + \varepsilon_{s,p}\right\}. \tag{5}$$

Dann dringt in das zweite Medium ein zur Grenzebene senkrechter, linearer Vektor ein.[1])

Der Fall I ist bisher quantitativ noch nicht verifiziert, aber dieser Fall ist auch nicht wichtig, denn er ist eine einfache vektorielle Zusammensetzung der folgenden zwei Fälle.

Der Fall II wurde als ein Teil einer größeren experimentellen Untersuchung von Hrn. Franz Kurdilla untersucht, und seine quantitativen Beobachtungen bestätigen im allgemeinen befriedigend die Formel (4).

Die Resultate erschienen bisher nur in ungarischer Sprache.[2])

In bezug auf den Fall III erwähne ich folgendes. Professor J. Fröhlich untersuchte unter werktätiger Beihilfe des

---

1) Darüber findet man Näheres in der infolge der Kriegsumstände bisher nur in ungarischer Sprache erschienenen Arbeit Prof. J. Fröhlichs: A teljes fényvisszaverödésnél megtört sugár polározása állapotának vissgálata. (Untersuchung des Polarisationszustandes des bei der Totalreflexion gebrochenen Strahles.) M. Tud. Akadémia Math. és Természettud. Ertesitöje. XXXV. k. S. 120—158. Budapest 1917.

2) Kurdilla Ferencz: Ultramikroskópos részecskék létesitette fényelhajlás polárosságáról. (Über die Polarisation der von ultramikroskopischen Teilchen verursachten Lichtbeugung.) M. Tud. Akadémia Math. és Természettud Ertesitöje. XXXI. k. S. 121—183. Budapest 1913.

Hrn. Ludwig Frenyó in den Jahren 1913—14 die Polarisation des gebrochenen Strahles ganz systematisch in verschiedenen Fällen, wobei der Einfallswinkel kleiner und größer war, als der Grenzwinkel der Totalreflexion. Ein Teil der Resultate dieser Beobachtungen erschien in der oben erwähnten Arbeit in ungarischer Sprache.

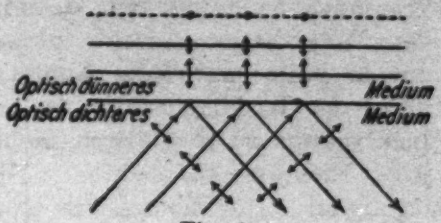


Fig. 2.

Ich bemerke nur kurz, daß im Falle III, wenn der Einfallswinkel kleiner ist, als der Grenzwinkel, eine gewöhnliche Brechung entsteht; im zweiten Medium ist der Strahl zur Einfallsebene senkrecht, linear polarisiert.

Wenn der Einfallswinkel größer ist als der Grenzwinkel, dann folgt aus den Formeln (2), daß $X_d = 0$, jedoch Y_d und Z_d von Null verschieden sind; also dringt in das zweite Medium ein elliptischer Vektor, dessen Ellipse in der Einfallsebene liegt, und dessen Y_d-Komponente *longitudinal* zur Fortpflanzungsrichtung des Strahles liegt.

Experimentell kann man die drei Fälle, wenn der Einfallswinkel größer, kleiner und gleich dem Grenzwinkel ist, sehr leicht herstellen. Deren gleichzeitige Darstellung zeigt Fig. 3 in übersichtlicher Weise.

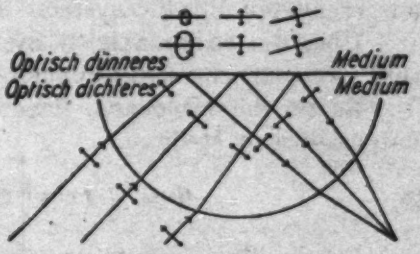


Fig. 3.

Prof. J. Fröhlich machte mich aufmerksam, daß in den oben erwähnten von L. Frenyó ausgeführten Beobachtungen diejenigen, welche sich auf den unter dem Grenzwinkel einfallenden Strahl beziehen, stellenweise Unsicherheiten aufweisen, und veranlaßte mich daher, diesen Fall neuerdings quantitativ zu untersuchen.

Ich untersuchte daher die Polarisation desjenigen in das dünnere Medium gebrochenen Lichtes, welches aus dem unter dem Grenzwinkel einfallenden, senkrecht zur Einfallsebene polarisierten Lichte entsteht.

§ 2. Beobachtungsmethode.

Dazu benützte ich eine in ähnlichen Fällen schon mit Erfolg gebrauchte Methode.

Wenn man nämlich in das zweite Medium, sehr nahe zur Trennungsebene, und zwar davon nur von der Größenordnung der Wellenlänge entfernt, ultramikroskopische Teilchen, in diesem Falle ganz feine Rußteilchen setzt, so werden diese unter der Wirkung des in das zweite Medium eindringenden Lichtvektors zu sekundären Lichtquellen, und sind dann von jeder Richtung aus sichtbar. Die Bahn der sekundären Erregung an der Erregungsstelle ist gleich der des eindringenden, erregenden Lichtvektors.

Falls also der erregende Vektor linear und zur Trennungsebene senkrecht ist, so muß jedes ultramikroskopische Teilchen in jeder Richtung solche Strahlen senden, deren *Polarisationsebenen* ein zur Normale der Trennungsebene zirkumaxiales System bilden; oder die auf einer Kugelfläche, dessen Zentrum das ultramikroskopische Teilchen ist, liegenden *Vektoren* bilden ein zur Normale meridionales Vektorensystem.

In unserem Falle ist das erste Medium homogenes Glas von der Form einer Halbkugel, das zweite Luft.

Ich löste meine Aufgabe also in der Weise, daß ich die Polarisation des durch solche ultramikroskopische Teilchen ausgesendeten Strahlensystems untersuchte.

Über die zirkumaxialen Systeme findet man in der Literatur ausführliche Erörterungen.[1])

Es sei der erregende, lineare Vektor in einem isotropen, durchsichtigen Medium.

$$\Phi = Q A \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \varepsilon\right), \tag{6}$$

wo Q ein Proportionalitätsfaktor ist. Dann erhalten wir für den Vektor, der zum Strahle R gehört, in der Entfernung r von der Erregungsstelle:

$$\Phi_{R,r} = \frac{A}{r} \sin \Omega \cos\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) + \varepsilon\right\}, \tag{7a}$$

1) Z. B. Dr. J. Fröhlich, Polarisation des von Glasgittern gebeugten Lichtes. S. 140ff. B. G. Teubner. Leipzig 1907. Sonderabdruck aus dem XXII. Bd. der Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Berichte aus Ungarn. S. 65—438.

dabei ist Ω der Winkel, welchen die Richtung der linearen Erregung, in unserem speziellen Falle die Normale der Grenzebene und der Strahl R mit einander einschließen. Diejenigen zerstreuten Strahlen, welche mit der Erregungsgeraden den gleichen Winkel bilden, haben die gleiche Intensität; die zugehörigen Vektoren haben denselben Ausdruck, und der Vektor liegt in der Tangente des jeweiligen durch den Strahl R und der Richtung der Normale bestimmten Meridians. Die Intensität des Strahles, welcher in der Normale liegt, ist gleich

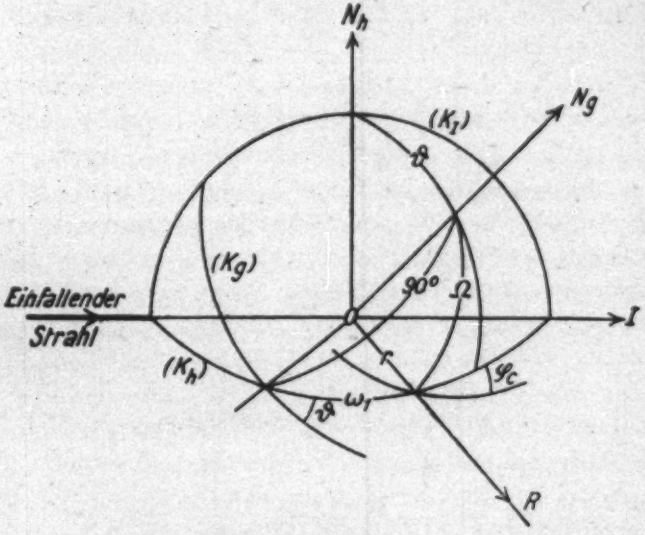


Fig. 4.

Null, sie wächst mit dem Sinus des Winkels, welchen die Normale und der Strahl einschließen.

Es sei in Fig. 4 K_g die Grenzebene der Glashalbkugel und Luft, N_g die Normale dieser Grenzebene und gleichzeitig auch die Gerade des erregenden Vektors, die Ebene des horizontalen Hauptkreises des Apparates sei K_h, die Richtung des einfallenden Strahles $\overrightarrow{OI}$, der beobachtete, durch die ultramikroskopischen Teilchen zerstreute Strahl $\overrightarrow{OR}$. Dann erhalten wir aus der Gesetzmäßigkeit des zirkumaxialen Systems:

$$\operatorname{tg} \varphi_c = \cos \omega_1 \cdot \operatorname{tg} \vartheta \,. \tag{8}$$

So ist es leicht, das theoretische Polarisationsazimut des

beobachteten Strahles zu bestimmen und mit den Beobachtungsresultaten zu vergleichen.

Der Ausdruck (7a) bezieht sich nur auf die in der Luft zerstreuten Strahlen.

In bezug auf die in der Glashalbkugel fortschreitenden zerstreuten Strahlen sind zwei Kategorien zu unterscheiden.[1])

I. Der beobachtete Strahl liege innerhalb des Grenzkegels der Totalreflexion.[2]) Dann ist der Ausdruck des Vektors:

$$(7\,b)\quad \Phi_{R,g} = \frac{A \sin \varphi_2}{r_1} \cdot \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \cdot \cos(\psi + \varepsilon),$$

wobei

$$\psi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda_2} - \frac{r_1}{\lambda_1}\right),$$

und φ_2 der Einfallswinkel, φ_1 der Brechungswinkel, r_2 der Weg in der Luft, r_1 der Weg im Glas des beobachteten, zerstreuten Strahles ist.

II. Der beobachtete Strahl liege außerhalb des Grenzkegels der Totalreflexion; dann ist der Ausdruck des Vektors:

$$(7\,c)\quad \Phi_{R,d,\mathrm{tot}} = D \cdot e^{-\frac{2\pi z_d}{\lambda_2} \cdot \sqrt{n^2 \sin^2 \varphi_1 - 1}} \cdot \cos(\psi + \varepsilon + \Delta)^3),$$

wobei

$$D = \frac{2A}{r_1} \cdot \frac{n^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{\sqrt{n^2 - 1} \cdot \sqrt{(n^2 + 1)\sin^2 \varphi_1 - 1}},$$

$$\operatorname{tg} \Delta = \frac{-n\sqrt{n^2 \sin^2 \varphi_1 - 1}}{\cos \varphi_1};$$

ferner ist z_d die Entfernung der Rußteilchen von der Grenzebene.

Der Ausdruck (8) ist in jedem Falle gültig.

---

1) Hierüber findet man Näheres in der infolge der Kriegsereignisse bisher nur in ungarischer Sprache erschienenen Arbeit Prof. J. Fröhlich, Különbözö törésü két közeg válaszfelülete közelségében lévö fénylö pontok elméletéhez. (Zur Theorie von leuchtenden Punkten, die sich in der Nähe der Grenzfläche zweier Medien von verschiedener Brechbarkeit befinden.) M. Tud. Akadémia. Mathematikai és Természetludományi Ertesitöjének. XXXVI. k. S. 453—517. 1916.

2) Figur 7.

3) A. a. O.

§ 3. Experimentelle Einrichtung.

Als Lichtquelle diente der Krater einer Bogenlampe der Firma Zeiss; sie hat den großen Vorteil, daß die Kohlenstifte senkrecht zueinander stehen so, daß der Krater fast unbewegt bleibt.

Der vom Krater ausgehende divergente Strahlenkegel wurde mit einer Sammellinse von 65 cm Brennweite parallel gemacht.

Die Beobachtungen geschahen mit einem großen Jamin-Sénarmontschen Polarisationskreise, auf dessen Hauptkreise liegen: ein unbewegliches, mit einem Foucaultschen Polarisationsprisma versehenes Polarisationsrohr und ein um eine vertikale Achse drehbares Beobachtungsrohr, welches mit einem Nikol-Analysator versehen war.

Das parallele, von der Lichtquelle ausgehende Strahlenbündel geht durch das Polarisationsprisma, dieses wurde immer so eingestellt, daß das austretende Strahlenbündel zur Einfallsebene senkrecht polarisiert war, demnach liegt der Vektor in der Einfallsebene.

Das austretende, parallele, linear polarisierte Strahlbündel tritt durch eine Spalte, dessen Breite 2 mm beträgt, auf die sphärische Fläche der Halbkugel, dringt ohne Richtungs- und Polarisationsänderung in die Glashalbkugel ein und trifft die leicht berußte, ebene Grenzfläche derselben.

Die ultramikroskopischen Rußteilchen wurden dadurch zu sekundären leuchtenden Zentren und daher ist das Bild der oben erwähnten Spalte von jeder Richtung aus auf der berußten Grenzebene sichtbar. Die von diesem Bilde ausgehenden Strahlen wurden mit dem Beobachtungsnikol untersucht.

Der Mittelpunkt der Grenzebene liegt in der Achse des Hauptkreises, die Glashalbkugel ist um die Achse des Polarisationsrohres drehbar und die Grenzebene kann man, in bezug auf das erwähnte eindringende Lichtbündel, auf beliebige Einfallswinkel einstellen.

Die Berußung der Grenzebene ist sehr einfach. Sie wurde über der Flamme einer Stearinkerze schnell hin und her bewegt, bis sie mit einer feinen Rußschichte bedeckt war. Die Rußschichte muß so fein sein, daß man sie bei gewöhnlichem Anblick fast nicht bemerkt, nur wenn man einen Teil davon abwischt und die Ebene tangential betrachtet, ist sie erkennbar.

Die gebrauchte Glashalbkugel hat den mittleren Brechungsindex $n = 1{\cdot}4789$, und der mittlere Grenzwinkel der Totalreflexion ist $i_{tot} = 42{\cdot}6^0$ für weißes Licht.

Die positive Drehungsrichtung des Beobachtungsrohres ist von oben betrachtet mit dem Uhrenzeiger gleichlaufend. Ihre Anfangslage ist der Schnittpunkt der Verlängerung der Achse des Polarisationsrohres und des Hauptkreises. Den abgelesenen Drehungswinkel des Beobachtungsrohres bezeichne ich mit ω_1.

Die positive Drehungsrichtung des Beobachtungs- und des Polarisationsnikols auf den eigenen Positionskreisen ist für den, dem einfallenden Strahle entgegensehenden Beobachter ebenfalls gleichlaufend mit dem Uhrenzeiger. In der Anfangslage bleibt das Licht zur Ebene des Hauptkreises senkrecht polarisiert. Die abgelesenen Winkel wurden mit φ_0 und P bezeichnet.

Die positive Drehungsrichtung des Rohrs, welches die Glashalbkugel trägt, ist, von der dem einfallendem Strahle entgegengesetzten Richtung betrachtet, entgegengesetzt der Bewegung des Uhrenzeigers. Im Falle der Anfangslage liegt die positive und nach oben gerichtete Normale der Trennungsebene, die Normale des Hauptkreises und der einfallende Strahl in derselben Ebene. Den abgelesenen Winkel des eingestellten Rohres der Halbkugel bezeichne ich mit α.

Im hier erwähnten Falle nenne ich den ständig eingestellten Einfallswinkel *positiv*; es bezeichne ihn i_{tot}.

Wenn die Normale der Trennungsebene in der oben erwähnten Ebene, aber in der Richtung nach unten (unter der Ebene des Hauptkreises) liegt, so nenne ich den Einfallswinkel *negativ*, und bezeichne ihn mit $-i_{tot}$. In diesem Falle ist die Achse des zirkumaxialen Systems um den Winkel $2\,i_{tot}$ verdreht.

§ 4. Einige sphärisch-trigonometrische Transformationen.

Es sei in Fig. 5 K_h die horizontale Ebene des Hauptkreises, K_e die Einfallsebene, K_g die Trennungsebene der Glashalbkugel und Luft, K die zum Hauptkreise senkrechte Ebene, welche den einfallenden Strahl $\overrightarrow{OI}$ enthält.

$\overrightarrow{ON_h}$ ist die Normale des Hauptkreises,

$\overrightarrow{ON_g}$ die Normale der Trennungsebene, also hier auch die Achse des zirkumaxialen Systems.

$\overrightarrow{OS_gR}$ der beobachtete, zerstreute Strahl.

$\overrightarrow{OI}$ die Richtung des einfallenden Strahles.

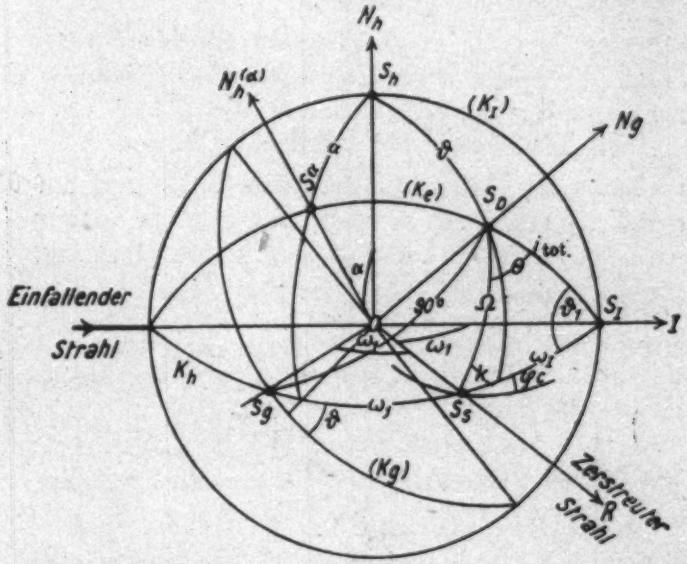


Fig. 5.

α ist der Drehungswinkel des Rohres, welches die Glashalbkugel trägt, also auch der Winkel der Einfallsebene mit der vertikalen Ebene N_hOI.

ϑ ist der Winkel zwischen den Normalen der Trennungsebene und der Ebene des Hauptkreises, also auch das Azimut der Polarisationsebene des erregenden Vektors.

$\Omega = (\widehat{S_gS_D})$ und Θ sind die sphärischen Koordinaten des beobachteten Strahles in bezug auf die Richtung der Achse des zirkumaxialen Systems $\overrightarrow{(OS_DN_g)}$ und auf die Einfallsebene (OS_DS_I).

$\omega_I = (\widehat{S_I S_s})$ und ϑ_I sind ebenfalls sphärische Koordinaten des beobachteten Strahles, jedoch in bezug auf den einfallenden Strahl und der Einfallsebene.

ω_1 ist die sphärische Entfernung der Schnittlinie der Trennungsebene mit dem Hauptkreise und des beobachteten Strahles.

φ_c ist das, aus der Gesetzmäßigkeit der zirkumaxialen Anordnung berechnete Polarisationsazimut des beobachteten Strahles in bezug auf den Hauptkreis.

Das System der zu beobachtenden Strahlen wurde so gewählt, daß die sphärischen Koordinaten des jeweilig beobachteten Strahles, nämlich Ω und Θ von $\Omega = 0$ und von $\Theta = 0$ in Abständen von je 15^0 aufeinander folgen.

Indeß kann der Beobachtungsapparat direkt nur auf die Werte a und ω_I eingestellt werden; daher ist es notwendig, die Koordinaten Ω und ϑ auf a und ω_I zu transformieren.

Aus dem sphärischen Dreiecke: $S_D S_I S_s$ folgt:

$$(9)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{k+\vartheta_I}{2} = \operatorname{cotg}\dfrac{\Theta}{2}\dfrac{\cos\left(\dfrac{i_{tot}-\Omega}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{i_{tot}+\Omega}{2}\right)}; \\ \operatorname{tg}\dfrac{k-\vartheta_I}{2} = \operatorname{cotg}\dfrac{\Theta}{2}\dfrac{\sin\left(\dfrac{i_{tot}-\Omega}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{i_{tot}+\Omega}{2}\right)}; \\ \operatorname{tg}\dfrac{\omega_I}{2} = \operatorname{tg}\dfrac{i_{tot}-\Omega}{2}\dfrac{\sin\left(\dfrac{k+\vartheta_I}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{k-\vartheta_I}{2}\right)}. \end{cases}$$

Mittels dieser Gleichungen sind die Werte k, ϑ_I, ω_I aus den Werten Ω, Θ und i_{tot} bestimmt, und da $a = 90^0 - \vartheta_I$, so sind die symmetrischen Koordinaten Ω und Θ mittels der unmittelbar abgelesenen Koordinaten ω_I und a ausgedrückt.

In der Grundgleichung des zirkumaxialen Systems § 2, Formel (8)

$$\operatorname{tg}\varphi_c = \cos\omega_1 \operatorname{tg}\vartheta,$$

sind $\cos\omega_1$ und $\operatorname{tg}\vartheta$ unbekannt.

Aus dem sphärischen Dreiecke $S_e S_D S^I$ folgt:

$$\operatorname{cotg}(\omega_1 + \omega_I) = -\operatorname{tg} i_{tot} \cdot \cos \vartheta_I ,$$

folglich

$$\operatorname{cotg} \omega_1 = \frac{1 - \operatorname{cotg} \omega_I \operatorname{tg} i_{tot} \cdot \cos \vartheta_I}{\operatorname{cotg} \omega_I + \cos \vartheta_I \operatorname{tg} i_{tot}} .$$

Aus dem sphärischen Dreiecke $S_e S_s S_D$ folgt:

$$\sin \omega_1 = \frac{\cos \Omega}{\sin \vartheta} .$$

Endlich aus dem sphärischen Dreiecke $S_h S_s S_D$

$$\cos \vartheta = \sin \vartheta_I \cdot \sin i_{tot} .$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir:

$$\operatorname{tg} \varphi_e = \frac{\cos \Omega}{\sin \vartheta_I \sin i_{tot}} \cdot \frac{1 - \operatorname{cotg} \omega_I \operatorname{tg} i_{tot} \cos \vartheta_I}{\operatorname{cotg} \omega_I + \cos \vartheta_I \operatorname{tg} i_{tot}} ; \tag{10}$$

daher läßt sich der Wert φ_e mit Hilfe der bekannten Koordinaten ω_I, ϑ_I, i_{tot}, Ω berechnen.

§ 5. Die Resultate der Beobachtungen. Schlußbemerkungen.

Die räumliche Anordnung der beobachteten Strahlen ist symmetrisch um die Normale der ebenen Grenzfläche der Glashalbkugel; es liegen die Durchstoßungspunkte der Strahlen einesteils längs Parallelkreisen um diese Normale, welche von je 15° aufeinander folgen, andernteils längs Meridianen, deren gegenseitiger Winkelabstand ebenfalls 15° beträgt. So wurde auf jedem Parallelkreis das Polarisationsazimut von 24 Strahlen bestimmt. Zwischen die Parallelkreise $\Omega = 15^0$ und $\Omega = 30^0$ schob ich den Parallelkreis $\Omega = 22{,}5^0$ ein.

Die Beobachtungen habe ich mit einem einfachen Nikol durchgeführt, denn die Polarisation der beobachteten Strahlen ist fast immer linear.

Ich stelle die Resultate der Messungen in der Fig. 6 graphisch dar. Sie ist die stereographische Projektion einer der Halbkugeln, auf deren Fläche die Beobachtungen geschahen. Der Augenpunkt der Projektion liegt in der negativen

Normale der Trennungsebene in der Entfernung R. Die Parallelkreise sind in der Projektion die konzentrischen Kreise. Die Meridiane sind hier die Diagonalen des Kreissystems. Die Diagonale X Y (in Fig. 5: $\overset{\frown}{S^1 S_D S_2}$) ist die Schnittlinie der Halbkugel und Einfallsebene. Der Winkel Θ ist von X zu nehmen in der entgegengesetzten Richtung der Bewegung des Uhrenzeigers; der Winkel Ω vom Mittelpunkte des konzentrischen Kreissystems (in Fig. 5: S_D). Die Pfeile zeigen die Schwingungsrichtungen der Lichtvektoren, die aus der Beobachtung bestimmt wurden.

1. Die erste Gruppe der Messungen bezieht sich auf die unmittelbar in die Luft zerstreuten Strahlen.

Im Falle $\Omega = 0^0$, also in der Normale der Trennungsebene (Mittelpunkt der konzentrischen Kreise in Fig. 6), wie aus Gleichungen (7) und (10) ersichtlich, muß die Intensität Null und das Azimut der Polarisationsebene unbestimmt sein. Das beobachtete Spaltenbild ist in diesem Falle am dunkelsten, aber bei Drehung des Nikols ist auch hier ein noch merkliches Minimum zu finden; daraus folgt, daß neben dem in der Normale der Trennungsebene erwarteten Vektor, im zweiten, dünneren Medium noch ein Vektor auftritt, der in der Einfallsebene, jedoch parallel zur Trennungsebene liegt. Dessen Amplitude ist indeß sehr klein in bezug der Amplitude des in der Normalen liegenden Vektors.

Auf dem Parallelkreise $\Omega = 15^0$ (erster Parallelkreis in Fig. 6) wird die Beobachtung infolge der Dunkelheit des Spaltbildes im großen Maße unsicher, und wie aus der Projektionsfigur ersichtlich, ist die Messung in vier Fällen überhaupt nicht ausführbar. Die beobachteten Werte zeigen ein wesentliches Abweichen vom Gesetze der zirkumaxialen Anordnung, und die Polarisationsebenen haben eine Tendenz zu einem parallelen Systeme. In der Gegend $\Theta = 90^0$ und 270^0 sind die Strahlen nicht ganz linear polarisiert. Die Natur der Vektoren konnte hier nicht näher untersucht werden, weil wegen der geringen Intensität des Spaltbildes eine Beobachtung mit dem Babinetschen Kompensator unmöglich war. Diese Abweichung stammt von dem zur Trennungsebene parallelem Vektor her.

Den Einfluß dieses Vektors kann man auch noch am

Parallelkreise $\Omega = 22 \cdot 5^0$ bemerken, aber in wesentlich kleinerem Maße. An Parallelkreisen, die zu $\Omega = 30^0$ und größeren Winkeln gehören, ist die zirkumaxiale Anordnung fast genau gültig.

Zur Bestimmung des Polarisationsazimuts eines Strahles wurden 20 Einstellungen des analysierenden Nikols gemacht

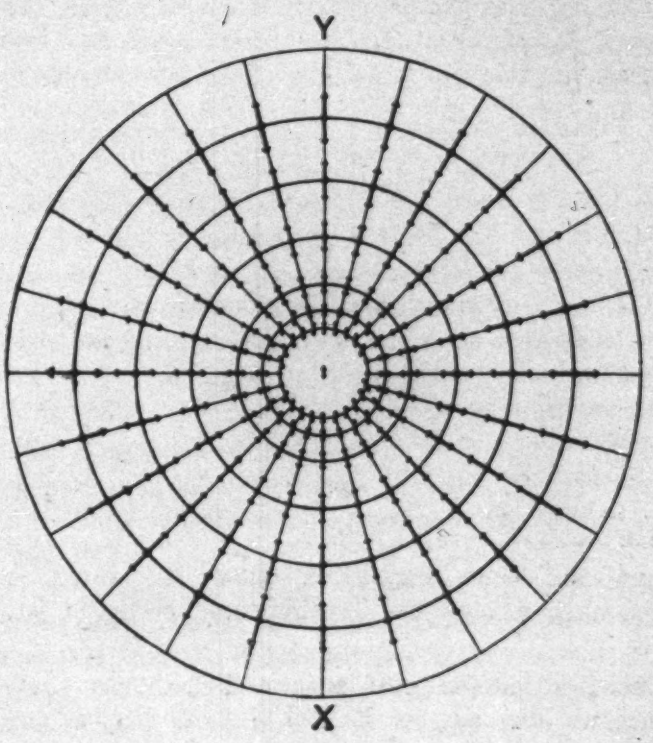


Fig. 6.

und zwar bei positiv eingestellten polarisierenden Nikol 5 positive und 5 negative Ablesungen des Analysators, und ebenso 10 Ablesungen bei negativ eingestelltem Polarisator. Bei manchem Strahle, wo es sich notwendig zeigte, wurde das Azimut aus 40 Einstellungen bestimmt.

2. Die zweite Gruppe der Messungen bezieht sich auf diejenigen zerstreuten Strahlen, die nach ihrer Zerstreuung durch die Glashalbkugel hindurchgingen.

Der Umstand, daß der zerstreute Strahl in das Glas gebrochen wird, hat in diesem Falle, wo der Lichtvektor des zerstreuten Strahles immer in seiner jeweiligen Einfallsebene schwingt, keinen Einfluß auf die Polarisation und so müssen die Vektorsysteme in der Luft und im Glas dieselbe zirkumaxiale Anordnung zeigen.

Die Intensität des Spaltbildes und daher auch die Genauigkeit der Messung ist jedoch bei dem durch die Glashalbkugel hindurchgedrungenen Strahlensysteme bedeutend größer als im vorgehendem Falle. Hier ist nämlich die Zer-

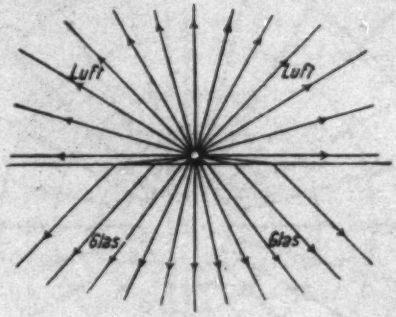


Fig. 7.

streuung auf einen geringeren Raum beschränkt, welcher durch den Grenzkegel der Totalreflexion bestimmt ist. (Vgl. Fig. 7.)

Das Spaltbild ist aber auch außerhalb des Grenzkegels sichtbar, wie dies aus der Formel (7c) unmittelbar erfolgt.

Die im § 3 erläuterten Grundlagen und die sphärisch-trigonometrischen Transformationen bleiben auch in diesem Falle geltend, man muß nur die Koordinate $\widehat{OS_I}$ in der Ebene K_A in entgegengesetzter Richtung nehmen.

Im Falle $\Omega = 0^0$ findet man wieder den zur Trennungsebene parallelen, kleinen Vektor.

Dessen Einfluß war noch in den Fällen $\Omega = 15^0$ und $22{\cdot}5^0$ bemerkbar. Die Abweichung von der zirkumaxialen Anordnung hat dieselbe Richtung wie in der vorigen Gruppe, aber die Abweichung ist hier kleiner.

An den Parallelkreisen, welche zu $\Omega = 30^0$ und zu noch größeren Winkeln gehören, ist die zirkumaxiale Anordnung vollständig.

Das Projektionsbild zeigt streng genommen nur die Resultate der ersten Messungsgruppe. Aber die Abweichung der zweiten Messungsgruppe von der ersten ist so gering, daß man den Unterschied zwischen beiden Zeichnungen nicht wahrnehmen könnte, und man würde in der graphischen Darstellung fast dasselbe Projektionsbild erhalten.

Die Anzahl der beobachteten Strahlen ist 290. Von diesen zeigen 60 erhebliche Abweichungen von der zirkumaxialen Anordnung; aber diese liegen alle an den Parallelkreisen $\Omega = 15^0$ und $22 \cdot 5^0$. Die Abweichung hat im allgemeinen eine solche Richtung, daß die Polarisationsebenen einem parallelen Systeme zustreben. Der die Abweichung bewirkende kleine Vektor schwingt in der Einfallsebene und parallel zur Trennungsebene; die Intensität dieses Vektors verhält sich zur Intensität des in der Normalen der Trennungsebene schwingenden etwa wie 1:80.

Dieser scheinbar störende kleine Vektor tritt deshalb auf, weil das *einfallende* Strahlenbündel bei aller Sorgfalt der Einstellung und auch bei sehr kleinem Spalte nie vollkommen parallel ist, es muß sich dann ein so gerichteter Vektor zeigen (vgl. § 1 und Fig. 3).

Die Phasen dieses und des zur Trennungsebene senkrechten Vektors sind gleich, wenn der Einfallswinkel kleiner ist als der Grenzwinkel und dann ist der aus beiden resultierende Vektor linear. Wenn der Einfallswinkel jedoch größer ist als der Grenzwinkel, dann haben die Vektoren eine Phasendifferenz von $\pi/2$ und der resultierende Vektor ist elliptisch (vgl. Formeln 1—5).

Die Resultate, auch diejenigen, welche eine Abweichung von der zirkumaxialen Anordnung zeigen, bestätigen streng die theoretisch bestimmte Polarisation des bei dem Grenzwinkel der Totalreflexion gebrochenen Strahles, wenn der lineare Vektor des einfallenden Strahles parallel zur Einfallsebene schwingt; anderseits habe ich durch die Beobachtung ein typisches zirkumaxiales System festgestellt, in welchem die Achse der zirkumaxialen Anordnung senkrecht zur Trennungsebene ist.

Die hier mitgeteilten Beobachtungen sind nur ein Teil der Untersuchungen, von welchen ich im § 1 Erwähnung machte.

Ich bin den Herren Hofrat Prof. Dr. J. Fröhlich, dem verschiedenen Prof. Baron R. Eötvös, Privatdozent Dr. St. Rybár für die Anregung zu dieser Untersuchung und für die Beihilfe bei den Messungen auch Hrn. Stud.-Á. Ecsödy für die sorgfältige Ausführung der Projektionsfigur zu stetem Danke verpflichtet.

Budapest, Erstes Physikalisches Institut der Universität, den 1. Juni 1920.

(Eingegangen 5. Juli 1920.)

Namenregister zum Jahrgang 1920.

A.

Auwers, O. v., Über Heuslersche Legierungen. II. Teil. Magnetische Messungen an Heuslerschen Aluminium-Manganbronzen mit hochprozentigem Eisengehalt 63, 867.

B.

Bakker, G., Die Dicke der Kapillarschicht zwischen den homogenen Phasen der Flüssigkeit und des Dampfes, insbesondere von Kohlensäure 61, 273.

Banneitz, F., G. Rhein und B. Kurze, Untersuchungen über die Grundlagen zum Bau von Transportgefäßen für verflüssigte Gase 61, 113.

Barkhausen, H. und H. Lichte, Quantitative Unterwasserschallversuche 62, 485.

Benedicks, C., Galvanometrischer Nachweis der Thermospannung 1. Art beim flüssigen Quecksilber 62, 185.

Boedke, P., Versuch zu einer Erweiterung der Planckschen Theorien der verdünnten Lösungen 61, 834.

Bohlin, H., Eine neue Anordnung für röntgenkristallographische Untersuchungen von Kristallpulver 61, 421.

Bormann, E. und M. Born, Zur Gittertheorie der Zinkblende 62, 218.

Born, M., Über die elektrische Natur der Kohäsionskräfte fester Körper 61, 87.

Born, M. und E. Bormann, Zur Gittertheorie der Zinkblende 62, 218.

Böttcher, E. und F. Tuczek, Der Effekt des elektrischen Feldes auf Linien des Argons und des Sauerstoffs 61, 107.

Borelius, G., Bestimmung des Thomsoneffektes aus dem thermischen Gleichgewicht an einem stromdurchflossenen Drahte 63, 845.

C.

Calatroni, R. und R. Gans, Die Form ultramikroskopischer Platinteilchen 61, 465.

D.

Dember, H. und M. Uibe, Über die Gestalt des sichtbaren Himmelsgewölbes 61, 818. — Ver-

such einer physikalischen Lösung des Problems der sichtbaren Größenänderung von Sonne und Mond in verschiedenen Höhen über dem Horizont 61, 353. — Über eine physikalische Theorie der Bewegung des Erdschattens in der Atmosphäre 62, 517. — — Über die spektrale Polarisation des diffusen Sonnenlichts in der Erdatmosphäre 63, 571.

Dieterici, C., Zum Problem der Zustandsgleichung 62, 75.

E.

Ehrenfest, P., Welche Rolle spielt die Dreidimensionalität des Raumes in den Grundgesetzen der Physik? 61, 449.

Ehrenhaft, F. und D. K. Konstantinowsky, Radioaktivität und Elektrizität. (Hierzu Tafel III) 63, 773.

Esau, A., Der gegenseitige Induktionskoeffizient von Rechtecken und Quadraten 61, 410.

Eppendahl, R., Über das piezooptische Verhalten von Topas 61, 591.

F.

Falckenberg, G., Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante des Wassers, Äthylalkohols, Methylalkohols und Acetons vom Druck 61, 145. — Eine Differentialschaltung zur Messung von Kapazitäten und Selbstinduktionen mit einer Empfindlichkeit von $2 \cdot 10^{-8}$ 61, 167.

Faxén, H., Der Gültigkeitsbereich der Stokes-Oseenschen Widerstandsformel. Erklärung einiger von J. Weyssenhoff gefundener Unstimmigkeiten 63, 581.

Fonseca, A. und R. Gans, Die magnetischen Eigenschaften von Nickel-Kupfer-Legierungen 61, 742.

Försterling, K., Spezifische Wärme und Zustandsgleichung von Kristallen 61, 549. — Über die Verschiebung des Maximums der Reflexion gegen die Lage der Eigenfrequenz 61, 577.

Fröhlich, P., Neuere Beobachtungen über die Polarisation des bei der Totalreflexion gebrochenen Lichtes 63, 900.

Fues, E., Vergleich zwischen den Funkenspektren der Erdalkalien und den Bogenspektren der Alkalien 63, 1,

Fürth, R., Zur Beweglichkeitsbestimmung aus der Brownschen Bewegung an einem Einzelteilchen III. 63, 521.

G.

Gans, R., Die reversible Permeabilität auf der idealen Magnetisierungskurve 61, 379. — Die Trägheitsmomente der Magnetonen 61, 396. — Bemerkung zu meiner Arbeit: „Fortpflanzung des Lichts durch ein inhomogenes Medium“ 61, 398. — Oszillatoren von zwei und drei Freiheitsgraden. Ein Beitrag zur Quantentheorie 61, 400. — Das Verhalten Hertzscher Gitter 61, 447. — Die Trägheit der Elektrizität. (Eine Kritik) 62, 328. — Ein Ultrafiltrierapparat 62, 327. — Ultramikroskopische Studien. (Methoden zur Formbestimmung subultramikroskopischer Teilchen) 62, 331. —

Das magnetische Molekularfeld 63, 382.

Gans, R. und R. Calatroni, Die Form ultramikroskopischer Platinteilchen 61, 465.

Gans, R. und A. Fonseca, Die magnetischen Eigenschaften von Nickel-Kupfer-Legierungen 61, 742.

Gans, R. und H. Isnardi, Die magnetische Suszeptibilität von Antimon und Wismut. Ein Beitrag zur Kenntnis der Form der Magnetonen 61, 585.

Giebe, E. und E. Grüneisen, Eine neue Bestimmung der absoluten elektrischen Widerstandseinheit. (Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt) 63, 179.

Gockel, A., Beiträge zur Kenntnis von Farbe und Polarisation des Himmelslichtes 62, 283.

Gróh, J. und G. v. Hevesy, Die Selbstdiffusionsgeschwindigkeit des geschmolzenen Bleis 63, 85.

Grüneisen, E. und E. Giebe, Eine neue Bestimmung der absoluten elektrischen Widerstandseinheit. (Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt) 63, 179.

Günther, P., Untersuchungen über die spezifische Wärme bei tiefen Temperaturen 63, 476.

H.

Haga, H. und F. Zernike, Über thermoelektrische Ströme im Quecksilber 61, 753.

Hahnemann, W. und H. Hecht, Eine Theorie des Telephons 63, 57.

Hauer, F. v., Bewegung und Ladung kleiner Teilchen im ionisierten elektrischen Feld 61, 303.

Hauschild, H., Beiträge zur Kenntnis der Oberflächenschichten auf Metallen 63, 816.

Hecht, H. u. W. Hahnemann, Eine Theorie des Telephons 63, 57.

Heil, K., Läßt sich ein Einfluß der Kristallstruktur auf α-Strahlen nachweisen? 61, 201.

Heuck, W. und F. Tuczek, Methoden zur Beobachtung des Effektes des elektrischen Feldes auf Spektrallinien 63, 766.

Hevesy, G. v. und J. Gróh, Die Selbstdiffusionsgeschwindigkeit des geschmolzenen Bleis 63, 85.

Hoffmann, G., Zur experimentellen Entscheidung der Frage der Radioaktivität aller Elemente 62, 738.

Holborn, L., Über die Isothermen des Wasserstoffs 63, 674.

I.

Isnardi, T., Die Dampfspannung des festen Broms. (Übersetzt und mitgeteilt von R. Gans) 61, 264. — Experimentaluntersuchungen an trüben Medien. (Übersetzt und mitgeteilt von R. Gans) 62, 579.

Isnardi, H. und R. Gans, Die magnetische Suszeptibilität von Antimon und Wismut. Ein Beitrag zur Kenntnis der Form der Magnetonen 61, 585.

J.

Jaffé G., Über zweidimensionale Flüssigkeitsstörung zwischen parallelen ebenen Wänden 61, 173. — Zur Theorie der Hochvakuumentladung 62, 145.

Jakob, M., Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit des Wassers im Bereich von 0 bis 80° 63, 537.

K.

Knopf, O., Die Versuche von F. Harreß über die Geschwindigkeit des Lichtes in bewegten Körpern 62, 389.

Konstantinowsky, D. K. und F. Ehrenhaft, Radioaktivität und Elektrizität. (Hierzu Tafel III) 63, 773.

Krüger, F., Theorie der Schneidentöne. (Hierzu Tafel I) 62, 673.

Kurze, B., F. Banneitz und G. Rhein, Untersuchungen über die Grundlagen zum Bau von Transportgefäßen für verflüssigte Gase 61, 113.

Küstner, H., Die Bewegungsgesetze der Elektrizitätsträger bei von Null verschiedenen Gasdrucken 63, 457.

L.

Lang, H., Zur Tensorgeometrie in der allgemeinen Relativitätstheorie 61, 32.

Laue, M. v., Zum Versuch von Harreß 62, 448.

Lehmann, O., Über Strukturverdrehung bei schleimig-flüssigen Kristallen 61, 501.

Lenard, P., Über Elektrizitätsleitung durch freie Elektronen und Träger. III: Wanderungsgeschwindigkeit kraftgetriebener Partikel in reibenden Medien. Mit Beiträgen von H. Weick und Hans Ferd. Mayer 61, 665.

Lichte, H. und H. Barkhausen, Quantitative Unterwasserschallversuche 62, 485.

Lilienfeld, J. E., Zur Hochvakuumentladung 61, 221. — Bemerkung zu Hrn. G. Jaffés vorstehender Arbeit: Zur Theorie der Hochvakuumentladung 63, 175.

Lindman, K. F., Zur Frage nach der Existenz wahrer Pyroelektrizität 62, 107. — Über eine durch ein isotropes System von spiralförmigen Resonatoren erzeugte Rotationspolarisation der elektromagnetischen Wellen 63, 621.

Lyon, N. und F. Wolfram, Über die Temperaturabhängigkeit der elektrischen Doppelbrechung 63, 789.

M.

Mayer, H. F., Kritik zur Wanderungsgeschwindigkeitsformel Hrn. Langevins 63, 358.

Mecke, R., Experimentelle und theoretische Untersuchungen über Kranzerscheinungen im homogenen Nebel 61, 471. — Experimentelle und theoretische Untersuchungen über Kranzerscheinungen im homogenen Nebel. (Fortsetzung) 62, 623.

Mie, G., Die Einführung eines vernunftgemäßen Koordinatensystems in die Einsteinsche Gravitationstheorie und das Gravitationsfeld einer schweren Kugel 62, 46.

Möbius, W., Über die Dispersion von Wasser und Äthylalkohol zwischen 7 und 25 mm Wellenlänge und Vorversuche zur Verwendung noch kürzerer elektrischer Wellen 62, 293.

Müller, W., Messungen der Deformation des elektrostatischen Erdfeldes durch Luftfahrzeuge 63, 585.

P.

Paschen, F., Das Spektrum des Neon. (Nachtrag) 63, 201.

R.

Reichenbächer, E., I. Das skalare Gravitationspotential 61, 1. — II. Die Krümmung des Lichtstrahls infolge der Gravitation 61, 21. — III. Die Punktbewegung im allgemeinen Gravitationsfelde 61, 25. — Über die Nichtintegrabilität der Streckenübertragung und die Weltfunktion in der Weylschen verallgemeinerten Relativitätstheorie 63, 93. — Die Feldgleichungen der Gravitation und der Elektrizität innerhalb der Materie 63, 115.

Rhein, G., B. Kurze und F. Banneitz, Untersuchungen über die Grundlagen zum Bau von Transportgefäßen für verflüssigte Gase 61, 119.

Rie, E., Verdampfung und Stabilisierung kleiner Quecksilberkugeln 63, 759.

Rubinowicz, A., Radiometerkräfte und Ehrenhaftsche Photophorese. (I. Mitteilung) 62, 691. — Radiometerkräfte und Ehrenhaftsche Photophorese. (II. Mitteilung) 62, 716.

Rumpf, E., Über die Polarisation in der Geißlerentladung 62, 173.

S.

Schaefer, O., Die Schwingungen biegungssteifer Saiten 62, 156.

Schirmann, M. A., Versuch einer einheitlichen Erklärung der Erscheinungen der atmosphärischen Polarisation 61, 195. — Zur Theorie der Doppelgitter. (Ein elektrostatisches Problem) 62, 97.

Schmidt, F. S., Zur beschleunigten Bewegung kugelförmiger Körper in widerstehenden Mitteln 61, 633.

Schmidt, F., Die Erdalkalisauerstoffphosphore 63, 264.

Schottky, W., Thermodynamik der seltenen Zustände im Dampfraum. (Thermische Ionisierung und thermisches Leuchten.) I. Teil 62, 113.

Schriever, O., Elektromagnetische Wellen an dielektrischen Drähten 63, 645.

Schrödinger, E., Über die Kohärenz in weitgeöffneten Bündeln 61, 69. — Theorie der Pigmente von größter Leuchtkraft 62, 603. — Grundlinien einer Theorie der Farbenmetrik im Tagessehen. (I. Mitteilung) 63, 397. — Grundlinien einer Theorie der Farbenmetrik im Tagessehen. (II. Mitteilung) 63, 427. — Grundlinien einer Theorie der Farbenmetrik im Tagessehen. (III. Mitteilung) 63, 481.

Schweidler, E., Die Aufrechterhaltung der negativen Erdladung, das Grundproblem der luftelektrischen Forschung. (Bemerkungen zur gleichbetitelten Arbeit des Hrn. R. Seeliger) 63, 726.

Seeliger, R., Die Aufrechterhaltung der negativen Erdladung, das Grundproblem der luftelektrischen Forschung 62, 464.

Sommerfeld, A., Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie 62, 95. — All-

gemeine spektroskopische Gesetze, insbesondere ein magnetooptischer Zerlegungssatz 63, 221.

T.

Thilo, G., Der Strahlungsdruck auf Kreiszylinder aus beliebigem Material 62, 531.

Traub, W., Die Dispersion der Luft im ultravioletten Spektrum 61, 533.

Traube, J., Über Balloelektrizität, Molekularkräfte und elektrische Kräfte 62, 165.

Tuczek, F. und E. Böttcher, Der Effekt des elektrischen Feldes auf Linien des Argons und des Sauerstoffes 61, 107.

Tuczek, F. und W. Heuck, Methoden zur Beobachtung des Effektes des elektrischen Feldes auf Spektrallinien 63, 766.

U.

Uibe, M. und H. Dember, Über die Gestalt des sichtbaren Himmelsgewölbes 61, 313. — Versuch einer physikalischen Lösung des Problems der sichtbaren Größenänderung von Sonne und Mond in verschiedenen Höhen über dem Horizont 61, 353. — Über eine physikalische Theorie der Bewegung des Erdschattens in der Atmosphäre 62, 517. — Über die spektrale Polarisation des diffusen Sonnenlichts in der Erdatmosphäre 63, 571.

V.

Vegard, L., Die Rolle des Kristallwassers und die Struktur der Alaune. (Antwort an Herrn Cl. Schaefer und Frl. M. Schubert) 63, 758.

Vogel, H., Die Zungenpfeife als gekoppeltes System 62, 247.

Vogel, H. und M. Wien, Zungenpfeife und Röhrensender 62, 649.

W.

Waetzmann, E., Über erzwungene Schwingungen bei gestörter Superposition 62, 371.

Wallot, J., Kinematische und energetische Definition der Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen 62, 569.

Weber, R. H., Die Magnetisierbarkeit von Kupfer- und Zinklegierungen. (Nach Messungen von Konrad Greulich † berichtet) 62, 666.

Weigert, F., Über die spezifische Wirkung der polarisierten Strahlung. (Hierzu Tafel II) 63, 681.

Weth, M., Über die Anregung des kontinuierlichen Serien- und Bandenspektrums des Wasserstoffs durch die langsamen Kanal- und Kathodenstrahlen des positiven Spitzenstroms 62, 589.

Weyl, H., Erwiderung auf Hrn. Sommerfelds Bemerkungen über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie 62, 482.

Weyssenhoff, J., Betrachtungen über den Gültigkeitsbereich der Stokesschen und der Stokes-Cunninghamschen Formel. I: Hydrodynamischer Teil 62, 1.

Wiechert, E., Die Gravitation als elektrodynamische Erscheinung 63, 301.

Wien, M. und H. Vogel, Zungenpfeife und Röhrensender 62, 649.

Wien, M., Bemerkung zu der Arbeit von W. Hahnemann und H. Hecht „Der mechanisch-akustische Aufbau eines Telephons" 62, 759.

Wolfram, F. und N. Lyon, Über die Temperaturabhängigkeit der elektrischen Doppelbrechung 63, 739.

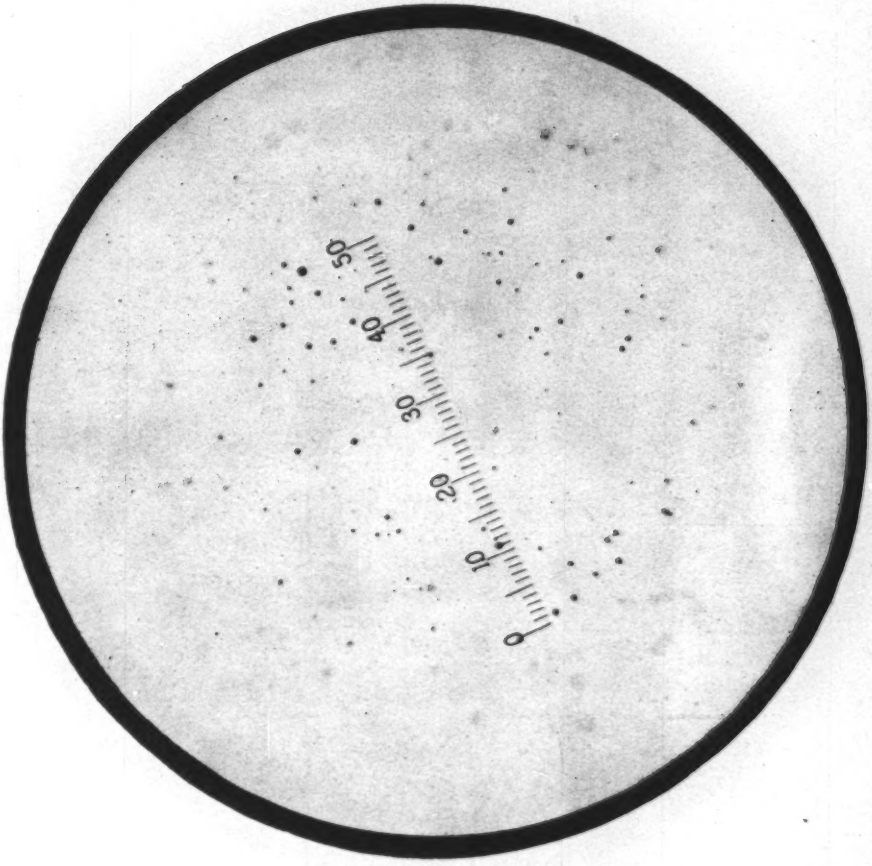
Wommelsdorf, H., Eine neue Polarisatorschaltung für Influenz- und Kondensatormaschinen 63, 295.

Z.

Zecher, G., Untersuchungen am kontinuierlich. Röntgenspektrum der Glühkathodenröhre: Die Abhängigkeit der Grenzstrahlung vom Emissionsazimut und der Einfluß des Metalls der Antikathode. (Hierzu Tafel I) 63, 28.

Zernike, F. und H. Haga, Über thermoelektrische Ströme im Quecksilber 61, 753.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig



Selenkugeln
Mikrophotographiert mit Tageslicht
Zeiß Apochromat Apertur 1,3; hom. Immersion
1 pars des Okularmaßstabes = $2 \cdot 10^{-4}$ cm
Scharfe Einstellung in dem Kreisring zwischen den partes 40 und 50.

F. Ehrenhaft u. D. K. Konstantinowsky.